Análise de algoritmos

Complexidade computacional

Carla Negri Lintzmayer

31 de Maio de 2020

Centro de Matemática, Computação e Cognição
Universidade Federal do ABC

UFABC

Redução como ferramenta para resolver problemas

Redução informalmente

- Problema P: I_P é instância e S_P é solução.

Redução informalmente

- Problema P: I_P é instância e S_P é solução.
- Reduzir um problema A para um problema B significa usar um algoritmo de B para resolver A:

Redução informalmente

- Problema P: I_P é instância e S_P é solução.
- Reduzir um problema A para um problema B significa usar um algoritmo de B para resolver A:

$$I_B \longrightarrow \boxed{ALG_B} \longrightarrow S_B$$

Redução informalmente

- Problema P: I_P é instância e S_P é solução.
- Reduzir um problema A para um problema B significa usar um algoritmo de B para resolver A:

$$I_B \longrightarrow \boxed{ALG_B} \longrightarrow S_B$$

$$I_A \xrightarrow{f} I_B \longrightarrow \boxed{ALG_B} \longrightarrow S_B \xrightarrow{g} S_A$$

Redução informalmente

- Problema P: I_P é instância e S_P é solução.
- Reduzir um problema A para um problema B significa usar um algoritmo de B para resolver A:

$$I_B \longrightarrow \boxed{ALG_B} \longrightarrow S_B$$

$$I_A \xrightarrow{f} I_B \longrightarrow \boxed{ALG_B} \longrightarrow S_B \xrightarrow{g} S_A$$

$$I_A \longrightarrow \boxed{\xrightarrow{f} I_B \longrightarrow \boxed{ALG_B} \longrightarrow S_B \xrightarrow{g}} \longrightarrow S_A$$

Exemplo

PROBLEMA: SELECAO

Entrada: $\langle V, n, k \rangle$, onde $V[1..n]$ é um vetor e $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Saída: k-ésimo menor elemento armazenado em V.

Exemplo

PROBLEMA: SELECAO

Entrada: $\langle V, n, k \rangle$, onde $V[1..n]$ é um vetor e $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Saída: k-ésimo menor elemento armazenado em V.

PROBLEMA: ORDENACAO

Entrada: $\langle A, m \rangle$, onde $A[1..m]$ é um vetor.

Saída: vetor B com o mesmo conteúdo de A porém tal que $B[1] \leq B[2] \leq \cdots \leq B[n]$.

SELECAO reduz para ORDENACAO

Precisamos mostrar:

$$\langle V, n, k\rangle \xrightarrow{f} \langle A, m\rangle \longrightarrow \textsc{Quicksort} \longrightarrow A \xrightarrow{g} V[\cdot]$$

SELECAO reduz para ORDENACAO

Precisamos mostrar:

$$\langle V, n, k\rangle \xrightarrow{f} \langle A, m\rangle \longrightarrow \textsc{Quicksort} \longrightarrow A \xrightarrow{g} V[\cdot]$$

```
1  ALG_selecao(V, n, k) {
2      V = ALG_ordenacao(V, n);
3      return V[k];
4  }
```

ORDENACAO reduz para SELECAO

Precisamos mostrar:

$$\langle A, m\rangle \xrightarrow{f} \langle V, n, k\rangle \longrightarrow SELECTION \longrightarrow V[\cdot] \xrightarrow{g} A$$

ORDENACAO reduz para SELECAO

Precisamos mostrar:

$$\langle A, m\rangle \xrightarrow{f} \langle V, n, k\rangle \longrightarrow SELECTION \longrightarrow V[\cdot] \xrightarrow{g} A$$

```
1  ALG2_ordenacao(V, n) {
2      seja A[1..n] um vetor vazio;
3      for (i = 1; i <= n; i++) {
4          A[i] = ALG2_selecao(V, n, i);
5      }
6      return A;
7  }
```

Exemplo

PROBLEMA: QUADRADO

Entrada: $\langle x \rangle$, onde x é um inteiro.

Saída: x^2.

Exemplo

PROBLEMA: QUADRADO

Entrada: $\langle x \rangle$, onde x é um inteiro.

Saída: x^2.

PROBLEMA: MULTIPLICACAO

Entrada: $\langle a, b \rangle$, onde a e b são inteiros.

Saída: $a \times b$.

QUADRADO reduz para MULTIPLICACAO

Precisamos mostrar:

$$\langle x \rangle \xrightarrow{f} \langle a, b \rangle \longrightarrow \textsc{Karatsuba} \longrightarrow a \times b \xrightarrow{g} x^2$$

QUADRADO reduz para MULTIPLICACAO

Precisamos mostrar:

$$\langle x \rangle \xrightarrow{f} \langle a, b \rangle \longrightarrow \textsc{Karatsuba} \longrightarrow a \times b \xrightarrow{g} x^2$$

```
1  ALG_quadrado(x) {
2      z = ALG_multiplica(x, x);
3      return z;
4  }
```

MULTIPLICACAO reduz para QUADRADO

Precisamos mostrar:

$$\langle a, b \rangle \xrightarrow{f} \langle x \rangle \longrightarrow \textsc{Square} \longrightarrow x^2 \xrightarrow{g} a \times b$$

MULTIPLICACAO reduz para QUADRADO

Precisamos mostrar:

$$\langle a, b \rangle \xrightarrow{f} \langle x \rangle \longrightarrow \textsc{Square} \longrightarrow x^2 \xrightarrow{g} a \times b$$

```
1  ALG2_multiplica(a, b) {
2      X = ALG2_quadrado(a+b);
3      Y = ALG2_quadrado(a);
4      Z = ALG2_quadrado(b);
5      return (X - Y - Z)/2;
6  }
```

Exemplo

PROBLEMA: CAMINHOTODOPAR

Entrada: $\langle D, w \rangle$, onde D é um digrafo e w: $E(D) \to \mathbb{R}$.

Saída: matriz d onde $d[i][j]$ é o peso do menor ij-caminho em D.

Exemplo

PROBLEMA: CAMINHOTODOPAR

Entrada: $\langle D, w \rangle$, onde D é um digrafo e w: $E(D) \to \mathbb{R}$.

Saída: matriz d onde $d[i][j]$ é o peso do menor ij-caminho em D.

PROBLEMA: CAMINHOUMAFONTE

Entrada: $\langle H, p, s \rangle$, onde H é um digrafo, p: $E(H) \to \mathbb{R}$ e $s \in V(H)$.

Saída: vetor t onde $t[i]$ é o peso do menor si-caminho em H.

CAMINHOTODOPAR reduz para CAMINHOUMAFONTE

Precisamos mostrar:

$$\langle D, w\rangle \xrightarrow{f} \langle H, p, s\rangle \longrightarrow \textsc{Bellman-Ford} \longrightarrow t \xrightarrow{g} d$$

CAMINHOTODOPAR reduz para CAMINHOUMAFONTE

Precisamos mostrar:

$$\langle D, w\rangle \xrightarrow{f} \langle H, p, s\rangle \longrightarrow \textsc{Bellman-Ford} \longrightarrow t \xrightarrow{g} d$$

```
1  ALG_caminhotodopar(D, w) {
2      cria matriz d[][];
3      for (i = 1; i <= D.n; i++)
4          d[i] = ALG_caminhoumafonte(D, w, i);
5      return d;
6  }
```

Exemplo

PROBLEMA: ARVOREGERADORAMINIMA

Entrada: $\langle G, w \rangle$, onde G é um grafo e w: $E(G) \to \mathbb{R}$.

Saída: conjunto $T \subseteq E(G)$ tal que $G[T]$ é árvore geradora de peso mínimo.

Exemplo

Problema: ARVOREGERADORAMINIMA

Entrada: $\langle G, w \rangle$, onde G é um grafo e w: $E(G) \to \mathbb{R}$.

Saída: conjunto $T \subseteq E(G)$ tal que $G[T]$ é árvore geradora de peso mínimo.

Problema: ARVORESTEINER

Entrada: $\langle H, p, R \rangle$, onde H é um grafo, p: $E(H) \to \mathbb{R}$, e $R \subseteq V(H)$ são vértices requeridos.

Saída: conjunto $A \subseteq E(H)$ tal que $H[A]$ é árvore, $R \subseteq V(H[A])$ e A tem peso mínimo.

ARVOREGERADORAMINIMA reduz para ARVORESTEINER

Precisamos mostrar:

$$\langle G, w \rangle \xrightarrow{f} \langle H, p, R \rangle \longrightarrow ALG_{STEINER} \longrightarrow A \xrightarrow{g} T$$

ARVOREGERADORAMINIMA reduz para ARVORESTEINER

Precisamos mostrar:

$$\langle G, w \rangle \xrightarrow{f} \langle H, p, R \rangle \longrightarrow ALG_{STEINER} \longrightarrow A \xrightarrow{g} T$$

```
1  ALG_arvoregeradoraminima(G, w) {
2      T = ALG_arvoresteiner(G, w, V(G));
3      return T;
4  }
```

Exemplo

PROBLEMA: TAREFAS

Entrada: $\langle T, n, s, f \rangle$, onde $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$ é um conjunto de n tarefas onde cada $t_i \in T$ ocorre no intervalo $[s_i, f_i)$.

Saída: conjunto $S \subseteq T$ tal que as tarefas de S são mutuamente compatíveis e $|S|$ é máximo.

Exemplo

PROBLEMA: TAREFAS

Entrada: $\langle T, n, s, f \rangle$, onde $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$ é um conjunto de n tarefas onde cada $t_i \in T$ ocorre no intervalo $[s_i, f_i)$.

Saída: conjunto $S \subseteq T$ tal que as tarefas de S são mutuamente compatíveis e $|S|$ é máximo.

PROBLEMA: CONJINDEPENDENTE

Entrada: $\langle G \rangle$, onde G é um grafo.

Saída: $I \subseteq V(G)$ tal que para todo par $u, v \in I$, $uv \notin E(G)$ e $|I|$ é máximo.

TAREFAS reduz para CONJINDEPENDENTE

Precisamos mostrar:

$$\langle T, n, s, f \rangle \xrightarrow{f} \langle G \rangle \longrightarrow ALG_{CONJINDEPENDENTE} \longrightarrow I \xrightarrow{g} S$$

TAREFAS reduz para CONJINDEPENDENTE

Precisamos mostrar:

$$\langle T, n, s, f \rangle \xrightarrow{f} \langle G \rangle \longrightarrow ALG_{CONJINDEPENDENTE} \longrightarrow I \xrightarrow{g} S$$

```
1  ALG_tarefas(T, n, s, f) {
2      V(G) = T;
3      E(G) = { {ti,tj} : s[i] < f[j] e s[j] < f[i]};
4      S = ALG_conjindependente(G);
5      return S;
6  }
```

Resumo

- Dado um problema A, podemos criar um algoritmo para A ao fazer uma redução para B, pois basta usar qualquer algoritmo para B.
- Observe que isso não impede que haja outros algoritmos para A.

Problemas de decisão

Problemas de otimização

Otimização

Dadas restrições e uma função objetivo que determina o valor de cada solução, encontrar uma solução melhor valor de função objetivo (maximização ou minimização).

Problemas de otimização

Otimização

Dadas restrições e uma função objetivo que determina o valor de cada solução, encontrar uma solução melhor valor de função objetivo (maximização ou minimização).

PROBLEMA: MOCHILAOPT

Entrada: $\langle I, n, v, w, W \rangle$, onde $I = \{1, \ldots, n\}$, v_i é o valor e w_i é o peso do item $i \in I$ e W é a capacidade de peso da mochila.

Saída: subconjunto de itens $S \subseteq I$ com $\sum_{i \in S} w_i \leq W$ e $\sum_{i \in S} v_i$ máximo.

Problemas de decisão

Decisão

Dadas restrições e uma pergunta, responder `sim` ou `não`.

Problemas de decisão

Decisão

Dadas restrições e uma pergunta, responder `sim` ou `não`.

PROBLEMA: MOCHILA

Entrada: $\langle I, n, v, w, W, V \rangle$, onde $I = \{1, \ldots, n\}$, v_i é o valor e w_i é o peso do item $i \in I$, W é a capacidade de peso da mochila e V é um número.

Decisão: existe um subconjunto de itens $S \subseteq I$ com $\sum_{i \in S} w_i \leq W$ e $\sum_{i \in S} v_i \geq V$?

Equivalência

- Problemas de otimização e decisão correspondentes são equivalentes no sentido de que se resolvermos um deles, então resolvemos o outro.

Equivalência

- Problemas de otimização e decisão correspondentes são equivalentes no sentido de que se resolvermos um deles, então resolvemos o outro.
  - Podem ser reduzidos entre si!

Equivalência

- Problemas de otimização e decisão correspondentes são equivalentes no sentido de que se resolvermos um deles, então resolvemos o outro.
  - Podem ser reduzidos entre si!
- Por exemplo, dados n itens com pesos w_i e valores v_i e uma mochila com capacidade W.

MOCHILA reduz para MOCHILAOPT

Suponha que sabemos resolver MOCHILAOPT em $\langle I, n, v, w, W \rangle$.
Conseguimos resolver MOCHILA?

MOCHILA reduz para MOCHILAOPT

Suponha que sabemos resolver MOCHILAOPT em $\langle I, n, v, w, W \rangle$.
Conseguimos resolver MOCHILA?

```
1  ALG_mochila(I, n, v, w, W, V) {
2      z = ALG_mochilaopt(I, n, v, w, W);
3      if (z >= V)
4          return "sim";
5      else
6          return "não";
7  }
```

MOCHILAOPT reduz para MOCHILA

Agora suponha que sabemos resolver MOCHILA em $\langle I, n, v, w, W, V \rangle$. Conseguimos resolver MOCHILAOPT?

MOCHILAOPT reduz para MOCHILA

Agora suponha que sabemos resolver MOCHILA em $\langle I, n, v, w, W, V \rangle$. Conseguimos resolver MOCHILAOPT?

```
1   ALG_mochilaopt(I, n, v, w, W) {
2       ini = 0;
3       fim = n * max{v[1], ..., v[n]};
4
5       while (ini < fim) {
6           meio = (ini + fim) / 2;
7           if (ALG_mochila(I, n, v, w, W, meio) == "sim")
8               ini = meio + 1;
9           else
10              fim = meio - 1;
11      }
12
13      if (ALG_mochila(I, n, v, w, W, ini) == "sim")
14          return ini;
15      else
16          return ini - 1;
17  }
```

Outros problemas de decisão

PROBLEMA: ALINHAMENTO

Entrada: $\langle X, m, Y, n, \alpha, p \rangle$, onde $X[1..m]$ e $Y = [1..n]$ são sequências, α é função de pontuação e p é um número.

Decisão: existe um alinhamento de X e Y com pontuação $\geq p$?

Outros problemas de decisão

Problema: ARVOREGERADORA

Entrada: $\langle G, w, W \rangle$, onde G é um grafo, w: $E(G) \to \mathbb{R}$ e W é um número.

Decisão: existe conjunto $T \subseteq E(G)$ tal que $G[T]$ é árvore geradora e $\sum_{e \in T} w(e) \leq W$?

Outros problemas de decisão

PROBLEMA: BARRA

Entrada: $\langle n, p, k \rangle$, onde n é um inteiro tamanho da barra, vender um pedaço de tamanho i dá lucro p_i e k é um número.

Decisão: existe forma de cortar a barra tal que a soma dos lucros de vendas é $\geq k$?

Outros problemas de decisão

Problema: CAMINHOHAMILT

Entrada: $\langle D \rangle$, onde D é um digrafo.

Decisão: existe caminho hamiltoniano em D?

Outros problemas de decisão

PROBLEMA: CAMINHOHAMILT

Entrada: $\langle D \rangle$, onde D é um digrafo.

Decisão: existe caminho hamiltoniano em D?

PROBLEMA: CICLOHAMILT

Entrada: $\langle D \rangle$, onde D é um digrafo.

Decisão: existe ciclo hamiltoniano em D?

Outros problemas de decisão

PROBLEMA: CAMINHOHAMILT

Entrada: $\langle D \rangle$, onde D é um digrafo.

Decisão: existe caminho hamiltoniano em D?

PROBLEMA: CICLOHAMILT

Entrada: $\langle D \rangle$, onde D é um digrafo.

Decisão: existe ciclo hamiltoniano em D?

PROBLEMA: TSP

Entrada: $\langle D, w, k \rangle$, onde D é um digrafo, $w\colon E(D) \to \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$.

Decisão: existe ciclo hamiltoniano em D com peso $\leq k$?

Redução

Redução formalmente

Redução polinomial

Sejam A e B dois problemas de decisão.

O problema A é *redutível* para B se existe um algoritmo eficiente f tal que $f(I_A) = I_B$ e

$$I_A \text{ é } \texttt{sim} \text{ se e somente se } I_B \text{ é } \texttt{sim}.$$

CAMINHOHAMILT reduz polinomialmente para CICLOHAMILT

Seja $\langle D \rangle$ uma entrada de CAMINHOHAMILT.

CAMINHOHAMILT reduz polinomialmente para CICLOHAMILT

Seja $\langle D \rangle$ uma entrada de CAMINHOHAMILT.

Construa $\langle D' \rangle$ onde $V(D') = V(D) \cup \{x\}$ e
$E(D') = E(D) \cup \{xu, ux \colon u \in V(D)\}$ (isso leva tempo polinomial).

CAMINHOHAMILT reduz polinomialmente para CICLOHAMILT

Seja $\langle D \rangle$ uma entrada de CAMINHOHAMILT.

Construa $\langle D' \rangle$ onde $V(D') = V(D) \cup \{x\}$ e
$E(D') = E(D) \cup \{xu, ux \colon u \in V(D)\}$ (isso leva tempo polinomial).

Resta mostrar que $\langle D \rangle$ é `sim` para CAMINHOHAMILT se e somente se $\langle D' \rangle$ é `sim` para CICLOHAMILT.

CAMINHOHAMILT reduz polinomialmente para CICLOHAMILT

Seja $\langle D \rangle$ uma entrada de CAMINHOHAMILT.

Construa $\langle D' \rangle$ onde $V(D') = V(D) \cup \{x\}$ e
$E(D') = E(D) \cup \{xu, ux \colon u \in V(D)\}$ (isso leva tempo polinomial).

Resta mostrar que $\langle D \rangle$ é `sim` para CAMINHOHAMILT se e somente se $\langle D' \rangle$ é `sim` para CICLOHAMILT.

Suponha primeiro que $\langle D \rangle$ é `sim` para CAMINHOHAMILT.
Então existe caminho $C = (a, b, \ldots, d)$ hamiltoniano em D.
Note que $C' = (a, b, \ldots, d, x, a)$ é ciclo hamiltoniano em D'.
Então $\langle D' \rangle$ é `sim` para CICLOHAMILT.

CAMINHOHAMILT reduz polinomialmente para CICLOHAMILT

Seja $\langle D \rangle$ uma entrada de CAMINHOHAMILT.

Construa $\langle D' \rangle$ onde $V(D') = V(D) \cup \{x\}$ e
$E(D') = E(D) \cup \{xu, ux\colon u \in V(D)\}$ (isso leva tempo polinomial).

Resta mostrar que $\langle D \rangle$ é `sim` para CAMINHOHAMILT se e somente se $\langle D' \rangle$ é `sim` para CICLOHAMILT.

Suponha primeiro que $\langle D \rangle$ é `sim` para CAMINHOHAMILT.
Então existe caminho $C = (a, b, \ldots, d)$ hamiltoniano em D.
Note que $C' = (a, b, \ldots, d, x, a)$ é ciclo hamiltoniano em D'.
Então $\langle D' \rangle$ é `sim` para CICLOHAMILT.

Suponha agora que $\langle D' \rangle$ é `sim` para CICLOHAMILT.

Então existe ciclo $D = (a, \ldots, b, x, d, \ldots, a)$ hamiltoniano em D'.

Note que $C' = (d, \ldots, a, \ldots, b)$ é caminho hamiltoniano em D.

Então $\langle D \rangle$ é `sim` para CAMINHOHAMILT.

BARRA reduz polinomialmente para MOCHILA

Seja $\langle n, p, k \rangle$ uma entrada de BARRA.

BARRA reduz polinomialmente para MOCHILA

Seja $\langle n, p, k \rangle$ uma entrada de BARRA.

Construa $\langle I, m, v, w, W, V \rangle$ da seguinte forma:

- crie $\lfloor n/i \rfloor$ itens de peso $w = i$ e valor $v = p_i$, correspondentes a um pedaço de tamanho i da barra, $1 \leq i \leq n$;
- $m = \sum_{i=1}^{n} \lfloor n/i \rfloor$ e $I = \{1, \ldots, m\}$;
- $W = n$;
- $V = k$.

Note que isso é feito em tempo polinomial.

BARRA reduz polinomialmente para MOCHILA

Seja $\langle n, p, k \rangle$ uma entrada de BARRA.

Construa $\langle I, m, v, w, W, V \rangle$ da seguinte forma:

- crie $\lfloor n/i \rfloor$ itens de peso $w = i$ e valor $v = p_i$, correspondentes a um pedaço de tamanho i da barra, $1 \leq i \leq n$;
- $m = \sum_{i=1}^{n} \lfloor n/i \rfloor$ e $I = \{1, \ldots, m\}$;
- $W = n$;
- $V = k$.

Note que isso é feito em tempo polinomial.

Resta mostrar que $\langle n, p, k \rangle$ é `sim` para BARRA se e somente se $\langle I, m, v, w, W, V \rangle$ é `sim` para MOCHILA.

BARRA reduz polinomialmente para MOCHILA

Suponha que $\langle n, p, k \rangle$ é `sim` para BARRA.
Então existem pedaços $(c_1, c_2, \ldots, c_x)$ tais que $\sum_{i=1}^{x} c_i = n$ e $\sum_{i=1}^{x} p_{c_i} \geq k$.
Para cada pedaço c_i, coloque o item j correspondente ao mesmo em um conjunto S.
Note que $\sum_{j \in S} w_j = \sum_{i=1}^{x} c_i = n = W$ e $\sum_{j \in S} v_j = \sum_{i=1}^{x} p_{c_i} \geq k = V$.
Então $\langle I, m, v, w, W, V \rangle$ é `sim` para MOCHILA.

BARRA reduz polinomialmente para MOCHILA

Suponha agora que $\langle I, m, v, w, W, V \rangle$ é `sim` para MOCHILA.
Então existe conjunto $S \subseteq I$ de itens tais que $\sum_{j \in S} w_j \leq W$ e $\sum_{j \in S} v_j \geq V$.
Para cada item $j \in S$, corte a barra em um tamanho i correspondente ao mesmo.
Sejam $(c_1, c_2, \ldots, c_{|S|})$ os pedaços cortados da barra.
Note que $\sum_{i=1}^{|S|} c_i = \sum_{j \in S} w_j \leq W = n$ e $\sum_{i=1}^{|S|} p_{c_i} = \sum_{j \in S} v_j \geq V = k$.
Então $\langle n, p, k \rangle$ é `sim` para BARRA.

Outro problema

PROBLEMA: SUBSETSUM

Entrada: $\langle A, n, B \rangle$, onde $A = \{s_1, \ldots, s_n\}$ é um conjunto de n inteiros e B é um inteiro.

Decisão: existe $A' \subseteq A$ tal que $\sum_{s \in A'} s = B$?

SUBSETSUM reduz polinomialmente para MOCHILA

Seja $\langle A, n, B \rangle$ uma entrada de MOCHILA.

SUBSETSUM reduz polinomialmente para MOCHILA

Seja $\langle A, n, B \rangle$ uma entrada de MOCHILA.

Construa $\langle I, m, v, w, W, V \rangle$ da seguinte forma:

- crie um item de peso $w = s_i$ e valor $v = s_i$ para cada $s_i \in A$;
- $m = n$ e $I = \{1, \ldots, n\}$;
- $W = B$;
- $V = B$.

Note que isso é feito em tempo polinomial.

SUBSETSUM reduz polinomialmente para MOCHILA

Seja $\langle A, n, B \rangle$ uma entrada de MOCHILA.

Construa $\langle I, m, v, w, W, V \rangle$ da seguinte forma:

- crie um item de peso $w = s_i$ e valor $v = s_i$ para cada $s_i \in A$;
- $m = n$ e $I = \{1, \ldots, n\}$;
- $W = B$;
- $V = B$.

Note que isso é feito em tempo polinomial.

Resta mostrar que $\langle A, n, B \rangle$ é `sim` para SUBSETSUM se e somente se $\langle I, m, v, w, W, V \rangle$ é `sim` para MOCHILA.

SUBSETSUM reduz polinomialmente para MOCHILA

Suponha que $\langle A, n, B\rangle$ é `sim` para SUBSETSUM.
Então existe $A' \subseteq A$ com $\sum_{s\in A'} s = B$.
Para cada $s \in A'$, coloque o item j correspondente em um conjunto S.
Note que $\sum_{j\in S} w_j = \sum_{s\in A'} s = B = W$ e
$\sum_{j\in S} v_j = \sum_{s\in A'} s = B = V$.
Então $\langle I, m, v, w, W, V\rangle$ é `sim` para MOCHILA.

SUBSETSUM reduz polinomialmente para MOCHILA

Agora suponha que $\langle I, m, v, w, W, V\rangle$ é `sim` para MOCHILA.
Então existe $S \subseteq I$ com $\sum_{j\in S} w_j \leq W$ e $\sum_{j\in S} v_j \geq V$.
Para cada $j \in S$, coloque o valor s_i correspondente em um conjunto A'.
Note que $\sum_{s\in A'} s = \sum_{j\in S} w_j \leq W = B$ e
$\sum_{s\in A'} s = \sum_{j\in S} v_j \geq V = B$.
Mas então só pode ser que $\sum_{s\in A'} s = B$.
Então $\langle A, n, B\rangle$ é `sim` para SUBSETSUM.

Mas qual a importância da redução?

Além de ser uma técnica de projeto de algoritmos, ela é muito utilizada para dar informações sobre a dificuldade de problemas.

Suponha que o problema A reduz em tempo polinomial para o problema B:

$$I_A \longrightarrow \boxed{\xrightarrow{f} I_B \longrightarrow \boxed{ALG_B} \longrightarrow S_B \xrightarrow{g}} \longrightarrow S_A$$

Mas qual a importância da redução?

Além de ser uma técnica de projeto de algoritmos, ela é muito utilizada para dar informações sobre a dificuldade de problemas.

Suponha que o problema A reduz em tempo polinomial para o problema B:

$$I_A \longrightarrow \boxed{\xrightarrow{f} I_B \longrightarrow \boxed{ALG_B} \longrightarrow S_B \xrightarrow{g}} \longrightarrow S_A$$

Que conclusão podemos tirar se:

1. existir algoritmo eficiente para A?
2. existir algoritmo eficiente para B?
3. não existir algoritmo eficiente para A?
4. não existir algoritmo eficiente para B?

Mas qual a importância da redução?

Além de ser uma técnica de projeto de algoritmos, ela é muito utilizada para dar informações sobre a dificuldade de problemas.

Suponha que o problema A reduz em tempo polinomial para o problema B:

$$I_A \longrightarrow \boxed{\xrightarrow{f} I_B \longrightarrow \boxed{ALG_B} \longrightarrow S_B \xrightarrow{g}} \longrightarrow S_A$$

Que conclusão podemos tirar se:

1. existir algoritmo eficiente para A?
2. existir algoritmo eficiente para B?
3. não existir algoritmo eficiente para A?
4. não existir algoritmo eficiente para B?

Ou seja, B é tão difícil quanto A.
Ou então, A não é mais difícil do que B.

Mas qual a importância da redução?

Com exemplos:

- BARRA reduz polinomialmente para MOCHILA.
- SUBSETSUM reduz polinomialmente para MOCHILA.

Sabemos que:

- existe algoritmo eficiente para BARRA;
- (ainda) não existe algoritmo eficiente para SUBSETSUM.

Qual a conclusão sobre MOCHILA?

Classes de complexidade

Classe P

Classe P

Conjunto de problemas de decisão que podem ser resolvidos por um algoritmo eficiente.

BARRA, ALINHAMENTO, ARVOREGERADORA, CAMINHOCURTO são problemas em P.

Todos os problemas do mundo estão em P?

Não se sabe!

Até agora, não encontramos algoritmos de tempo polinomial que resolvem MOCHILA, TSP, CICLOHAMILT, CAMINHOHAMILT, SUBSETSUM, STEINER, ...

Mas eles são facilmente verificáveis

Para convencer alguém que uma instância é `sim`, basta apresentar um *certificado positivo*.

- $\langle \{2, 4, 5, 7, 9, 10\}, 5, 9 \rangle$ é `sim` para SUBSETSUM?
- $\langle \{2, 4, 5, 7, 9, 10\}, 5, 25 \rangle$ é `sim` para SUBSETSUM?
- $\langle \{1, 2, 3, 4, 5\}, 5, v = (3, 4, 6, 21, 1), w = (3, 4, 6, 2, 7), 10, 15 \rangle$ é `sim` para MOCHILA?
- $\langle \{1, 2, 3, 4, 5\}, 5, v = (3, 4, 6, 21, 1), w = (3, 4, 6, 2, 7), 10, 28 \rangle$ é `sim` para MOCHILA?

Algoritmo verificador

Algoritmo verificador

Seja T um problema qualquer.

Um algoritmo A é *verificador* se:

- para toda I_T que é `sim`, existe um conjunto de dados D tal que $A(I_T, D)$ retorna `sim` em tempo polinomial;
- para toda I_T que é `não`, qualquer conjunto de dados D faz $A(I_T, D)$ retornar `não` em tempo polinomial.

O conjunto D acima é um *certificado positivo*.

Classe NP

Classe NP

Conjunto de problemas de decisão para os quais existe um algoritmo verificador que aceita um certificado positivo em tempo polinomial.

É o caso de MOCHILA, TSP, CICLOHAMILT, CAMINHOHAMILT, SUBSETSUM, STEINER, ...

P vs. NP

Note que $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{NP}$.

P vs. NP

Note que $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{NP}$.

Será que $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{P}$?

P vs. NP

Note que $P \subseteq NP$.

Será que $NP \subseteq P$?

P é igual a NP?

P vs. NP

Note que $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{NP}$.

Será que $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{P}$?

P é igual a NP?

Um dos *problemas do milênio*: prêmio de 1 milhão de dólares para quem resolver.

Problemas NP-completos

Discussão

- O que significa dizer que um problema A está em NP?

Problemas NP-completos

Problema NP-completo

Um problema Q é NP-completo se $Q \in$ NP e todo outro problema de NP se reduz polinomialmente a Q.

O que isso significa?

Problemas NP-completos

Problema NP-completo

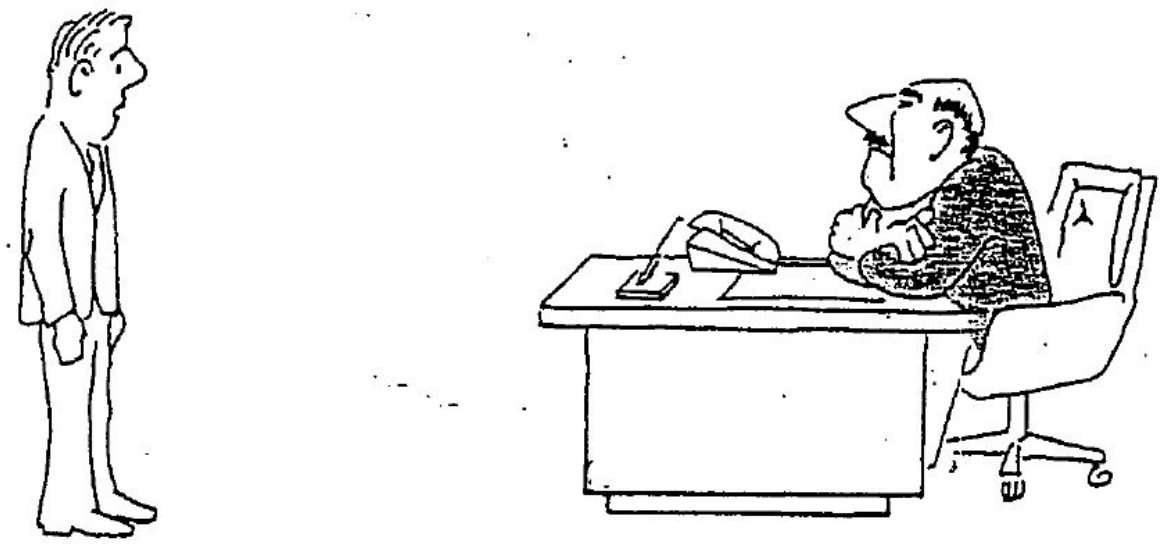
Um problema Q é NP-completo se $Q \in$ NP e todo outro problema de NP se reduz polinomialmente a Q.

O que isso significa?

Se X é NP-completo, podemos dizer que P $=$ NP se e somente se X pertence a P.

Resolva esse problema

Ele está em NP!



"I can't find an efficient algorithm, I guess I'm just too dumb."

Problemas NP-completos

Ele é NP-completo!

"I can't find an efficient algorithm, but neither can all these famous people."

Problemas NP-difíceis

Problema NP-difícil

Um problema Q é NP-difícil se todo outro problema de NP se reduz polinomialmente a Q.

Problemas NP-difíceis

Problema NP-difícil

Um problema Q é NP-difícil se todo outro problema de NP se reduz polinomialmente a Q.

Problema NP-completo

Um problema Q é NP-completo se $Q \in$ NP e Q é NP-difícil.

Problemas NP-completos

E como mostrar que um problema é NP-completo?

Problemas NP-completos

E como mostrar que um problema é NP-completo?

Primeiro mostramos que o problema está em NP.

Problemas NP-completos

E como mostrar que um problema é NP-completo?

Primeiro mostramos que o problema está em NP.

Depois enumeramos todos os problemas de NP e fazemos uma redução polinomial de cada um deles para o nosso problema (mostramos que ele é NP-difícil).

Problemas NP-completos

E como mostrar que um problema é NP-completo?

Primeiro mostramos que o problema está em NP.

Depois enumeramos todos os problemas de NP e fazemos uma redução polinomial de cada um deles para o nosso problema (mostramos que ele é NP-difícil).

Mas a operação de redução pode ser composta!

Problemas NP-completos

E como mostrar que um problema é NP-completo?

Problemas NP-completos

E como mostrar que um problema é NP-completo?

Primeiro mostramos que o problema está em NP.

Problemas NP-completos

E como mostrar que um problema é NP-completo?

Primeiro mostramos que o problema está em NP.

Depois encontramos um problema que já é NP-completo e o reduzimos polinomialmente para o nosso.

Problemas NP-completos

- Vimos que MOCHILA está em NP.
- Vimos que SUBSETSUM reduz polinomialmente para MOCHILA.
- Sabemos que SUBSETSUM É NP-completo.
- Portanto, MOCHILA é NP-completo!

Problemas NP-completos

- Vimos que MOCHILA está em NP.
- Vimos que SUBSETSUM reduz polinomialmente para MOCHILA.
- Sabemos (??) que SUBSETSUM É NP-completo.
- Portanto, MOCHILA é NP-completo!

Problemas NP-completos

Mas e o primeiro problema NP-completo?

Problemas NP-completos

Mas e o primeiro problema NP-completo?

PROBLEMA: 3-SAT

Entrada: $\langle \phi \rangle$, onde ϕ é uma fórmula 3-CNF contendo literais de variáveis booleanas $x_1, \ldots, x_n$.

Decisão: Existe uma atribuição de valores a $x_1, \ldots, x_n$ tal que ϕ é satisfatível?

Problemas NP-completos

Mas e o primeiro problema NP-completo?

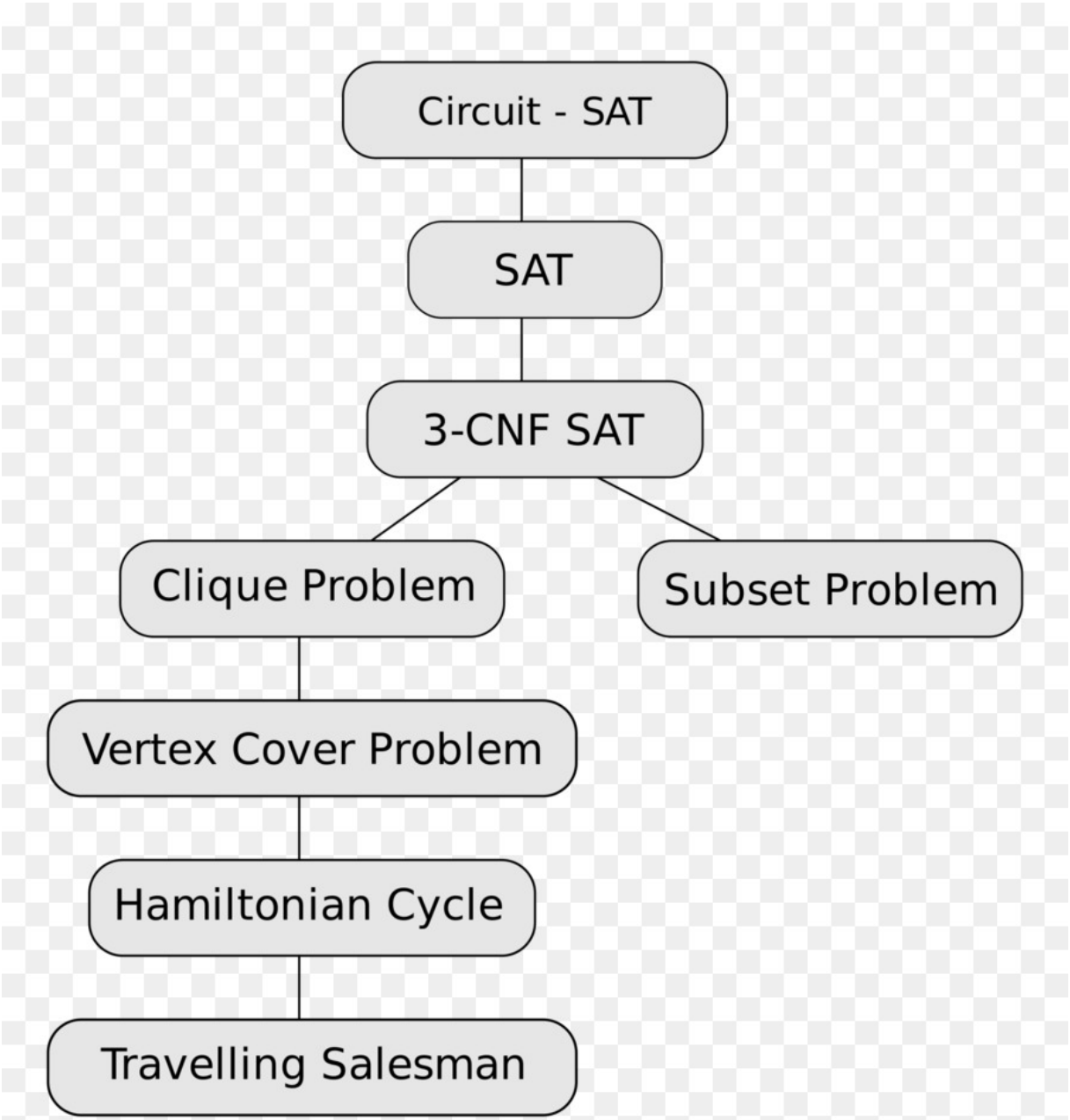
PROBLEMA: 3-SAT

Entrada: $\langle \phi \rangle$, onde ϕ é uma fórmula 3-CNF contendo literais de variáveis booleanas $x_1, \ldots, x_n$.

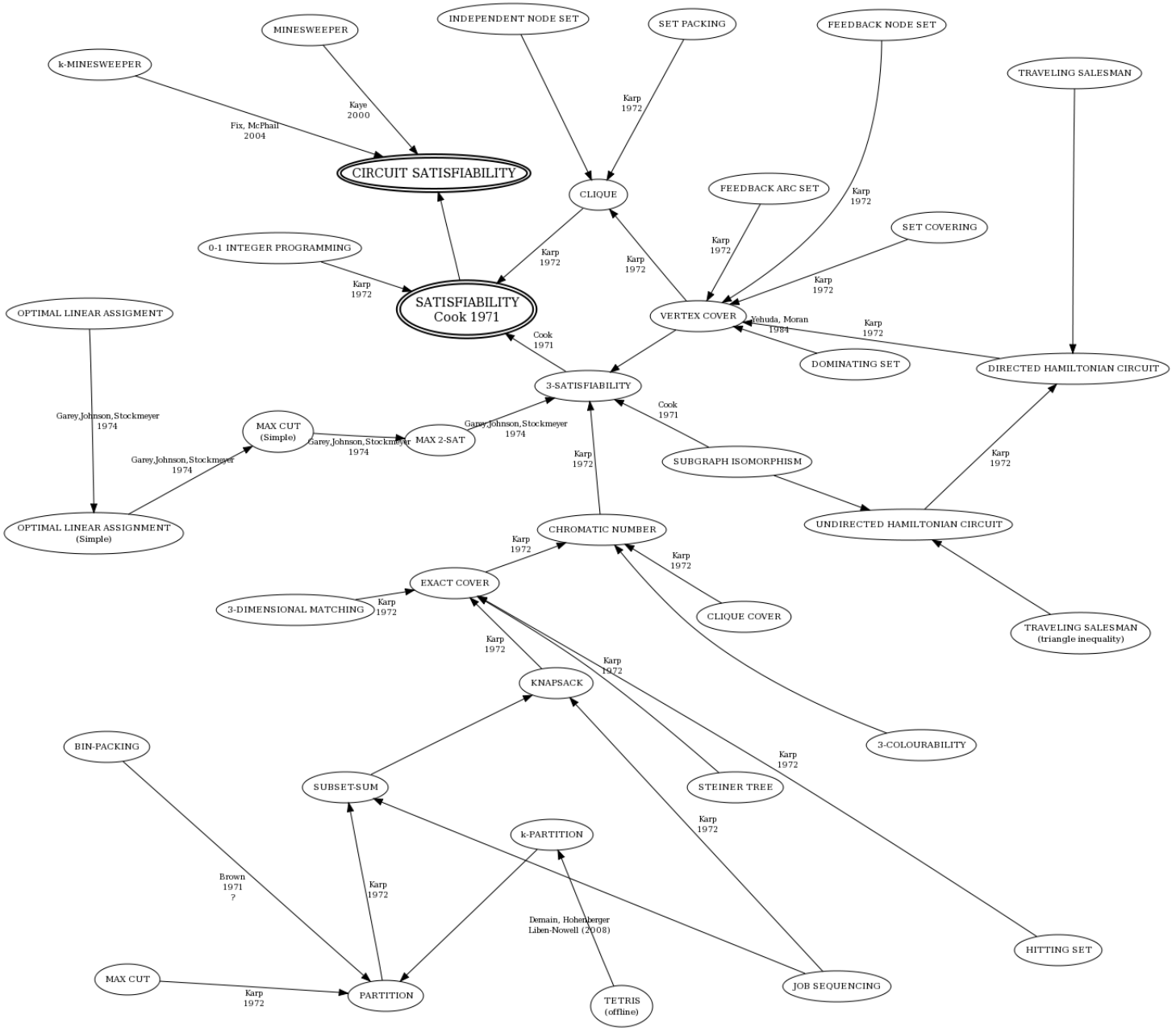
Decisão: Existe uma atribuição de valores a $x_1, \ldots, x_n$ tal que ϕ é satisfatível?

Teorema de Cook-Levin: 3-SAT é NP-completo.

Problemas NP-completos



Problemas NP-completos



Outro problema NP-completo

PROBLEMA: CLIQUE

Entrada: $\langle G, k \rangle$, onde G é um grafo e k é um inteiro positivo.

Decisão: Existe conjunto $S \subseteq V(G)$ tal que para todo par $u, v \in S$ existe aresta $uv \in E(G)$ e $|S| \geq k$?

Outro problema NP-completo

PROBLEMA: CLIQUE

Entrada: $\langle G, k \rangle$, onde G é um grafo e k é um inteiro positivo.

Decisão: Existe conjunto $S \subseteq V(G)$ tal que para todo par $u, v \in S$ existe aresta $uv \in E(G)$ e $|S| \geq k$?

Teorema

CLIQUE é NP-completo.

Demonstração

Primeiro mostramos que CLIQUE está em NP e depois faremos uma redução polinomial de 3-SAT para CLIQUE.

Outro problema NP-completo

Teorema

CLIQUE é NP-completo.

Demonstração (continuação)

CLIQUE está em NP pois, dados $\langle G, k \rangle$ e um conjunto S qualquer de vértices, é fácil escrever um algoritmo eficiente que verifica se S é uma clique de tamanho pelo menos k: basta verificar se todos os pares de vértices em S formam arestas e contar a quantidade de vértices em S.

Outro problema NP-completo

Teorema

CLIQUE é NP-completo.

Demonstração (continuação)

Agora considere uma fórmula 3-CNF ϕ com m cláusulas sobre literais das variáveis $v_1, \ldots, v_n$.

Outro problema NP-completo

Teorema

CLIQUE é NP-completo.

Demonstração (continuação)

Agora considere uma fórmula 3-CNF ϕ com m cláusulas sobre literais das variáveis $v_1, \ldots, v_n$.

Vamos construir um grafo G com $3m$ vértices: para cada cláusula, temos 3 vértices representando seus literais.

Outro problema NP-completo

Teorema

CLIQUE é NP-completo.

Demonstração (continuação)

Agora considere uma fórmula 3-CNF ϕ com m cláusulas sobre literais das variáveis $v_1, \ldots, v_n$.

Vamos construir um grafo G com $3m$ vértices: para cada cláusula, temos 3 vértices representando seus literais.

Haverá aresta entre dois vértices v e w se e somente se os literais representados por eles estiverem em cláusulas diferentes, v corresponde a um literal x e w não corresponde ao literal $\bar{x}$.

Outro problema NP-completo

Teorema

CLIQUE é NP-completo.

Demonstração (continuação)

Agora considere uma fórmula 3-CNF ϕ com m cláusulas sobre literais das variáveis $v_1, \ldots, v_n$.

Vamos construir um grafo G com $3m$ vértices: para cada cláusula, temos 3 vértices representando seus literais.

Haverá aresta entre dois vértices v e w se e somente se os literais representados por eles estiverem em cláusulas diferentes, v corresponde a um literal x e w não corresponde ao literal $\bar{x}$.

Por fim, tome $k = m$.

Outro problema NP-completo

Teorema

CLIQUE é NP-completo.

Demonstração (continuação)

Agora considere uma fórmula 3-CNF ϕ com m cláusulas sobre literais das variáveis $v_1, \ldots, v_n$.

Vamos construir um grafo G com $3m$ vértices: para cada cláusula, temos 3 vértices representando seus literais.

Haverá aresta entre dois vértices v e w se e somente se os literais representados por eles estiverem em cláusulas diferentes, v corresponde a um literal x e w não corresponde ao literal $\bar{x}$.

Por fim, tome $k = m$.

Temos então uma instância $\langle G, k \rangle$ para CLIQUE gerada em tempo polinomial. Resta verificar se ϕ é satisfatível se e somente se G contém uma clique com $\geq k = m$ vértices.

Outro problema NP-completo

Teorema

CLIQUE é NP-completo.

Demonstração (continuação)

Suponha que ϕ é satisfatível.

Outro problema NP-completo

Teorema

CLIQUE é NP-completo.

Demonstração (continuação)

Suponha que ϕ é satisfatível.

Então em cada cláusula, pelo menos um literal tem valor 1.

Outro problema NP-completo

Teorema

CLIQUE é NP-completo.

Demonstração (continuação)

Suponha que ϕ é satisfatível.

Então em cada cláusula, pelo menos um literal tem valor 1.

Como um literal e sua negação não podem ter valor 1, existe uma aresta entre quaisquer dois vértices que representam esses literais em G.

Outro problema NP-completo

Teorema

CLIQUE é NP-completo.

Demonstração (continuação)

Suponha que ϕ é satisfatível.

Então em cada cláusula, pelo menos um literal tem valor 1.

Como um literal e sua negação não podem ter valor 1, existe uma aresta entre quaisquer dois vértices que representam esses literais em G.

Então eles formam uma clique em G com pelo menos $m = k$ vértices.

Outro problema NP-completo

Teorema

CLIQUE é NP-completo.

Demonstração (continuação)

Agora suponha que existe conjunto $S \subseteq V(G)$ que é clique e $|S| \geq k$.

Outro problema NP-completo

Teorema

CLIQUE é NP-completo.

Demonstração (continuação)

Agora suponha que existe conjunto $S \subseteq V(G)$ que é clique e $|S| \geq k$.

Então existe uma aresta entre quaisquer dois vértices de S.

Outro problema NP-completo

Teorema

CLIQUE é NP-completo.

Demonstração (continuação)

Agora suponha que existe conjunto $S \subseteq V(G)$ que é clique e $|S| \geq k$.

Então existe uma aresta entre quaisquer dois vértices de S.

Então esses dois não representam literais que são a negação um do outro e eles estão em cláusulas diferentes.

Outro problema NP-completo

Teorema

CLIQUE é NP-completo.

Demonstração (continuação)

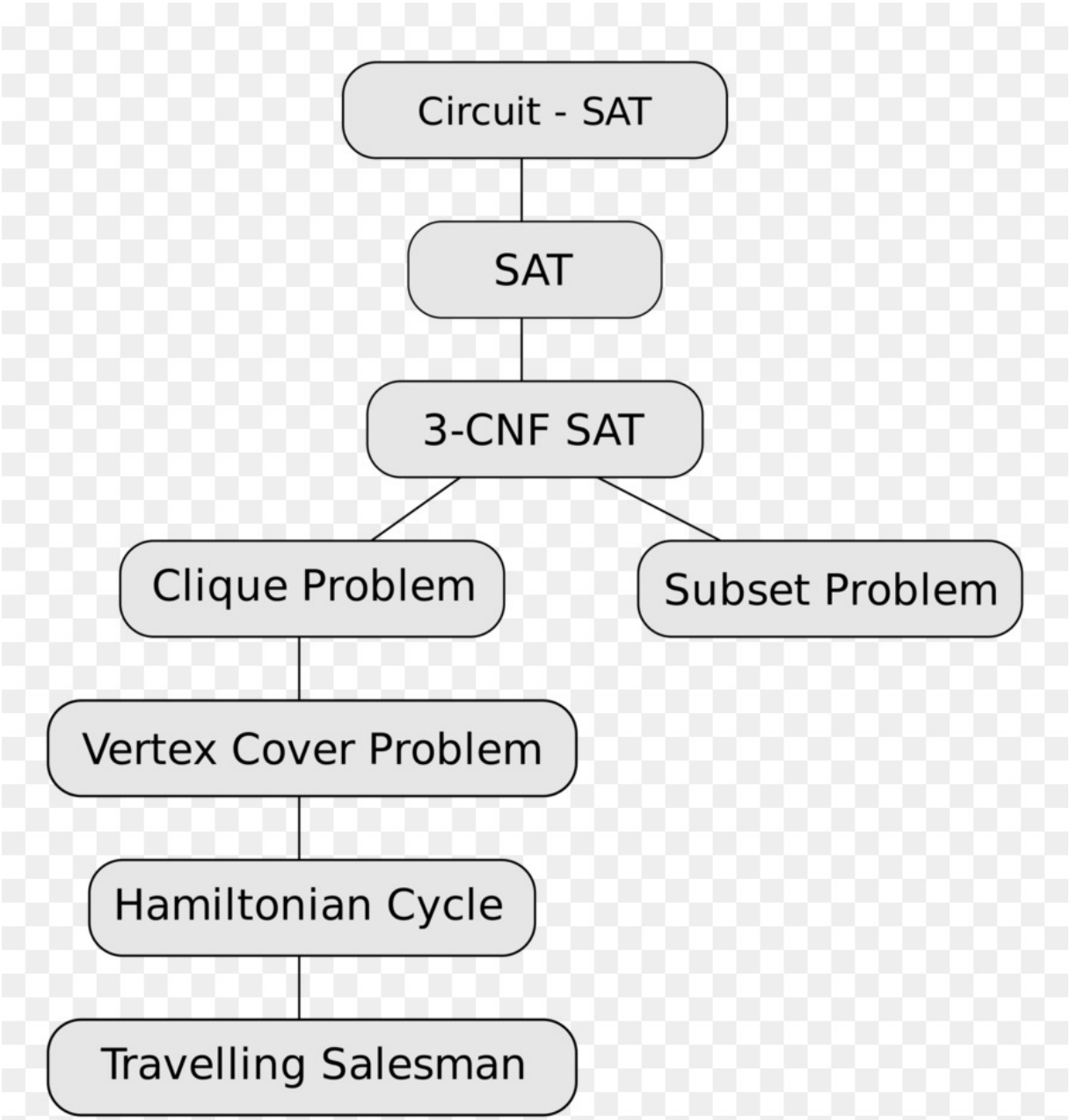
Agora suponha que existe conjunto $S \subseteq V(G)$ que é clique e $|S| \geq k$.

Então existe uma aresta entre quaisquer dois vértices de S.

Então esses dois não representam literais que são a negação um do outro e eles estão em cláusulas diferentes.

Então dar valor 1 aos literais representados pelos vértices de S satisfaz ϕ.

Classe NP-completo



Outro problema NP-completo

Problema: VERTEXCOVER

Entrada: $\langle G, k \rangle$, onde G é um grafo e k é um inteiro.

Decisão: Existe conjunto $S \subseteq V(G)$ tal que toda aresta $uv \in E(G)$ tem $u \in S$ ou $v \in S$ e $|S| \leq k$?

Outro problema NP-completo

PROBLEMA: VERTEXCOVER

Entrada: $\langle G, k \rangle$, onde G é um grafo e k é um inteiro.

Decisão: Existe conjunto $S \subseteq V(G)$ tal que toda aresta $uv \in E(G)$ tem $u \in S$ ou $v \in S$ e $|S| \leq k$?

Teorema

VERTEXCOVER é NP-completo.

Demonstração

Primeiro mostramos que VERTEXCOVER está em NP e depois faremos uma redução polinomial de CLIQUE para VERTEXCOVER.

Outro problema NP-completo

Teorema

VERTEXCOVER é NP-completo.

Demonstração (continuação)

VERTEXCOVER está em NP pois, dados $\langle G, k \rangle$ e um conjunto S qualquer de vértices, é fácil escrever um algoritmo eficiente que verifica se S é uma cobertura por vértices das arestas de G que tem tamanho no máximo k: basta verificar se todas as arestas de G tem algum extremo em S e contar a quantidade de vértices em S.

Outro problema NP-completo

Teorema

VERTEXCOVER é NP-completo.

Demonstração (continuação)

Agora considere um grafo G e um valor k inteiro, instância para CLIQUE.

Outro problema NP-completo

Teorema

VERTEXCOVER é NP-completo.

Demonstração (continuação)

Agora considere um grafo G e um valor k inteiro, instância para CLIQUE.

O grafo complemento de G é o grafo $\overline{G}$, em que $V(\overline{G}) = V(G)$ e $E(\overline{G}) = \{uv\colon uv \notin E(G)\}$.

Outro problema NP-completo

Teorema

VERTEXCOVER é NP-completo.

Demonstração (continuação)

Agora considere um grafo G e um valor k inteiro, instância para CLIQUE.

O grafo complemento de G é o grafo $\overline{G}$, em que $V(\overline{G}) = V(G)$ e $E(\overline{G}) = \{uv\colon uv \notin E(G)\}$.

Tomando $t = |V(G)| - k$, temos então uma instância $\langle \overline{G}, t \rangle$ para VERTEXCOVER construída em tempo polinomial. Resta verificar se G contém uma clique de tamanho pelo menos k se e somente se $\overline{G}$ contém uma cobertura por vértices de tamanho no máximo $t = |V(G)| - k$.

Outro problema NP-completo

Teorema

VERTEXCOVER é NP-completo.

Demonstração (continuação)

Suponha que G contém uma clique S de tamanho pelo menos k.

Outro problema NP-completo

Teorema

VERTEXCOVER é NP-completo.

Demonstração (continuação)

Suponha que G contém uma clique S de tamanho pelo menos k. Isso significa que para todo par $u, v \in S$ temos $uv \in E(G)$, o que implica em $uv \notin E(\overline{G})$.

Outro problema NP-completo

Teorema

VERTEXCOVER é NP-completo.

Demonstração (continuação)

Suponha que G contém uma clique S de tamanho pelo menos k.
Isso significa que para todo par $u, v \in S$ temos $uv \in E(G)$, o que implica em $uv \notin E(\overline{G})$.
Então para toda aresta $xy \in E(\overline{G})$, devemos ter que $x \notin S$ ou $y \notin S$.

Outro problema NP-completo

Teorema

VERTEXCOVER é NP-completo.

Demonstração (continuação)

Suponha que G contém uma clique S de tamanho pelo menos k.
Isso significa que para todo par $u, v \in S$ temos $uv \in E(G)$, o que implica em $uv \notin E(\overline{G})$.
Então para toda aresta $xy \in E(\overline{G})$, devemos ter que $x \notin S$ ou $y \notin S$.
Logo, $V(G) \setminus S$ é uma cobertura por vértices de $\overline{G}$.

Outro problema NP-completo

Teorema

VERTEXCOVER é NP-completo.

Demonstração (continuação)

Suponha que G contém uma clique S de tamanho pelo menos k.

Isso significa que para todo par $u, v \in S$ temos $uv \in E(G)$, o que implica em $uv \notin E(\overline{G})$.

Então para toda aresta $xy \in E(\overline{G})$, devemos ter que $x \notin S$ ou $y \notin S$.

Logo, $V(G) \setminus S$ é uma cobertura por vértices de $\overline{G}$.

Como $|S| \geq k$, temos $|V(G) \setminus S| = |V(G)| - |S| \leq |V(G)| - k = t$.

Outro problema NP-completo

Teorema

VERTEXCOVER é NP-completo.

Demonstração (continuação)

Agora suponha que $\overline{G}$ contém uma cobertura por vértices S de tamanho no máximo t.

Outro problema NP-completo

Teorema

VERTEXCOVER é NP-completo.

Demonstração (continuação)

Agora suponha que $\overline{G}$ contém uma cobertura por vértices S de tamanho no máximo t.

Isso significa que para toda aresta $uv \in E(\overline{G})$, temos $u \in S$ ou $v \in S$.

Outro problema NP-completo

Teorema

VERTEXCOVER é NP-completo.

Demonstração (continuação)

Agora suponha que $\overline{G}$ contém uma cobertura por vértices S de tamanho no máximo t.

Isso significa que para toda aresta $uv \in E(\overline{G})$, temos $u \in S$ ou $v \in S$.

De forma equivalente, para qualquer par de vértices x, y tais que $x \notin S$ e $y \notin S$, devemos ter $xy \notin E(\overline{G})$, o que implica em $xy \in E(G)$.

Outro problema NP-completo

Teorema

VERTEXCOVER é NP-completo.

Demonstração (continuação)

Agora suponha que $\overline{G}$ contém uma cobertura por vértices S de tamanho no máximo t.

Isso significa que para toda aresta $uv \in E(\overline{G})$, temos $u \in S$ ou $v \in S$.

De forma equivalente, para qualquer par de vértices x, y tais que $x \notin S$ e $y \notin S$, devemos ter $xy \notin E(\overline{G})$, o que implica em $xy \in E(G)$.

Logo, $V(G) \setminus S$ é uma clique em G.

Outro problema NP-completo

Teorema

VERTEXCOVER é NP-completo.

Demonstração (continuação)

Agora suponha que $\overline{G}$ contém uma cobertura por vértices S de tamanho no máximo t.

Isso significa que para toda aresta $uv \in E(\overline{G})$, temos $u \in S$ ou $v \in S$.

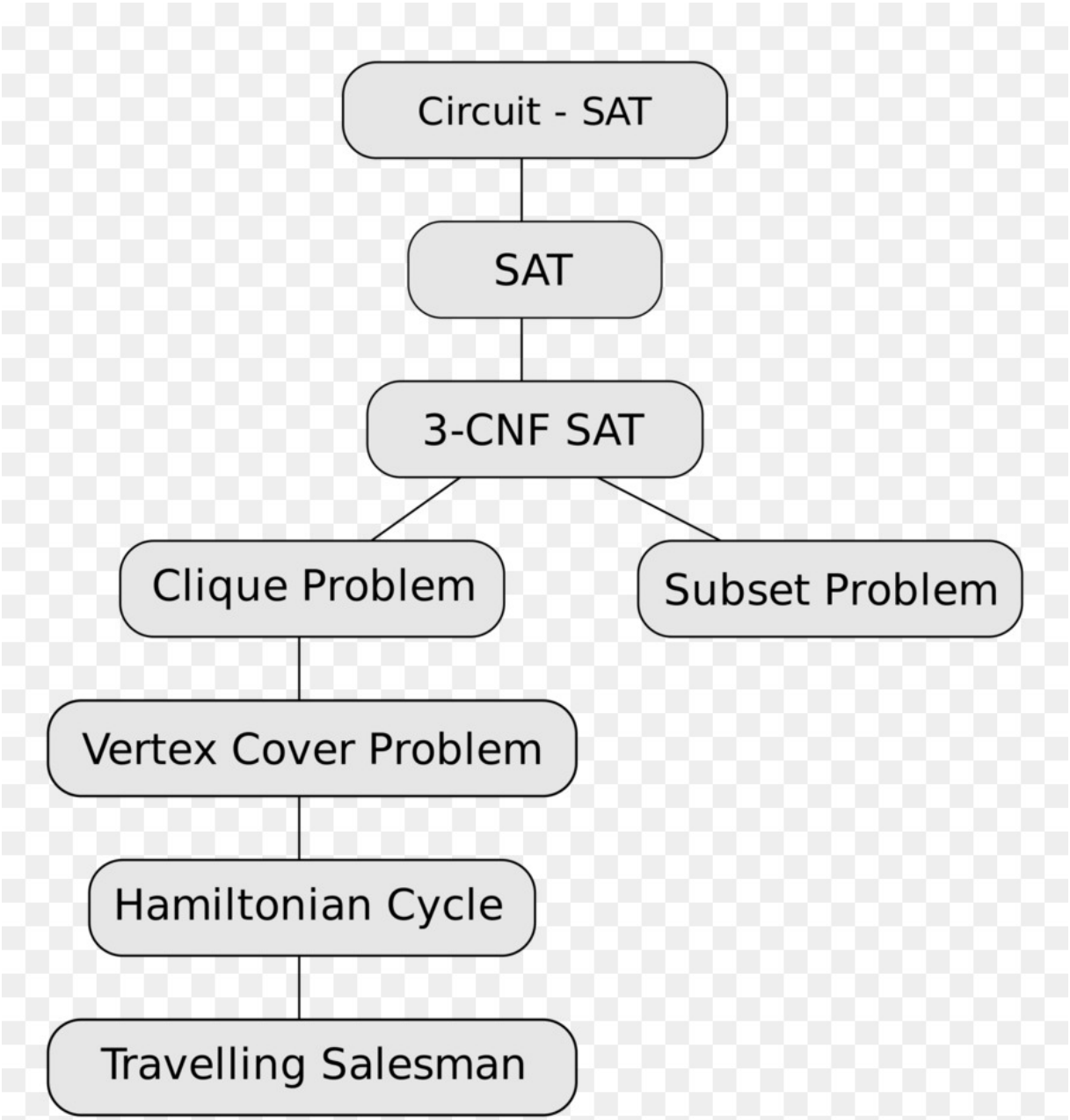
De forma equivalente, para qualquer par de vértices x, y tais que $x \notin S$ e $y \notin S$, devemos ter $xy \notin E(\overline{G})$, o que implica em $xy \in E(G)$.

Logo, $V(G) \setminus S$ é uma clique em G.

Como $S \leq t = |V(G)| - k$, temos

$|V(G) \setminus S| = |V(G)| - |S| \geq |V(G)| - (|V(G)| - k) = k$.

Classe NP-completo



Outro problema NP-completo

Problema: CICLOHAMILT

Entrada: $\langle D \rangle$, onde D é um digrafo.

Decisão: existe ciclo hamiltoniano em D?

Outro problema NP-completo

PROBLEMA: CICLOHAMILT

Entrada: $\langle D \rangle$, onde D é um digrafo.

Decisão: existe ciclo hamiltoniano em D?

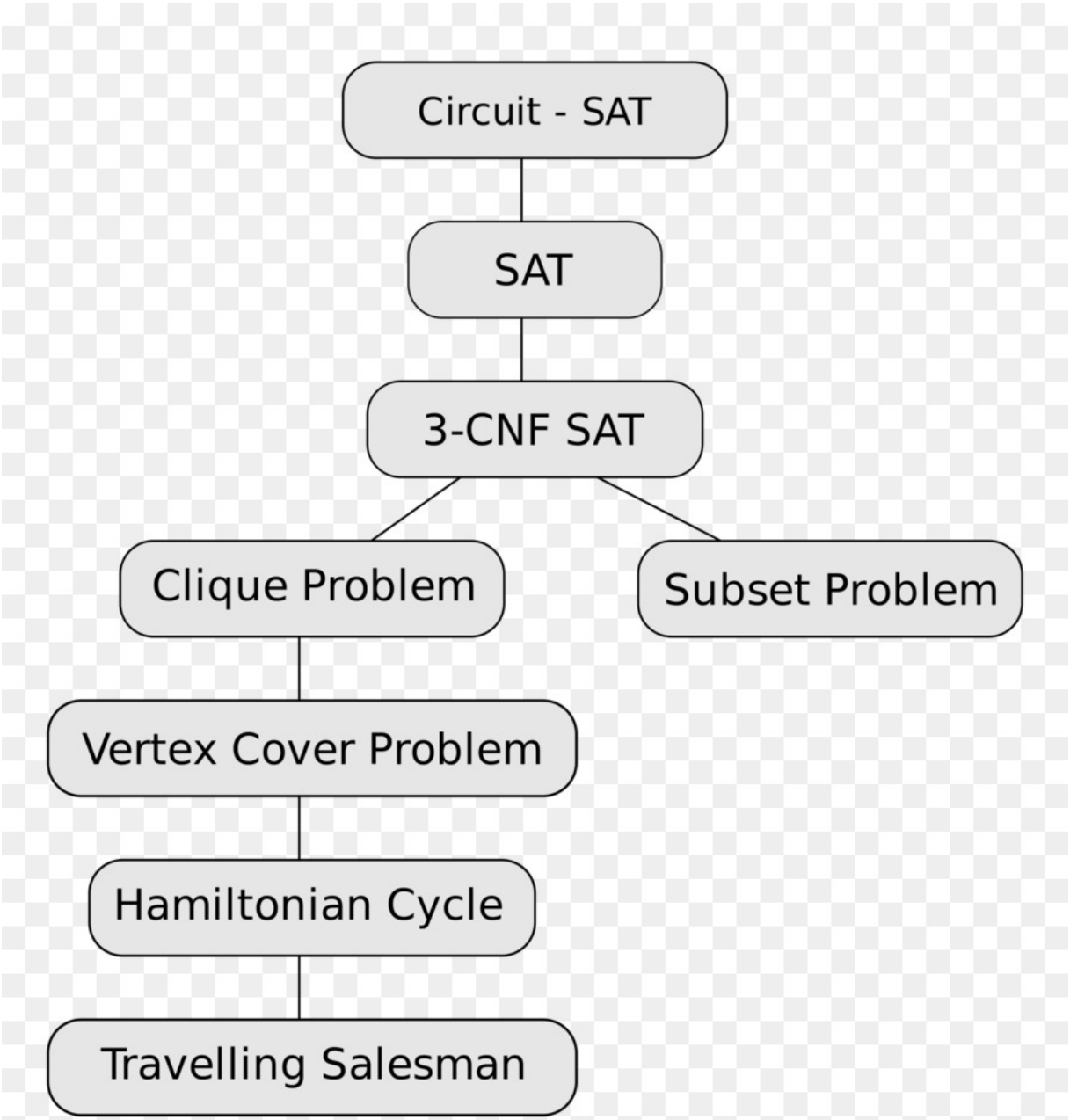
Teorema

CICLOHAMILT é NP-completo.

Demonstração

Primeiro mostramos que CICLOHAMILT está em NP e depois faremos uma redução polinomial de VERTEXCOVER para CICLOHAMILT.

Classe NP-completo



Outro problema NP-completo

PROBLEMA: TSP

Entrada: $\langle D, w, k \rangle$, onde D é um digrafo, w: $E(D) \to \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$.

Decisão: existe ciclo hamiltoniano em D com peso $\leq k$?

Outro problema NP-completo

PROBLEMA: TSP

Entrada: $\langle D, w, k \rangle$, onde D é um digrafo, w: $E(D) \to \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$.

Decisão: existe ciclo hamiltoniano em D com peso $\leq k$?

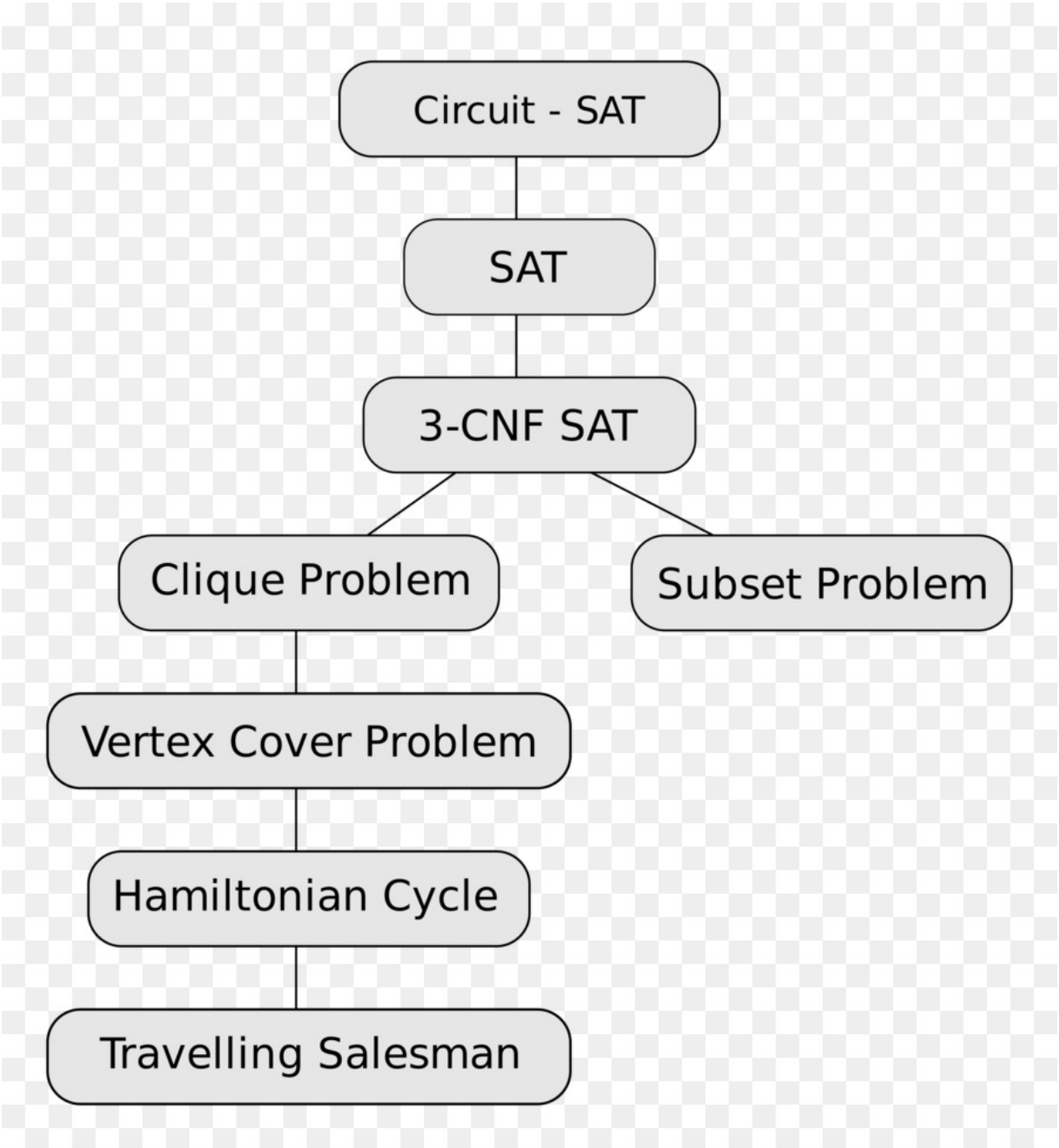
Teorema

TSP é NP-completo.

Demonstração

Primeiro mostramos que TSP está em NP e depois faremos uma redução polinomial de CICLOHAMILT para TSP.

Classe NP-completo



Outro problema NP-completo

Problema: CAMINHOHAMILT

Entrada: $\langle D \rangle$, onde D é um digrafo.

Decisão: existe caminho hamiltoniano em D?

Outro problema NP-completo

PROBLEMA: CAMINHOHAMILT

Entrada: $\langle D \rangle$, onde D é um digrafo.

Decisão: existe caminho hamiltoniano em D?

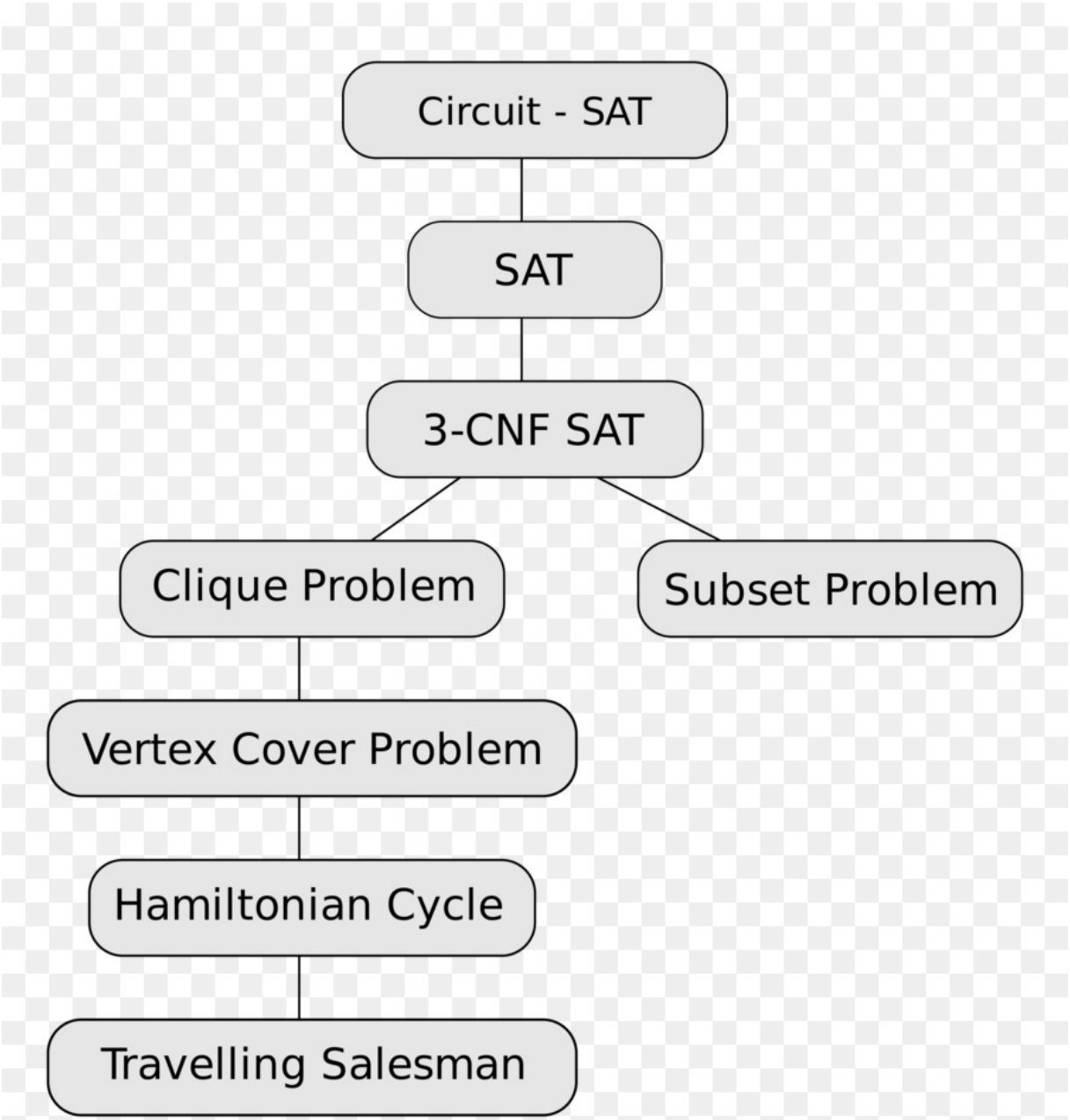
Teorema

CAMINHOHAMILT é NP-completo.

Demonstração

Primeiro mostramos que CAMINHOHAMILT está em NP e depois faremos uma redução polinomial de CICLOHAMILT para CAMINHOHAMILT.

Classe NP-completo



Outro problema NP-completo

Problema: CAMINHOLONGO

Entrada: $\langle D, k \rangle$, onde D é um digrafo e k é um inteiro positivo.

Decisão: existe caminho em D com número de arcos $\geq k$?

Outro problema NP-completo

PROBLEMA: CAMINHOLONGO

Entrada: $\langle D, k \rangle$, onde D é um digrafo e k é um inteiro positivo.

Decisão: existe caminho em D com número de arcos $\geq k$?

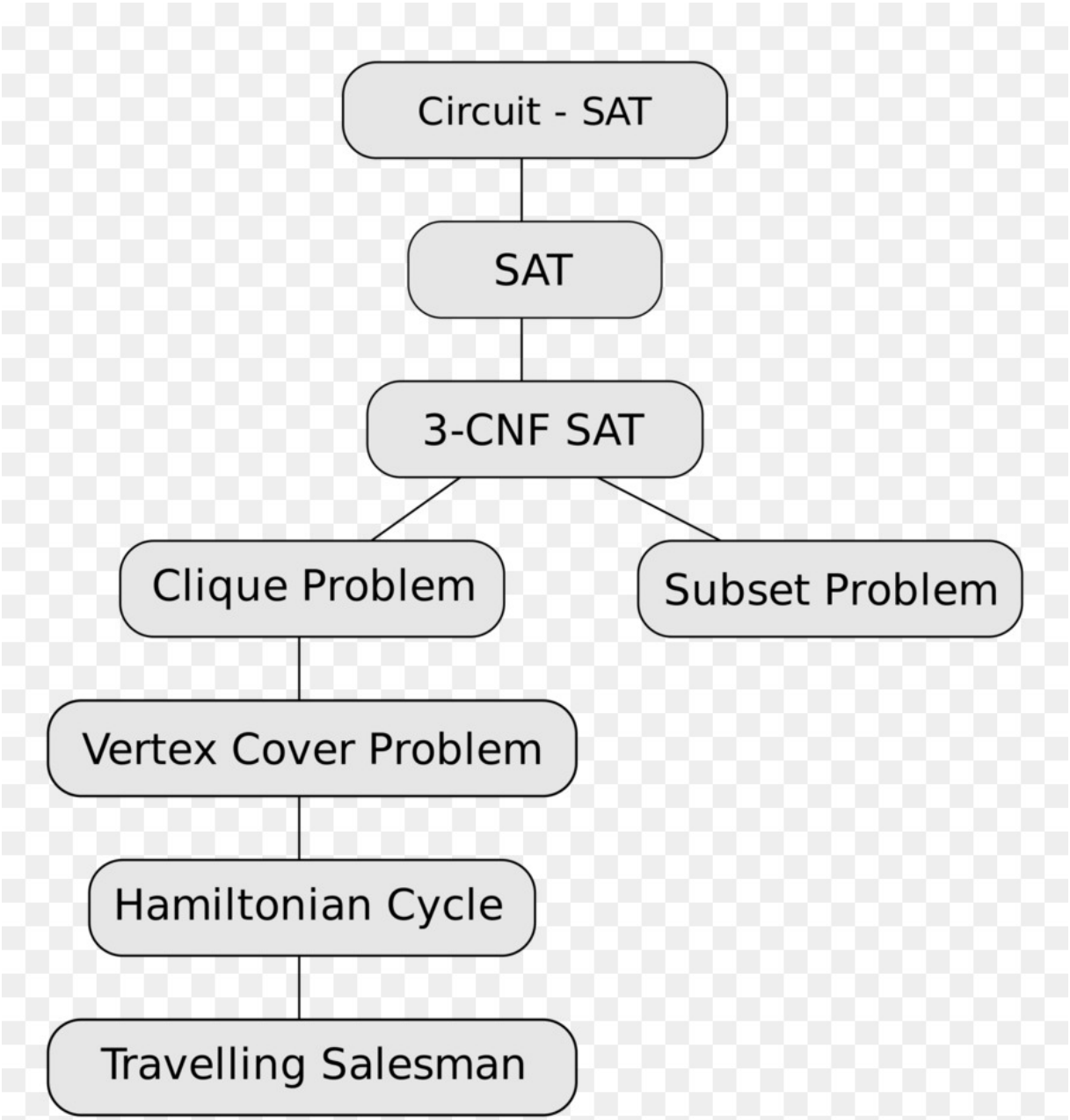
Teorema

CAMINHOLONGO é NP-completo.

Demonstração

Primeiro mostramos que CAMINHOLONGO está em NP e depois faremos uma redução polinomial de CAMINHOHAMILT para CAMINHOLONGO.

Classe NP-completo



Lembrete

Dizer que um problema está em NP não é argumento para sua intratabilidade.

Dizer que ele é NP-completo/NP-difícil, sim.

Usando NP-completude para provar outras coisas

Inexistência de algoritmos

Teorema

Não existe algoritmo eficiente que resolva o problema CAMINHOTODOPAR sobre $\langle D, w\rangle$ quando há ciclo negativo em D, a menos que $P = NP$.

Demonstração

Primeiro note que há uma redução polinomial de CAMINHOLONGOOPT para CAMINHOTODOPAR.
Seja $\langle D\rangle$ uma instância para CAMINHOLONGOOPT.
Faça $w(e) = -1$ para todo arco $e \in E(D)$.
Note que $\langle D, w\rangle$ é instância para CAMINHOTODOPAR.
Se P é o caminho de maior comprimento em D, então os vértices extremos de P têm a menor distância considerando a função w.
Da mesma forma, se u, v são pares de vértices com a menor distância considerando a função w, então um uv-caminho mínimo é um caminho de maior comprimento em D.

Inexistência de algoritmos

Teorema

Não existe algoritmo eficiente que resolva o problema CAMINHOTODOPAR sobre $\langle D, w \rangle$ quando há ciclo negativo em D, a menos que $P = NP$.

Demonstração (continuação)

Se D não tem ciclos, então encontrar o caminho mais longo em D pode ser feito em tempo polinomial. Logo, considere que D tem ciclos.
Suponha agora que existe um algoritmo eficiente ALG que é capaz de resolver o problema CAMINHOTODOPAR sobre qualquer digrafo que possua ciclos negativos.
Em particular, $ALG(D, w)$ encontrará um par x, y de vértices cuja distância é a menor dentre as distâncias de todos os pares de vértices de D.
Com isso, podemos usar ALG para resolver o problema CAMINHOLONGOOPT, que é NP-difícil.

Abordagens para problemas NP-difíceis

Abordagens

Se P $\neq$ NP, não temos esperança de ter algoritmos para problemas NP-difíceis que, simultaneamente,

1. encontrem soluções ótimas
2. em tempo polinomial
3. para qualquer entrada.

Abordagens

Se P $\neq$ NP, não temos esperança de ter algoritmos para problemas NP-difíceis que, simultaneamente,

1. encontrem soluções ótimas
2. em tempo polinomial
3. para qualquer entrada.

Então basta não exigir essas três coisas!

Abordagem por algoritmos exatos

Algoritmos exatos

Procuram pela solução ótima, abrindo mão de fazer isso em tempo polinomial para qualquer entrada.

Consideram técnicas como

- programação dinâmica,
- *branch and bound*,
- programação linear / programação linear inteira.

Branch and Bound

Combina enumeração (branch) com poda de soluções não promissoras (bound).

A estratégia é percorrer uma árvore de enumeração e sempre que chegarmos a um ramo que não é promissor ou é inviável, podá-lo sem percorrê-lo.

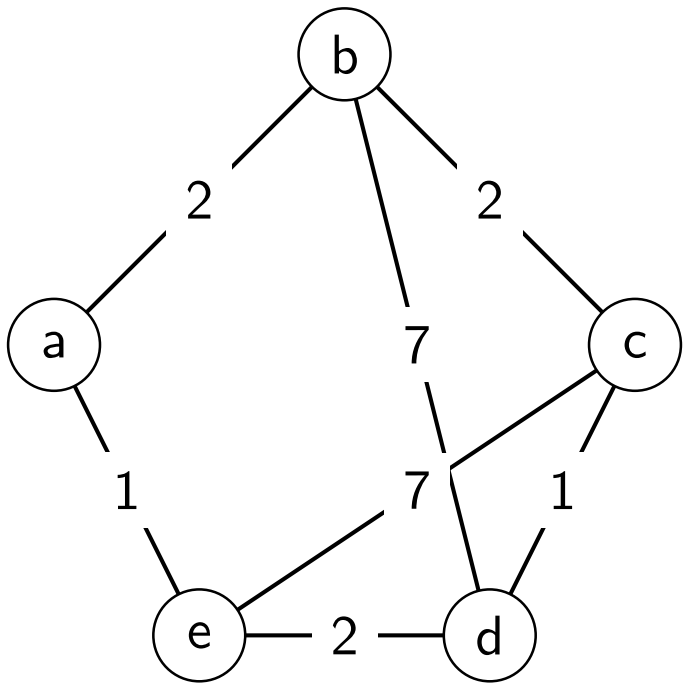
Branch and Bound para o TSP

Ideia: vamos enumerar todas as sequências de vértices possíveis sendo que cada nó da árvore de enumeração vai representar um vértice do grafo e cada ramificação na árvore vai representar uma aresta do grafo que foi percorrida.

Branch and Bound para o TSP

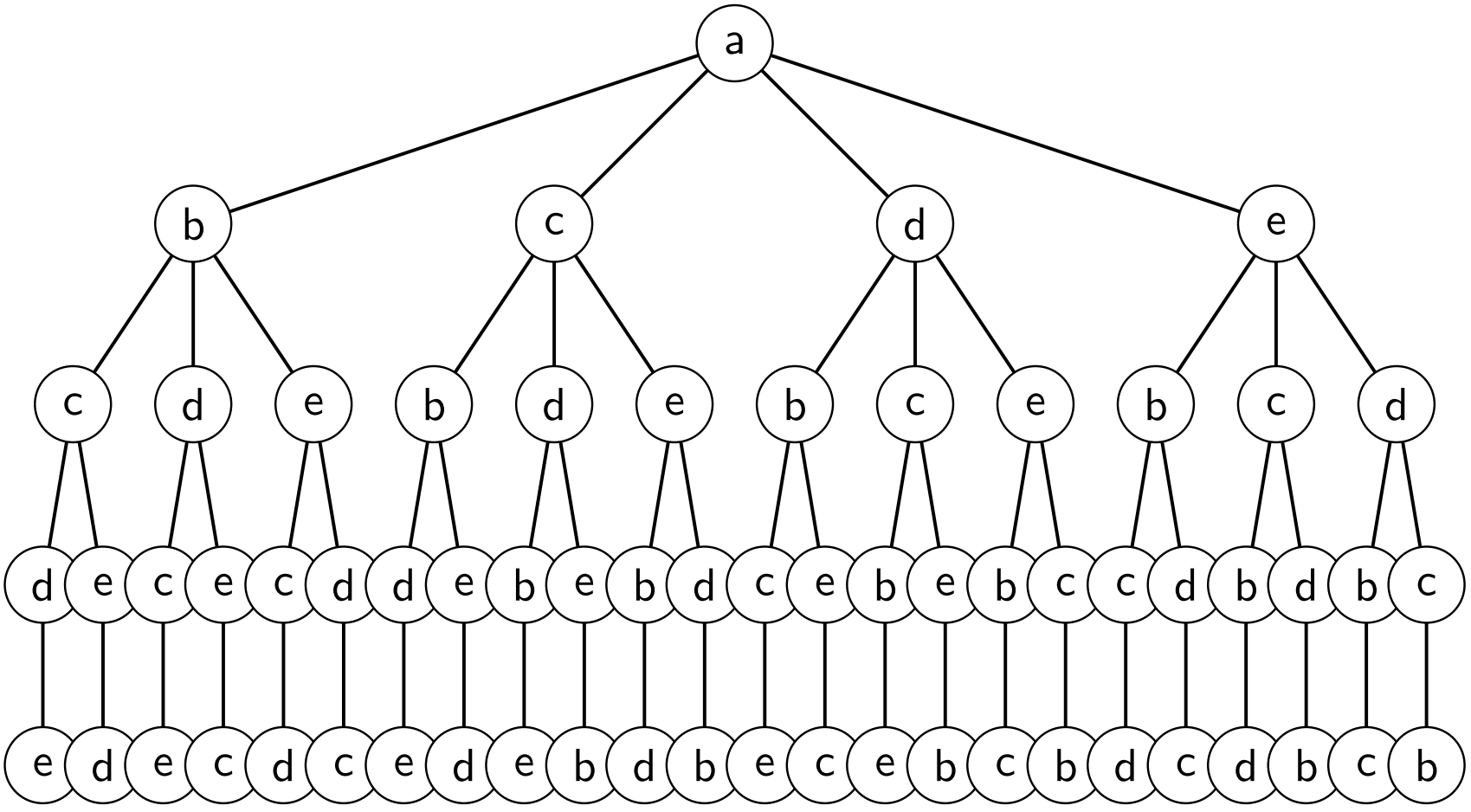
Ideia: vamos enumerar todas as sequências de vértices possíveis sendo que cada nó da árvore de enumeração vai representar um vértice do grafo e cada ramificação na árvore vai representar uma aresta do grafo que foi percorrida.

Considere o seguinte grafo:



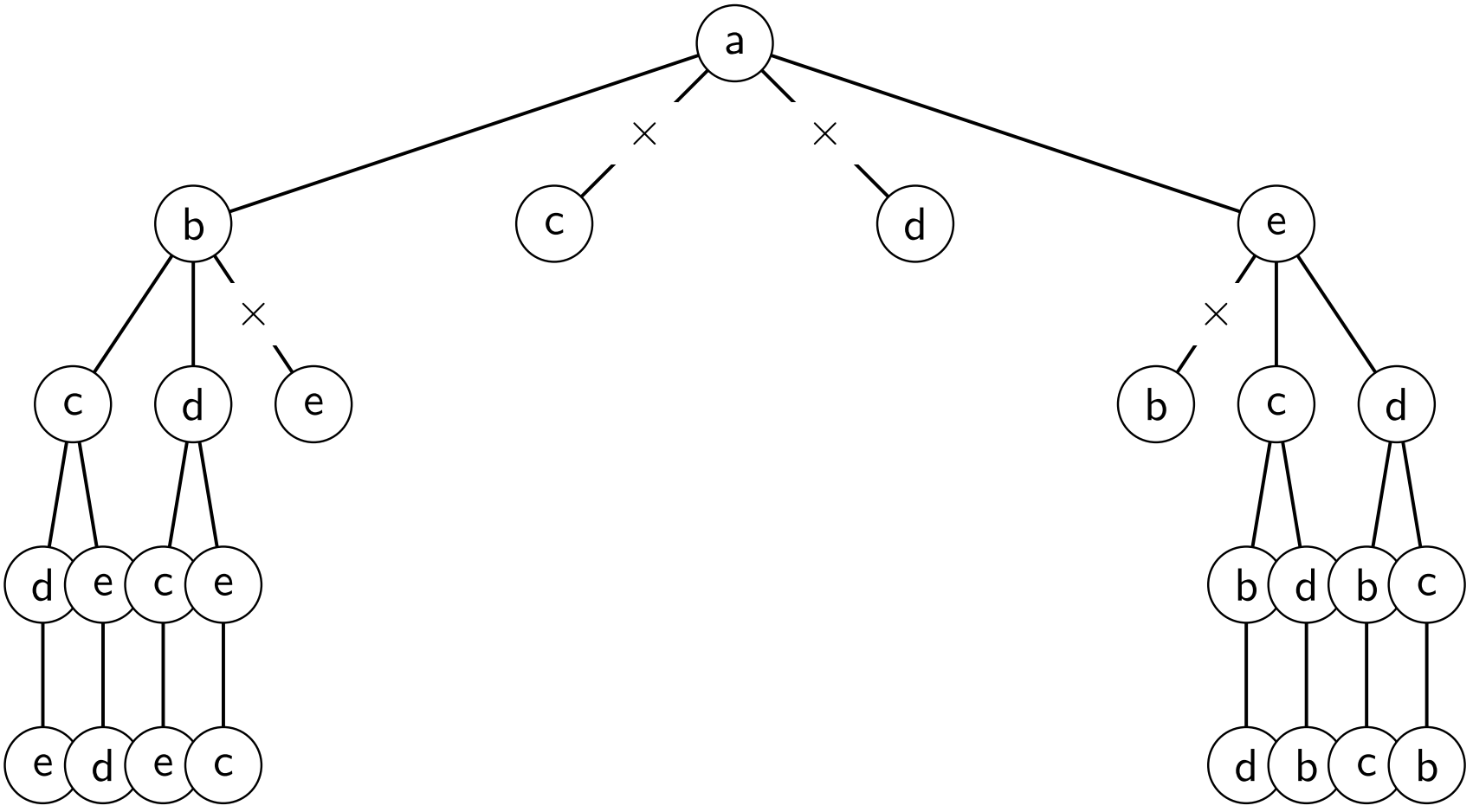
Branch and Bound para o TSP

Árvore com todas as sequências possíveis de vértices:



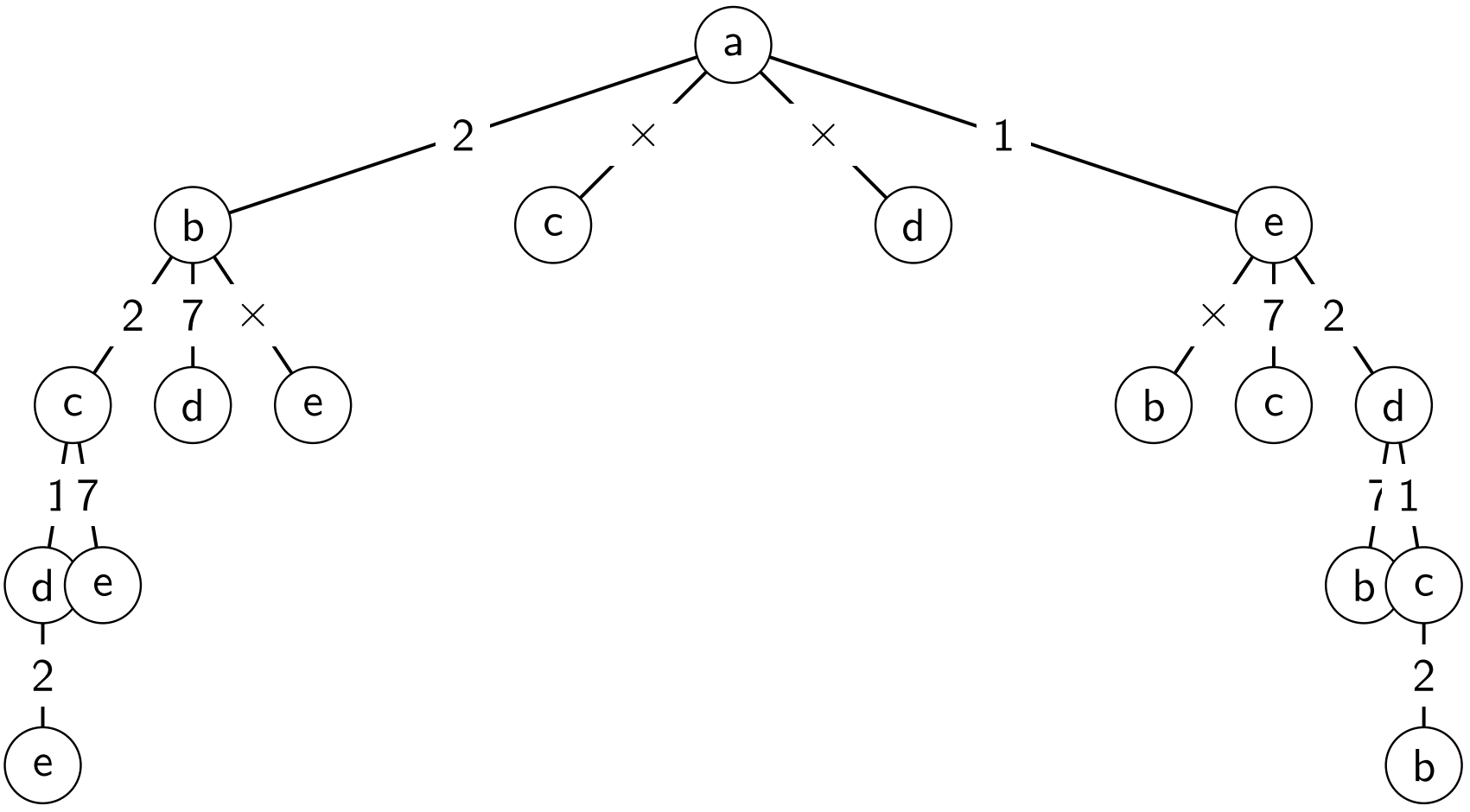
Branch and Bound para o TSP

Árvore podada por soluções inviáveis:



Branch and Bound para o TSP

Árvore podada por soluções não promissoras:



Programação Linear

Modelo matemático que descreve problemas de otimização.

Programação Linear

Modelo matemático que descreve problemas de otimização.

Um programa linear possui um conjunto de variáveis de decisão, um conjunto de restrições e uma função objetivo.

Programação Linear

Modelo matemático que descreve problemas de otimização.

Um programa linear possui um conjunto de variáveis de decisão, um conjunto de restrições e uma função objetivo.

Cada restrição corresponde a uma equação linear sobre as variáveis de decisão.

Programação Linear

Modelo matemático que descreve problemas de otimização.

Um programa linear possui um conjunto de variáveis de decisão, um conjunto de restrições e uma função objetivo.

Cada restrição corresponde a uma equação linear sobre as variáveis de decisão.

Dizemos que uma atribuição de valores para as variáveis de decisão é uma solução viável se todas as restrições são satisfeitas.

A forma padrão de um programa linear para um problema de minimização que tem n variáveis e m restrições é

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{sujeito a} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\} \\ & x_j \geq 0 \qquad\qquad\quad \forall j \in \{1, \ldots, n\} \end{aligned}$$

onde a_{ij}, b_i e c_j são constantes, x_j são as variáveis de decisão, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$ é uma restrição e $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ é a função objetivo.

Formulação PLI da Mochila

Sejam x_i variáveis binárias que indicam se o item i foi escolhido ou não.

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & \sum_{i=1}^{n} v_i x_i \\ \text{sujeito a} \quad & \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W \\ & x_i \in \{0,1\} \qquad \forall i \in \{1,\ldots,n\} \end{aligned}$$

Programação Linear

Programação linear dá solução exata para muitos problemas, mas também é muito utilizada para dar soluções aproximadas.

Programação Linear

Programação linear dá solução exata para muitos problemas, mas também é muito utilizada para dar soluções aproximadas.

Faz parte da abordagem por algoritmos exatos mas também da abordagem por algoritmos de aproximação.

Programação Linear

Programação linear dá solução exata para muitos problemas, mas também é muito utilizada para dar soluções aproximadas.

Faz parte da abordagem por algoritmos exatos mas também da abordagem por algoritmos de aproximação.

Programas lineares podem ser resolvidos em tempo polinomial, mas programas lineares inteiros são problemas NP-difíceis.

Abordagem por heurísticas

Heurísticas

São algoritmos que geram uma solução viável em tempo polinomial mas não dão garantias de qualidade no custo da solução gerada.

Heurísticas

São algoritmos que geram uma solução viável em tempo polinomial mas não dão garantias de qualidade no custo da solução gerada.

Podem ser

- **construtivas**, que normalmente adotam estratégias gulosas para construir as soluções, ou
- **de busca local**, que partem de uma solução inicial e tentam modificá-la, melhorando-a, até atingir algum critério de parada.

Heurística construtiva para a Mochila

Algoritmo 1: ConstroiMochila(n, w, v, W)

1 Ordene e renomeie os itens para que $\frac{v_1}{w_1} \geq \frac{v_2}{w_2} \geq \ldots \geq \frac{v_n}{w_n}$

Heurística construtiva para a Mochila

Algoritmo 2: ConstroiMochila$(n,\ w,\ v,\ W)$

1 Ordene e renomeie os itens para que $\frac{v_1}{w_1} \geq \frac{v_2}{w_2} \geq \ldots \geq \frac{v_n}{w_n}$

2 Seja q um inteiro tal que $\sum_{i=1}^{q} w_i \leq W$ e $\sum_{i=1}^{q+1} w_i > W$

Heurística construtiva para a Mochila

Algoritmo 3: ConstroiMochila(n, w, v, W)

1 Ordene e renomeie os itens para que $\frac{v_1}{w_1} \geq \frac{v_2}{w_2} \geq \ldots \geq \frac{v_n}{w_n}$

2 Seja q um inteiro tal que $\sum_{i=1}^{q} w_i \leq W$ e $\sum_{i=1}^{q+1} w_i > W$

3 **retorna** $v_1 + v_2 + \ldots + v_q$

Heurística construtiva para a Mochila

Algoritmo 4: ConstroiMochila(n, w, v, W)

1 Ordene e renomeie os itens para que $\frac{v_1}{w_1} \geq \frac{v_2}{w_2} \geq \ldots \geq \frac{v_n}{w_n}$

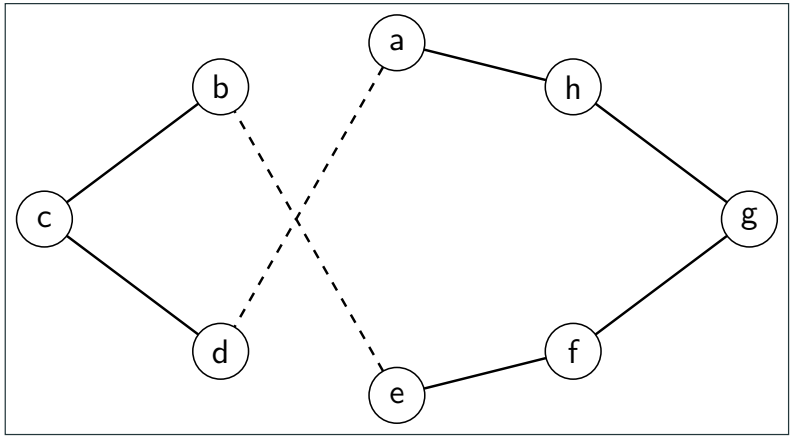
2 Seja q um inteiro tal que $\sum_{i=1}^{q} w_i \leq W$ e $\sum_{i=1}^{q+1} w_i > W$

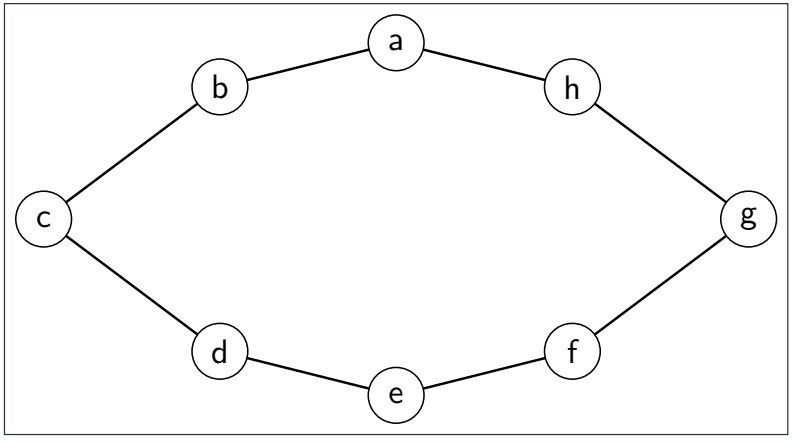
3 **retorna** $v_1 + v_2 + \ldots + v_q$

O que acontece quando temos $n = 2$, $v_1 = 2$, $w_1 = 1$, $v_2 = B$, $w_2 = B$ e $W = B$?

Heurística de busca local para o TSP

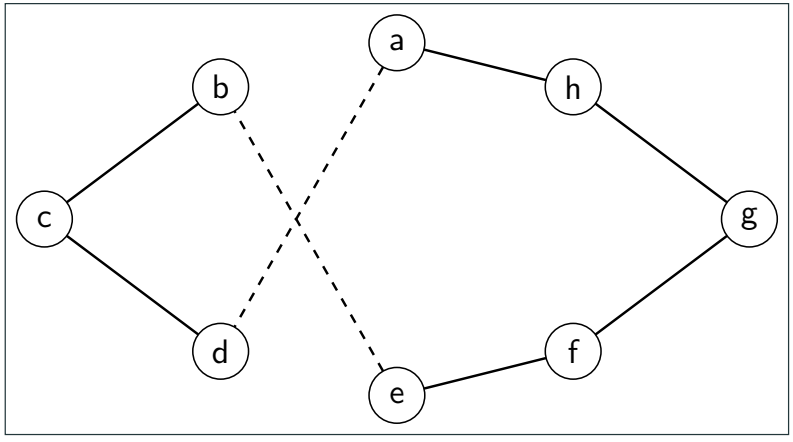
Exemplo de troca 2-OPT:

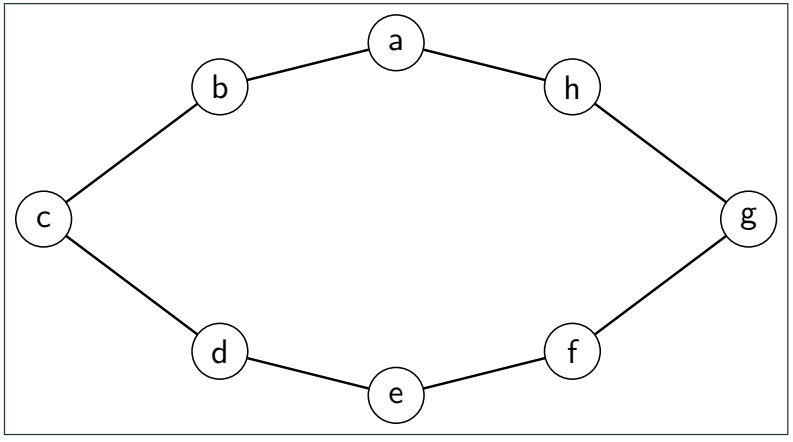




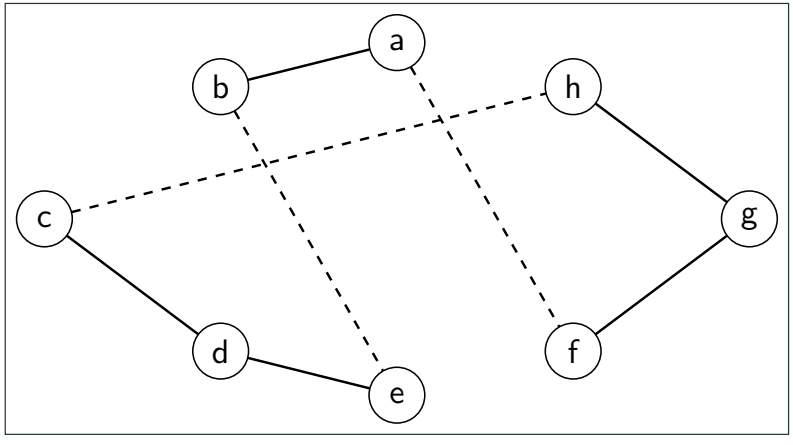
Heurística de busca local para o TSP

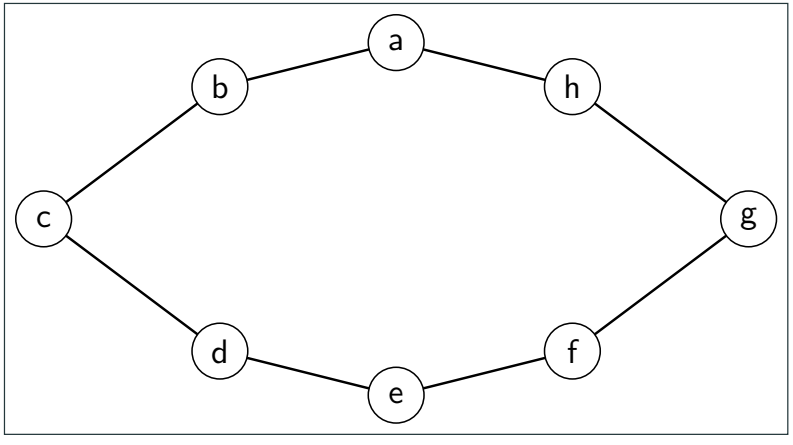
Exemplo de troca 2-OPT:





Exemplo de troca 3-OPT:





Abordagem por algoritmos de aproximação

Algoritmos de aproximação

Geram soluções viáveis em tempo polinomial e dão garantia no custo da solução gerada com relação ao custo da solução ótima.

Algoritmos de aproximação

Geram soluções viáveis em tempo polinomial e dão garantia no custo da solução gerada com relação ao custo da solução ótima.

Seja A um algoritmo para um dado problema que executa em tempo polinomial, $A(I)$ o custo da solução gerada por A para uma entrada I e $OPT(I)$ o custo da solução ótima para uma entrada I.

Um algoritmo A é uma f-aproximação se

- $A(I) \leq f \cdot OPT(I)$ para toda instância I e o problema é de minimização, ou
- $A(I) \geq f \cdot OPT(I)$ para toda instância I e o problema é de maximização.

Algoritmo de aproximação para a Mochila

Algoritmo 5: $\textsc{AproxMochila}(n,\ w,\ v,\ W)$

1 Ordene e renomeie os itens para que $\dfrac{v_1}{w_1} \geq \dfrac{v_2}{w_2} \geq \ldots \geq \dfrac{v_n}{w_n}$

2 Seja q um inteiro tal que $\sum_{i=1}^{q} w_i \leq W$ e $\sum_{i=1}^{q+1} w_i > W$

3 **retorna** $\max\{v_1 + v_2 + \ldots + v_q, v_{q+1}\}$

Algoritmo de aproximação para a Mochila

Algoritmo 6: $\textsc{AproxMochila}(n,\ w,\ v,\ W)$

1 Ordene e renomeie os itens para que $\dfrac{v_1}{w_1} \geq \dfrac{v_2}{w_2} \geq \ldots \geq \dfrac{v_n}{w_n}$

2 Seja q um inteiro tal que $\sum_{i=1}^{q} w_i \leq W$ e $\sum_{i=1}^{q+1} w_i > W$

3 **retorna** $\max\{v_1 + v_2 + \ldots + v_q, v_{q+1}\}$

Análise:

$$\textsc{AproxMochila}(I) \quad = \max\{v_1 + v_2 + \ldots + v_q, v_{q+1}\}$$

Algoritmo de aproximação para a Mochila

Algoritmo 7: ApproxMochila$(n,\ w,\ v,\ W)$

1 Ordene e renomeie os itens para que $\frac{v_1}{w_1} \geq \frac{v_2}{w_2} \geq \ldots \geq \frac{v_n}{w_n}$

2 Seja q um inteiro tal que $\sum_{i=1}^{q} w_i \leq W$ e $\sum_{i=1}^{q+1} w_i > W$

3 **retorna** $\max\{v_1 + v_2 + \ldots + v_q, v_{q+1}\}$

Análise:

$$\begin{aligned} \textsc{ApproxMochila}(I) &= \max\{v_1 + v_2 + \ldots + v_q, v_{q+1}\} \\ &\geq \tfrac{1}{2}(v_1 + \ldots + v_q + v_{q+1}) \end{aligned}$$

Algoritmo de aproximação para a Mochila

Algoritmo 8: ApproxMochila$(n,\ w,\ v,\ W)$

1 Ordene e renomeie os itens para que $\frac{v_1}{w_1} \geq \frac{v_2}{w_2} \geq \ldots \geq \frac{v_n}{w_n}$

2 Seja q um inteiro tal que $\sum_{i=1}^{q} w_i \leq W$ e $\sum_{i=1}^{q+1} w_i > W$

3 **retorna** $\max\{v_1 + v_2 + \ldots + v_q, v_{q+1}\}$

Análise:

$$\begin{aligned} \text{ApproxMochila}(I) &= \max\{v_1 + v_2 + \ldots + v_q, v_{q+1}\} \\ &\geq \tfrac{1}{2}(v_1 + \ldots + v_q + v_{q+1}) \\ &\geq \tfrac{1}{2} OPT_{frac}(I) \end{aligned}$$

Algoritmo de aproximação para a Mochila

Algoritmo 9: $\textsc{AproxMochila}(n,\ w,\ v,\ W)$

1 Ordene e renomeie os itens para que $\frac{v_1}{w_1} \geq \frac{v_2}{w_2} \geq \ldots \geq \frac{v_n}{w_n}$

2 Seja q um inteiro tal que $\sum_{i=1}^{q} w_i \leq W$ e $\sum_{i=1}^{q+1} w_i > W$

3 **retorna** $\max\{v_1 + v_2 + \ldots + v_q, v_{q+1}\}$

Análise:

$$\begin{aligned}
\textsc{AproxMochila}(I) &= \max\{v_1 + v_2 + \ldots + v_q, v_{q+1}\} \\
&\geq \tfrac{1}{2}(v_1 + \ldots + v_q + v_{q+1}) \\
&\geq \tfrac{1}{2} OPT_{frac}(I) \\
&\geq \tfrac{1}{2} OPT(I)
\end{aligned}$$

De onde vemos que esse algoritmo é uma $\frac{1}{2}$-aproximação.