

Disciplina MCTA015-13

Linguagens Formais e Autômatata

Revisão de conceitos importantes

Profa. Carla Negri Lintzmayer

`carla.negri@ufabc.edu.br`

`www.professor.ufabc.edu.br/~carla.negri`

Centro de Matemática, Computação e Cognição – Universidade Federal do ABC



Estes slides contêm um resumo de conceitos matemáticos que são utilizados no decorrer da disciplina.

Revisão de conceitos matemáticos

- Seção 2: Sequências
- Seção 3: Conjuntos
- Seção 4: Funções
- Seção 5: Métodos de demonstração

Materiais extras:

- livro da disciplina de Bases Matemáticas
- vídeos de prova por indução

Sequências

Sequência

Sequência

Uma **sequência** de objetos é uma lista desses objetos uma determinada ordem.

Exemplo

(7, 21, 57)

A ordem dos elementos importa:

$$(7, 21, 57) \neq (57, 21, 7)$$

Repetições também importam:

$$(7, 21, 57) \neq (7, 7, 21, 57)$$

Tupla

Uma sequência de k elementos é chamada de k -**upla** (ou simplesmente **tupla**).

Exemplos

- (🚌, 🐎, 😊, 🎸) 4-upla
- (A, B, C) 3-upla
- (1, 😊) 2-upla ou **par**

Conjuntos

Conjunto

Um **conjunto** é um grupo de objetos representados como uma unidade.

Um conjunto podem conter qualquer tipo de objeto, incluindo números, símbolos, outros conjuntos, etc...

Elemento ou Membro

Os objetos em um conjunto são chamados de **elementos** ou **membros**.

Definindo conjuntos: listagem

Podemos definir um conjunto através da listagem de seus elementos, separados por vírgula, entre chaves.

Exemplos

$$\{1, 2, 3, 4\}$$
$$\{\text{banana, uva, 😊}\}$$
$$\{\text{🍇, 🍌, 🍍, 🍎, 🍉}\}$$
$$\{\text{😊, 😄, 😊, 😊}\}$$

Em um conjunto, a ordem em que listamos os elementos e elementos repetidos são irrelevantes.

$$\{1, 2, 3, 4\} = \{2, 1, 4, 3\} = \{1, 2, 2, 4, 3, 3\}$$

Se x é um membro do conjunto A , escrevemos $x \in A$, que pode ser lido como:

- x é um elemento de A ,
- x é um membro de A ,
- x **pertence** a A , ou
- x **está** em A .

Se $x \in A$, também dizemos que o conjunto A **contém** x

Não pertinência em conjuntos

Se x não é um membro do conjunto A , escrevemos $x \notin A$, que pode ser lido como:

- x não é um elemento de A
- x não é um membro de A
- x não pertence a A
- x não está em A

Se $x \notin A$, também dizemos que A não contém o elemento x

Nomeando conjuntos

Para não replicarmos a definição do conjunto toda vez que quisermos referenciá-lo, é comum nomeá-lo. Fazemos isso indicando que um conjunto é igual a um rótulo (variável).

Exemplo

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{\text{banana, maçã, pera}\}$$

$$C = \{\text{😊, 😄, 😊, 😁}\}$$

Exemplo de uso

Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ Como $2 \in A$...

Por convenção, rotulamos os conjuntos com letras maiúsculas.

Usando elipses na definição de conjuntos

Quando temos muitos elementos para listar na definição do conjunto, usamos elipses (“...”) para denotar que a listagem de elementos continua de acordo com o padrão exibido.

Exemplos

$$\{1, 2, 3, \dots, 100\}$$

$$\{0, 2, 4, \dots, 100\}$$

$$\{x_1, x_2, \dots, x_{89}\}$$

$$\{y_1, y_2, \dots, y_k\}, \text{ onde } k \text{ é um inteiro}$$

Usando elipses na definição de conjuntos (cont.)

Na ausência de um padrão claro, assumimos que o incremento ocorre de um em um.

Exemplos

$$\{1, \dots, 100\}$$

$$\{a_1, \dots, a_{89}\}$$

Denotando conjuntos infinitos

Um conjunto X é **finito** se ele contém um número finito de membros.

Caso contrário, dizemos que X é um conjunto **infinito**.

Para denotar um conjunto **infinito** podemos usar elipses.

Exemplos

$$\{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\{1, 3, 5, \dots\}$$

$$\{\dots, -2, -1\}$$

$$\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

A **cardinalidade** ou **tamanho** de um conjunto X , denotado por $|X|$, é o número de elementos de X .

Exemplo

Se $A = \{0, 2, 4, 6\}$, $B = \{1, 2, \dots, 100\}$, $C = \{1, 2, \dots\}$, $D = \{\}$, então

$$|A| = 4 \quad |B| = 100 \quad |C| = \aleph_0 \quad |D| = 0$$

O conjunto $\{\}$, i.e., o conjunto que contém zero elementos, é chamado de **conjunto vazio**.

Ele é mais comumente denotado por \emptyset .

- $\emptyset = \{\}$ Conjunto vazio
- $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ Conjunto dos números naturais
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ Conjunto dos números inteiros
- \mathbb{Q} Conjunto dos números racionais
- \mathbb{R} Conjunto dos números reais

Podemos definir conjuntos textualmente.

Exemplos

- “Seja X o conjunto de todos os números naturais menores ou iguais a 100”
 - $X = \{\text{números naturais menores ou iguais a 100}\}$
- Não é muito preciso, o que pode levar a ambiguidade na definição do conjunto.

Definindo conjuntos com predicados

Dado um predicado $P(x)$, podemos definir um conjunto com a notação

$$\{x: P(x)\} \quad \text{ou} \quad \{x \mid P(x)\}$$

- Os símbolos “:” e “|” são lidos como “tal que”.
- Lê-se: “o conjunto formado pelos elementos x tais que $P(x)$ é verdadeiro”.
- Todos os valores de x para os quais o predicado vale (é verdadeiro) pertencem ao conjunto que está sendo definido.
- Todos os valores de x para os quais o predicado não vale não pertencem ao conjunto.

O domínio do predicado pode aparecer no lado esquerdo:

$$\{x \in X: f(x)\} \quad \text{ou} \quad \{x \in X \mid f(x)\}$$

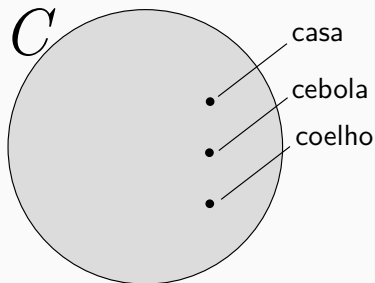
Exemplos

- $\{x: x \text{ é par}\}$
- $\{x \in \mathbb{N}: x \text{ é par}\} = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$
- $\{x: x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ é par}\} = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$
- $\{x: x = 0 \pmod{2}\}$
- $\{x: x = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}$
- $\{x \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$
- $\{x \in \mathbb{Z}: 1 \leq x \leq 100\} = \{1, \dots, 100\}$
- $\{(x, y): 1 \leq x \leq 100 \text{ e } 1 \leq y \leq 10\} = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 10), (2, 1), (2, 2), \dots, (2, 10), \dots, (100, 1), (100, 2), \dots, (100, 10)\}$
- $\{x \in \mathbb{Z}: 1 \leq x \leq 100 \text{ e } x \text{ é múltiplo de } 3\} = \{3, 6, 9, \dots, 99\}$
- $\{x: x \text{ é um modelo de carro}\}$
- $\{x: x \text{ atuou com Chuck Norris e nasceu antes de } 1980\}$

Desenhando conjuntos: diagrama de Venn

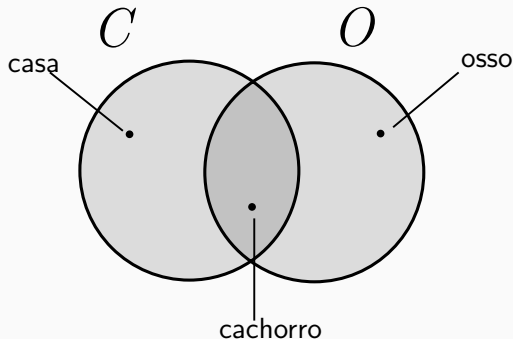
Diagrama de Venn é uma forma de representação gráfica para conjuntos.

- Conjuntos são regiões delimitadas por linhas circulares ou elípticas.
- (Alguns) membros podem ser representados por pontos.



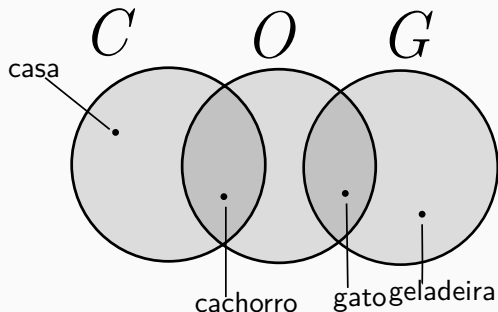
Desenhando conjuntos: diagrama de Venn (cont.)

- $C = \{\text{palavras que começam com a letra "c"}\}$
- $O = \{\text{palavras que terminam com a letra "o"}\}$



Desenhando conjuntos: diagrama de Venn (cont.)

- $C = \{\text{palavras que começam com a letra "c"}\}$
- $O = \{\text{palavras que terminam com a letra "o"}\}$
- $G = \{\text{palavras que começam com a letra "g"}\}$



Subconjunto

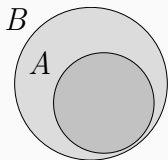
Subconjunto

Um conjunto A é um **subconjunto** de um conjunto B se para todo $x \in A$, temos que $x \in B$.

Notação: $A \subseteq B$

Se $A \subseteq B$, então B é um **superconjunto** de A .

Notação: $B \supseteq A$



Atenção!

$\emptyset \subseteq X$ para qualquer conjunto X .

Subconjunto Próprio

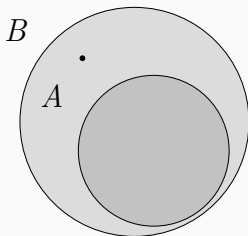
Subconjunto próprio

Um subconjunto A de um conjunto B é **próprio** se $A \neq B$.

Notação: $A \subsetneq B$ ou $A \subset B$.

Se $A \subset B$, então B é **superconjunto próprio** de A .

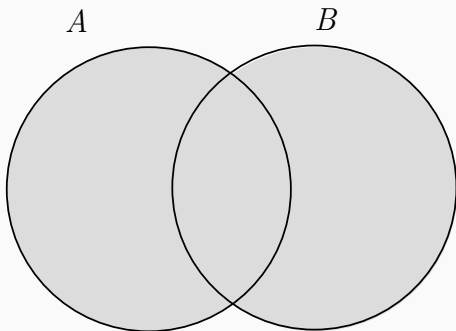
Notação: $B \supsetneq A$ ou $B \supset A$.



União

Dados dois conjuntos A e B quaisquer, sua união é o conjunto $A \cup B$ tal que

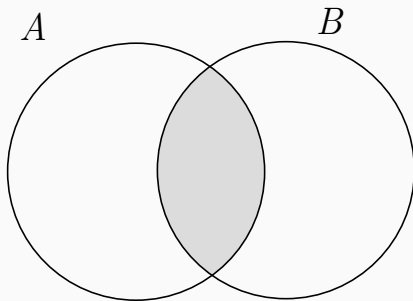
$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ ou } x \in B\}$$



Interseção

Dados dois conjuntos A e B quaisquer, sua interseção é o conjunto $A \cap B$ tal que

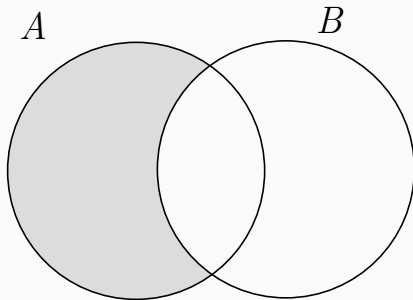
$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ e } x \in B\}$$



Diferença

Dados dois conjuntos A e B quaisquer, sua diferença é o conjunto $A \setminus B$ tal que

$$A \setminus B = \{x: x \in A \text{ e } x \notin B\}$$



Conjunto potência

O conjunto potência de um conjunto A é o conjunto de todos os subconjuntos de A .

Notação: $\mathcal{P}(A)$.

Exemplo

Se $A = \{1, 2, 3\}$, então

$$\mathcal{P}(A) = \left\{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \right\}$$

Produto cartesiano de dois conjuntos

Produto cartesiano

O produto cartesiano de dois conjuntos A e B é o conjunto $A \times B$ tal que

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$$

Exemplo

Sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$.

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

Produto cartesiano de k conjuntos

Produto cartesiano

O produto cartesiano dos conjuntos A_1, A_2, \dots, A_k é o conjunto $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ tal que

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k = \{(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k) : a_i \in A_i \text{ e } 1 \leq i \leq k\}$$

Produto cartesiano

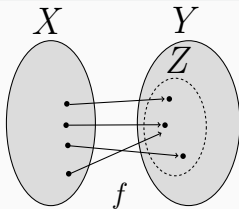
O produto cartesiano do conjunto A com ele mesmo k vezes é denotado por A^k :

$$A^k = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k \text{ termos}}$$

Funções

Função

Uma **função** é uma relação entre dois conjuntos que associa cada elemento do primeiro a exatamente um elemento do segundo.



Na função f da figura acima:

- X é o **domínio** da função f
- Y é o **contradomínio** da função f
- Z é a **imagem** da função f

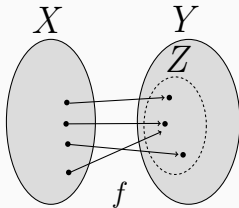
Notação

Se f é uma função com domínio X e contradomínio Y , então escrevemos:

$$f: X \rightarrow Y$$

Assim,

$$f(x) = y \quad \Rightarrow \quad x \in X \text{ e } y \in Y$$



Funções: representações

Seja $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{2, 4, 6\}$.

Podemos representar f por uma expressão: $f(x) = 2x$ para $x \in \{1, 2, 3\}$.

Ou de forma tabular:

x	$f(x)$
1	2
2	4
3	6

Sejam a , b e a_i , para $0 \leq i \leq k$, constantes:

- Constantes: $f(n) = a$
- Lineares: $f(n) = an + b$
- Polinomiais: $f(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0$
- Racionais: $f(n) = p(n)/q(n)$
- Exponenciais: $f(n) = a^n$
- Logarítmicas: $f(n) = \log_a n$

Função k -ária

Uma função é k -ária quando seu domínio é $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$, para conjuntos A_1, \dots, A_k :

$$f: A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k \rightarrow Y$$

- A entrada para f é uma k -upla (a_1, a_2, \dots, a_k) e cada a_i é um argumento.

Exemplo

Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{p, i\}$ e $X = \{true, false\}$. Seja $f: A \times B \rightarrow X$ em que

$$f(x, \ell) = \begin{cases} true & \text{se } x \text{ é par e } \ell = p \\ true & \text{se } x \text{ é ímpar e } \ell = i \\ false & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Métodos de demonstração

- Como ter certeza que nossa resposta é correta?
- Como transmitir aos outros essa certeza?
- Começamos por *axiomas*: fatos simples que todos concordam que são verdade.
- Desenvolvemos um raciocínio a partir deles usando *regras de inferência*.

Se você encontrou um **contraexemplo** para sua questão, pode ter certeza de que ela está incorreta.

Suponha que $x > 3$. Então $x^2 - 2y > 5$.

Essa afirmação é falsa.

Tome, por exemplo, $x = 4$ e $y = 9$.

Nesse caso, $x^2 - 2y = 16 - 18 = -2 \not> 5$.

C.Q.D.

Porém, a única forma de ter certeza que sua questão está correta é **demonstrando-a** para qualquer valor.

Suponha que $x > 3$ e $y < 2$. Então $x^2 - 2y > 5$.

Como $x > 3$, temos que $x^2 > 9$.

Como $y < 2$, temos que $-y > -2$ e $-2y > -4$.

Assim, $x^2 - 2y > 9 - 4 = 5$.

C.Q.D.

Demonstração


Uma **demonstração** é uma argumentação precisa que procura convencer o leitor de que uma certa proposição, previamente enunciada, está correta.

É uma sequência de afirmações organizada de tal forma que:

- cada afirmação é consequência simples das afirmações anteriores e das hipóteses da proposição em discussão;
- a última afirmação é a proposição que se deseja demonstrar;
- um símbolo determina seu término (\square ou C.Q.D).

Infelizmente, uma demonstração apenas descreve os passos necessários para chegar à conclusão, sem explicar o raciocínio utilizado (que nem sempre é óbvio).

Demonstração

- Infelizmente não existe um “algoritmo” para escrever demonstrações.
- Em geral também não se consegue escrever uma demonstração de imediato.
- Por outro lado, existem algumas técnicas gerais.
- Qual técnica usar?
 - A que funcione 
 - Talvez tenhamos que recomeçar várias vezes, mas com o tempo ganhamos alguma intuição.
- Algumas dicas gerais também são úteis:
 - Entenda bem o que deve ser provado.
 - Tenha paciência.
 - Seja conciso.
 - Se você não sabe por onde começar, escreva todas as definições dos termos que estão nas hipóteses.

Demonstração direta

Argumente a veracidade da proposição diretamente.

Teorema

Sejam m e n números inteiros. Se m e n são pares, então $m + n$ é par.

Demonstração.

Sejam m e n inteiros pares. Como m é par, existe inteiro r tal que $m = 2r$. Similarmente, existe inteiro s tal que $n = 2s$. Portanto, $m + n = 2r + 2s = 2(r + s)$. Como $r + s$ é inteiro, temos que $m + n$ é par. C.Q.D.

Demonstração por contradição

Assuma que o que você quer provar é falso e construa argumentos até chegar a um absurdo.

Teorema

Sejam m e n números inteiros. Se m e n são pares, então $m + n$ é par.

Demonstração.

Sejam m e n inteiros pares. Como m é par, existe inteiro r tal que $m = 2r$. Similarmente, existe inteiro s tal que $n = 2s$. Assuma, para fins de contradição, que $m + n$ é ímpar. Então existe inteiro t tal que $m + n = 2t + 1$. Assim, $2r + 2s = 2t + 1$, ou seja, $2(r + s - t) = 1$, o que é uma contradição, pois $r + s - t$ é um inteiro e 1 é ímpar. Então $m + n$ deve ser par. C.Q.D.

Demonstração por indução

- Se $n \in \mathbb{N}$, então $n^2 + n + 41$ é primo?
 - Vale para $n = 1, 2, \dots, 39$ mas $40^2 + 40 + 41 = 41^2$, que não é primo.
- Se n é inteiro positivo, então $991n^2 + 1$ não é quadrado perfeito?
 - Não vale para $x = 12055735790331359447442538767$ mas vale para todos os números $n < x$.
- A soma dos n primeiros números ímpares é n^2 ?
 - Note que $1 = 1^2$, $1 + 3 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 3^2$, $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$ e $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$, mas é possível que seja apenas uma coincidência.

Considere a seguinte afirmação:

Para todo $n \in \mathbb{N}$, a soma $2^0 + 2^1 + \dots + 2^n$ é igual a $2^{n+1} - 1$.

- Se $n = 0$, a soma é $2^0 = 1$ e $2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1$ e a frase vale.
- Se $n = 1$, a soma é $2^0 + 2^1 = 1 + 2 = 3$ e $2^{1+1} - 1 = 4 - 1 = 3$ e a frase vale.
- Se $n = 2$, a soma é $2^0 + 2^1 + 2^2 = 1 + 2 + 4 = 7$ e $2^{2+1} - 1 = 8 - 1 = 7$ e a frase vale.
- Se $n = 3$, a soma é $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$ e $2^{3+1} - 1 = 16 - 1 = 15$ e a frase vale.

Provar a afirmação dessa forma não só é cansativo como é impossível e ainda pode ser inútil se ela for falsa!

Acontece que o objeto maior

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7$$

contém objetos menores, como

$$(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + 2^5 + 2^6 + 2^7$$

$$(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6) + 2^7$$

E se soubermos provar a validade de um desses objetos menores?

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = 2^7 - 1$$

Então podemos usar isso para provar o maior:

$$(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6) + 2^7 =$$

$$(2^7 - 1) + 2^7 = 2 \times 2^7 - 1 = 2^8 - 1.$$

Mas isso vale para qualquer valor de n (que não seja o 0):

$$2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1} + 2^n = (2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1}) + 2^n$$

E se a propriedade valer para $2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1}$, isto é, se $2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$, então substituindo acima:

$$\begin{aligned} 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1} + 2^n &= (2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1}) + 2^n \\ &= (2^n - 1) + 2^n \\ &= 2 \times 2^n - 1 \\ &= 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

Usamos um processo de redução: no objeto maior (n), enxergamos o objeto menor ($n - 1$), supomos que o resultado valia para o menor e provamos que ele vale para o maior.

Podemos usar um processo de aumentação: supondo que o resultado no objeto melhor vale, partimos dele e *construímos* o resultado para o objeto maior:

$$2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

$$2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1} + 2^n = 2^n - 1 + 2^n$$

$$2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1} + 2^n = 2 \times 2^n - 1$$

$$2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1} + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

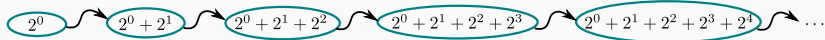
Questão de gosto

Veja que usei os termos $n - 1$ e n , mas poderíamos usar n e $n + 1$. Isso é apenas uma questão de nomenclatura e gosto pessoal.

Nos dois processos, estamos criando uma relação entre os objetos de interesse:



E há uma cadeia de relações, até que se chegue em um ou mais objetos de tamanho bem pequeno (nenhum objeto de tamanho menor do que esse pode ser resolvido):



No exemplo, a abordagem utilizada só funciona para $n > 0$, por isso quando $n = 0$ precisamos resolver diretamente.

Consiste em mostrar diretamente a proposição para alguns objetos (casos base) e mostrar uma relação entre um objeto qualquer e algum(ns) objeto(s) menor(es) (seja pelo processo de redução ou aumento), justamente porque isso **implicitamente** constrói toda a cadeia.

Indução

Para provar que $P(n)$ é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}$, com $n \geq n_0$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$:

- Mostre que $P(n_0)$ é verdade (e talvez $P(n_0 + 1), \dots, P(n_0 + k)$ também, para algum $k \geq 0$).
- Considere um $n > n_k$ qualquer.
- Assuma que $P(k)$ vale, para todo k tal que $n_0 \leq k < n$.
- Prove $P(n)$.

Teorema

A soma dos n primeiros números naturais ímpares é n^2 .

Demonstração.

Por indução em n .

Quando $n = 1$, o primeiro natural ímpar é 1, que é igual a 1^2 .

Seja $n > 1$ um número natural qualquer. Suponha que a soma dos k primeiros naturais ímpares é k^2 , para qualquer $1 \leq k < n$.

Vamos verificar se a soma dos n primeiros naturais ímpares $(1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 3) + (2n - 1))$ é n^2 .

Note que $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 3) = (n - 1)^2$, por hipótese de indução. Então

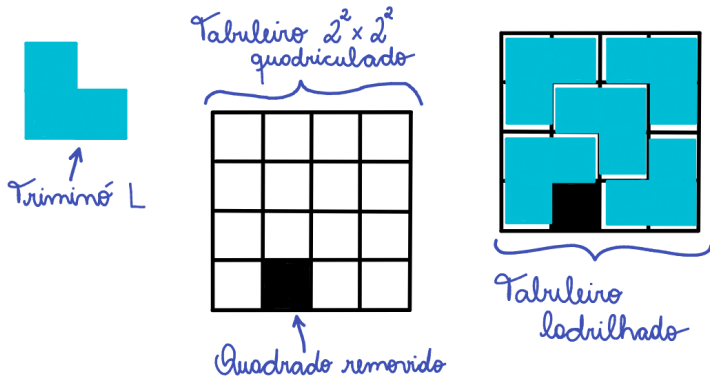
$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 3) + (2n - 1) &= (n - 1)^2 + (2n - 1) \\ &= n^2 - 2n + 1 + 2n - 1 = n^2 . \end{aligned}$$

C.Q.D.

Indução: outro exemplo

Teorema

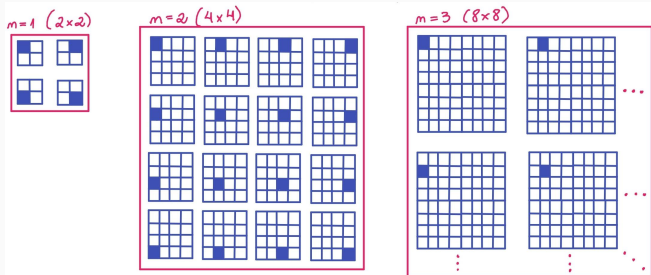
Seja n um inteiro positivo. Todo tabuleiro de damas de tamanho $2^n \times 2^n$ com um quadrado removido pode ser ladrilhado por triminós em forma de "L".



Teorema

Seja n um inteiro positivo. Todo tabuleiro de damas de tamanho $2^n \times 2^n$ com um quadrado removido pode ser ladrilhado por trininós em forma de "L".

Observe como existem vários objetos para um mesmo valor n :



A demonstração deve valer para qualquer um desses objetos!

- Quando existem vários objetos para um mesmo dado n , a abordagem por *aumentação* mencionada anteriormente precisa de mais cuidados do que a prova por *redução*.
- **Aumentação**: consideramos que temos algum objeto menor para o qual já vale a proposição e construímos algum objeto maior, de tamanho n , a partir dele.
 - É preciso ter certeza de que esse processo é geral o suficiente para criar **todos** os objetos de tamanho n .
- **Redução**: consideramos que temos algum objeto **qualquer** de tamanho n para o qual queremos provar a proposição e “removemos” algo dele para gerar um objeto de tamanho menor.
 - Quase sempre a remoção já cria um objeto menor válido, para o qual a hipótese vale diretamente.

- Em qualquer abordagem: é preciso garantir que os objetos criados satisfazem todas as propriedades desejadas antes de assumir que o resultado vale.
 - No primeiro exemplo: o objeto é uma soma, mas ela precisa ter a propriedade de ser sobre as primeiras potências de 2.
 - No segundo exemplo: o objeto também é uma soma, mas ela precisa ter a propriedade de ser sobre os primeiros números naturais ímpares.
 - No terceiro exemplo: o objeto é um tabuleiro, mas ele precisa ser quadrado, com lados de tamanho iguais a potências de 2 e é necessário que um quadrado esteja removido.

Teorema

Seja n um inteiro positivo. Todo tabuleiro de damas de tamanho $2^n \times 2^n$ com um quadrado removido pode ser ladrilhado por trininós em forma de "L".

Demonstração.

- Vamos provar por indução em n .
- Quando $n = 1$, um tabuleiro 2×2 certamente pode ser coberto por um trininó, independente de onde está o quadrado removido.
- Seja $n > 1$ um inteiro qualquer.
- Suponha que todo tabuleiro de tamanho $2^k \times 2^k$ com um quadrado removido pode ser ladrilhado por trininós, para $1 \leq k < n$.

Indução: exemplo (cont.)

- Considere agora um tabuleiro $2^n \times 2^n$ com algum quadrado removido.
 - Podemos dividi-lo em 4 subtabuleiros menores de tamanho $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ cada (como $n > 1$, vale que $2^{n-1} < 2^n$).
 - Suponha, s.p.g., que o quadrado removido está no subtabuleiro superior direito.
 - Por hipótese, este pode ser ladrilhado.
 - Escolhemos quadrados específicos para remover nos outros três subtabuleiros (as casas centrais do tabuleiro original).
 - Agora podemos usar a hipótese e ladrilhá-los.
 - Os quadrados removidos podem ser cobertos por um triminó extra.
 - Então o tabuleiro original pode ser totalmente ladrilhado.

C.Q.D.

Indução: ideia dos ladrilhos

