



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

Decomposições Localmente Irregulares

Santo André – SP
2024



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

Decomposições Localmente Irregulares

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação da Universidade Federal do ABC para obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

Discente: Lucas Sampaio da Rocha

Orientadora: Profa. Dra. Carla Negri Lintzmayer

Co-orientador: Prof. Dr. Guilherme Oliveira Mota

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Agradecimentos

Gostaria de expressar minha gratidão a todos que me apoiaram ao longo da vida e durante a realização deste mestrado. Após muitos anos de altos e baixos, estamos nos aproximando do fim dessa jornada!

Primeiramente, gostaria de agradecer aos meus pais, Mauro e Cristina, e minha avó Maria. Vocês sempre cuidaram de mim e trabalharam duro para que nunca faltasse nada em casa e que eu tivesse acesso a uma educação de qualidade. Sem isso, eu jamais teria tido a oportunidade de focar nos estudos e chegar até aqui.

Minha namorada, Letticia, também foi uma grande companheira nos últimos anos, e seu apoio durante alguns dos momentos mais difíceis da minha vida foi fundamental para que eu não desistisse e tivesse ânimo para chegar até o fim. No dia a dia, você também é a pessoa que mais tem me apoiado e me dado força para atingir meus objetivos.

Também gostaria de agradecer aos meus gatos. Acho que eles não vão ler este agradecimento, mas o amor incondicional e todo o carinho que eu recebo deles me faz um bem enorme e também me ajudou muito nos momentos difíceis.

Minha psicóloga Cláudia também foi essencial para que esta dissertação exista. Digo isso literalmente, pois sem o apoio direto dela eu teria desistido do mestrado. Após muitas sessões, eu finalmente recuperei a motivação e hoje me conheço bem melhor.

Gostaria também de agradecer aos meus professores da graduação, em especial a Tiemi e a Katti, que orientaram minha primeira IC e me ajudaram a dar meus primeiros passos no mundo acadêmico, e a Cândida, que me orientou durante boa parte da minha graduação, fez eu me apaixonar por teoria dos grafos, e também foi minha mentora na maratona de programação, que foi um dos eventos mais importantes para minha formação.

Também sou muito grato aos meus professores do mestrado, especialmente meus orientadores, Carla e Guilherme, que também acompanharam meus altos e baixos e me apoiaram muito durante toda a nossa pesquisa. Tive a sorte de sempre ter tido ótimos orientadores, e sou muito grato pelo quanto vocês contribuíram com minha formação.

Por fim, gostaria de agradecer a todos meus amigos, que também fizeram muita diferença na minha vida e contribuíram para que eu me tornasse quem eu sou hoje.

Resumo

Um grafo é localmente irregular se todo par de vértices adjacentes possui graus distintos. Uma decomposição localmente irregular de um grafo é uma decomposição dele em subgrafos que são localmente irregulares. Vários esforços foram feitos nos últimos anos para tentar provar uma conjectura que pergunta se todo grafo que admite uma decomposição localmente irregular pode ser decomposto em no máximo três subgrafos localmente irregulares. Um único contraexemplo foi encontrado, então os esforços atuais se concentram em provar que esse contraexemplo é único ou em encontrar novos contraexemplos.

A *Conjectura 1-2-3*, que possui uma relação com o problema anterior, pergunta se é possível atribuir um peso 1, 2 ou 3 a cada aresta de um grafo de forma que, para todo par de vértices adjacentes, a soma dos pesos das arestas que são incidentes a ambos é diferente. Essa conjectura foi provada por Keusch em 2024.

Nesta dissertação nós apresentamos os resultados principais sobre esses problemas e nossos resultados relacionados ao primeiro. Também sugerimos algumas direções para pesquisas futuras.

Abstract

A graph is locally irregular if any pair of adjacent vertices have distinct degrees. A locally irregular decomposition of a graph is a decomposition of it into subgraphs that are locally irregular. Many efforts were done in the last years to try to prove a conjecture that asks if every graph that admits a locally irregular decomposition can be decomposed in at most three locally irregular subgraphs. A single counterexample has been found, so current efforts focus on proving that this is the only counterexample or finding new counterexamples.

The *1-2-3 Conjecture*, which has a relation to the previous problem, asks if it is possible to assign a weight of 1, 2 or 3 to each edge of a graph such that, for each pair of adjacent vertices, the sums of the weights of the edges that are incident to both are different.

In this thesis we present the main results about these problems and our results related to the former. We also suggest some directions for future research.

Sumário

1	Introdução	1
2	Conjectura 1-2-3	5
3	Decomposições localmente irregulares	8
3.1	Caracterização dos grafos decomponíveis	8
3.2	Método probabilístico	13
3.3	Limitante superior para todos os grafos	15
3.3.1	Grafos com tamanho ímpar	16
3.3.2	Grafos bipartidos	16
3.3.3	Grafos degenerados	17
3.3.4	Estado da arte	18
3.4	Grafos subcúbicos	18
4	Nossos resultados	20
4.1	Grafos subcúbicos	20
4.2	Grafos não decomponíveis	24
4.3	Grafos sunlet	26
4.4	Limitante superior para todos os grafos	27
5	Considerações finais	30
	Referências Bibliográficas	30

Capítulo 1

Introdução

Neste texto consideramos grafos simples e não direcionados. O *tamanho* de um grafo é definido como sendo sua quantidade de arestas. Um caminho com n vértices, e portanto tamanho $n - 1$, é denotado por P_n . Definições omitidas podem ser consultadas no livro de Bondy e Murty [9].

Em diversos contextos, pode ser útil ter alguma forma de distinguir vértices adjacentes de G . Isso usualmente é feito por meio de alguma função $c : V(G) \rightarrow \mathbb{Z}^+$, chamada de *coloração*, na qual dois vértices adjacentes u e v são considerados *distinguíveis* se as cores $c(u)$ e $c(v)$ são diferentes. Se essa propriedade vale para todo par de vértices adjacentes de G , dizemos que c é uma *coloração própria* dos vértices de G . Um problema dessa abordagem é que o número mínimo de cores necessárias para obter tal coloração, o *número cromático* de G , conhecido como $\chi(G)$, pode ser até $\Delta(G) + 1$, que em alguns contextos é um valor muito alto [6].

Uma solução possível para esse problema é usar algum parâmetro fácil de computar, com poucos valores distintos, e que induz uma coloração dos vértices de G . Um dos parâmetros mais naturais para isso é o grau dos vértices, ou seja, podemos definir $c(v) = d(v)$. Assim, se em todo par (u, v) de vértices adjacentes em G , os vértices u e v têm graus distintos, então dizemos que G é um grafo *localmente irregular*. Na Figura 1.1 podemos ver exemplos de tais grafos.

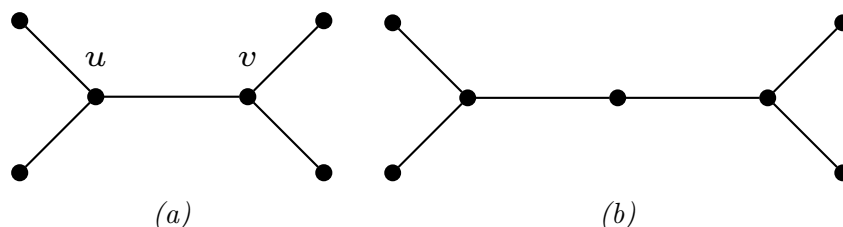


Figura 1.1: O grafo em (a) não é localmente irregular, pois os vértices vizinhos u e v têm grau 3. Já o grafo em (b) é localmente irregular.

Um problema com o uso do grau para colorir os vértices é que existem muitos grafos que não são localmente irregulares e alguns grafos possuem uma quantidade muito grande de

pares de vértices não distinguíveis, como grafos regulares. Além disso, também precisamos usar $\Delta(G)$ valores distintos de $d(v)$ em alguns casos.

Vamos introduzir uma *função de ponderação* $w: E(G) \rightarrow \mathbb{Z}^+$ nas arestas de G . Dizemos que w é uma k -ponderação das arestas de G se $w(e) \in \{1, 2, \dots, k\}$ para toda aresta $e \in E(G)$. Então podemos definir o *grau ponderado* de um vértice v como

$$\sigma(v) = \sum_{u \in N(v)} w(uv).$$

Na Figura 1.2 temos um grafo e uma 3-ponderação w em suas arestas. Nesse caso, temos os pesos $w(ab) = 1$, $w(bc) = 2$ e $w(ca) = 3$, de modo que os graus ponderados são $\sigma(a) = 4$, $\sigma(b) = 3$ e $\sigma(c) = 5$.

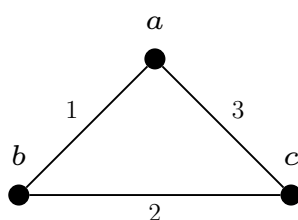


Figura 1.2: Um grafo e uma função de ponderação em suas arestas.

Note que há casos em que σ é uma coloração própria dos vértices de G . O grafo da Figura 1.2 é um exemplo disso, dado que nenhum par de vértices adjacentes possui o mesmo grau ponderado. Quando isso acontece, dizemos que w é uma *ponderação soma-distinguidora* das arestas de G (*neighbour sum-distinguishing edge-weighting*).

Lema 1.1 ([14]). *Seja G um grafo conexo. Existe uma ponderação soma-distinguidora das arestas de G se e somente se G não é isomorfo ao K_2 .*

Definimos $\chi_\sigma^e(G)$ como o menor k tal que existe uma k -ponderação soma-distinguidora das arestas de G . Uma vantagem de usar uma função de ponderação para distinguir vértices adjacentes de um grafo é o fato de que, para qualquer grafo conexo G não isomorfo ao K_2 , temos $\chi_\sigma^e(G) \leq 5$ [13]. Isso significa que é possível induzir uma coloração própria dos vértices de G utilizando um parâmetro fácil de computar e que possui apenas 5 valores distintos. Nesse contexto, em 2004 surge uma conjectura interessante, proposta por Karoński, Łuczak e Thomason.

Conjectura 1.2 (Conjectura 1-2-3 [14]). *Para todo grafo conexo G não isomorfo ao K_2 , temos $\chi_\sigma^e(G) \leq 3$.*

A motivação para estudar grafos localmente irregulares vem do fato de que esse tipo de grafo aparece naturalmente ao estudar a Conjectura 1-2-3. Note que grafos localmente irregulares são precisamente os grafos com $\chi_\sigma^e(G) = 1$. Além disso, esses grafos são explicitamente mencionados em um dos primeiros resultados sobre a Conjectura 1-2-3, que mostra que para todo grafo conexo não isomorfo ao K_2 temos $\chi_\sigma^e(G) \leq 16$ [2].

Assim como grafos localmente irregulares, existe outro conceito que se mostrou intimamente relacionado à Conjectura 1-2-3. Uma *decomposição localmente irregular* de um grafo G é uma partição $\{E_1, \dots, E_k\}$ de $E(G)$ na qual $G[E_i]$ é um grafo localmente irregular para todo $1 \leq i \leq k$ [6].

Na Figura 1.3 podemos ver uma decomposição localmente irregular do grafo de Petersen em dois subgrafos localmente irregulares, na qual as arestas de cada um desses subgrafos está colorida com uma cor diferente.

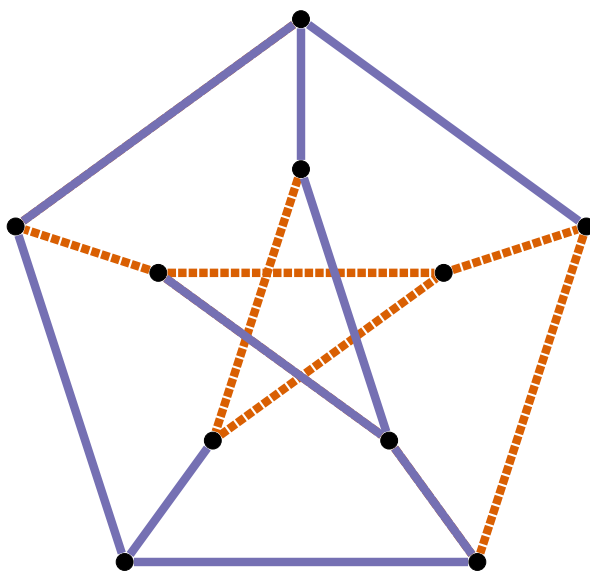


Figura 1.3: Uma decomposição localmente irregular do grafo de Petersen.

Note que nem todo grafo admite uma decomposição localmente irregular. Por exemplo, caminhos ímpares e ciclos ímpares são exemplos de grafos que não admitem nenhuma decomposição localmente irregular. Se G admite uma decomposição localmente irregular, dizemos que G é *decomponível* e definimos o *índice cromático irregular* de G , denotado por $\chi'_{irr}(G)$, como o menor k tal que existe uma decomposição localmente irregular de G com k partes.

A conjectura mais importante à respeito de decomposições localmente irregulares foi formulada por Baudon, Bensmail, Przybyło, e Woźniak em 2015 e seu enunciado é similar ao da Conjectura 1-2-3.

Conjectura 1.3 ([4]). *Para todo grafo decomponível G , temos $\chi'_{irr}(G) \leq 3$.*

Em 2021, Lomenha [21] testou a Conjectura 1.3 para todos os grafos com $n \leq 9$ vértices. Também em 2021, Sedlar e Škrekovski [25] encontraram um grafo G , que chamaram de *bow-tie graph* (grafo gravata-borboleta), com $\chi'_{irr}(G) = 4$, que pode ser visto na Figura 1.4. Esse grafo serve como contraexemplo para a Conjectura 1.3 e até o momento é o único contraexemplo conhecido. Sendo assim, ainda é relevante pesquisar sobre decomposições localmente irregulares com o objetivo de entender se existem outros contraexemplos, e se o conjunto formado por todos os contraexemplos é finito ou infinito. Outro problema importante em aberto é determinar qual o menor inteiro k tal que, para

todo grafo decomponível G , temos $\chi'_{irr}(G) \leq k$ (veremos no Capítulo 3 que o melhor k conhecido atualmente é 220 [18]).

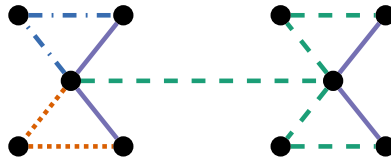


Figura 1.4: Grafo gravata-borboleta e uma decomposição localmente irregular com 4 cores.

Conhecemos infinitos grafos que possuem $\chi'_{irr}(G) = 3$, como grafos completos K_n com $n \geq 4$ e ciclos C_{4m+2} com $m \geq 1$. Assim, mesmo se não existisse nenhum contraexemplo para a Conjectura 1.3, ela não poderia ser melhorada.

O restante desta dissertação está dividido da seguinte forma. No Capítulo 2, discutimos a Conjectura 1-2-3. No Capítulo 3, discutimos decomposições localmente irregulares. No Capítulo 4, apresentamos os resultados que obtivemos durante esse mestrado. No Capítulo 5, resumimos os principais tópicos discutidos neste texto, e apresentamos uma perspectiva para trabalhos futuros nesta área.

Capítulo 2

Conjectura 1-2-3

Neste capítulo falamos sobre os principais resultados da literatura relacionados à Conjectura 1-2-3. Conforme falamos no Capítulo 1, para um grafo conexo G não isomorfo ao K_2 , definimos $\chi_\sigma^e(G)$ como o menor k tal que existe uma k -ponderação soma-distinguidora das arestas de G .

A Conjectura 1-2-3 afirma que se G é um grafo conexo não isomorfo ao K_2 , então $\chi_\sigma^e(G) \leq 3$. Esse é o menor limitante possível, pois existem infinitos grafos G com $\chi_\sigma^e(G) = 3$ (por exemplo, ciclos C_{4k+2}).

Uma demonstração por construção para a Conjectura 1-2-3 foi feita por Keusch em 2024 [16]. Nesse trabalho, o autor apresenta um algoritmo baseado em fluxos que encontra uma 3-ponderação soma-distinguidora para qualquer grafo conexo G não isomorfo ao K_2 . Esse algoritmo executa em tempo exponencial, pois um dos seus passos envolve encontrar um corte máximo de G , que é um problema NP-completo. Porém, o autor acredita que seja possível otimizar o algoritmo para que ele execute em tempo polinomial, encontrando um corte maximal ao invés de um corte máximo e alterando as partes da demonstração que exigem que o corte seja máximo.

Como a Conjectura 1-2-3 não havia sido resolvida durante a maior parte desse mestrado, dedicamos o restante deste capítulo para apresentar os principais resultados parciais que foram obtidos no passado e que estudamos ao longo do mestrado.

Dado que os grafos G com $\chi_\sigma^e(G) = 1$ são exatamente os grafos localmente irregulares, que são fáceis de reconhecer, conforme veremos no Capítulo 3, uma questão interessante que surge é se os grafos com $\chi_\sigma^e(G) = 2$ também são facilmente caracterizáveis. Como foi provado por Dudek e Wajc [11], caso essa caracterização exista, ela não pode ser verificada em tempo polinomial, a menos que $P = NP$.

Teorema 2.1 ([11]). *Dado um grafo conexo G não isomorfo ao K_2 , decidir se $\chi_\sigma^e(G) \leq 2$ é NP-completo.*

Dado o Teorema 2.1, é interessante buscar por resultados para classes específicas de grafos, pois conhecer a estrutura de um grafo pode nos dar informações úteis sobre como

construir k -ponderações soma-distinguidoras para ele. Vamos começar mostrando resultados para algumas classes importantes. Chang, Lu, Wu e Yu provaram em 2011 que $\chi_\sigma^e(K_n) \leq 3$ para todo $n \geq 3$ [10]. Em 2004, Karoński, Łuczak e Thomason obtiveram um resultado mais abrangente, mostrando que $\chi_\sigma^e(G) \leq 3$ para qualquer grafo G conexo e com $\chi(G) \leq 3$ [14].

Grafos bipartidos são uma classe importante para a Conjectura 1.3, pois veremos no Capítulo 3 que mesmo para grafos G bipartidos, determinar se $\chi'_{irr}(G) \leq 3$ é um problema em aberto. Porém, no caso da Conjectura 1-2-3, já temos um entendimento completo dessa classe de grafos. Antes de apresentar esse resultado, precisamos de uma nova definição; um *multi-cacto ímpar* é um grafo bipartido que pertence à família definida recursivamente a seguir:

- Todo ciclo de tamanho equivalente a $2 \pmod{4}$ é um multi-cacto ímpar. Considere que as arestas de cada um destes ciclos estão coloridas alternadamente com verde e roxo.
- Seja G um multi-cacto ímpar e C um ciclo de tamanho equivalente a $2 \pmod{4}$, ambos com as arestas coloridas alternadamente com verde e roxo. Então o grafo H formado ao identificar uma aresta verde de G com uma aresta verde de C também é um multi-cacto ímpar.

A Figura 2.1 contém exemplos de multi-cactos ímpares. É possível determinar em tempo polinomial se um grafo qualquer é um multi-cacto ímpar [26].

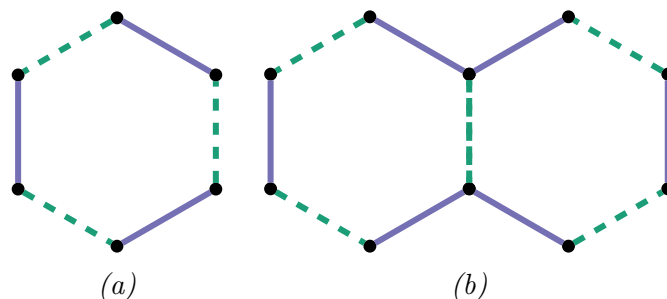


Figura 2.1: Exemplos de multi-cactos ímpares.

Teorema 2.2 ([26]). *Para todo grafo conexo bipartido G que não seja isomorfo ao K_2 , temos $\chi_\sigma^e(G) \leq 3$. Além disso, os grafos conexos bipartidos G com $\chi_\sigma^e(G) = 3$ são exatamente os multi-cactos ímpares.*

Note que pelo Teorema 2.2 é possível decidir em tempo polinomial se, para um grafo bipartido G , temos $\chi_\sigma^e(G) = 3$.

Outra direção de pesquisa é tentar provar versões mais relaxadas da Conjectura 1-2-3 como, por exemplo, provar que, para algum $k > 3$, temos $\chi_\sigma^e(G) \leq k$ para todo grafo conexo G não isomorfo ao K_2 . Uma observação interessante é que, conforme esse valor de k foi diminuindo ao longo do tempo, as provas foram se tornando mais elegantes, e não mais complexas [6].

O primeiro resultado deste tipo, obtido por Addario-Berry, Dalal, McDiarmid, Reed e Thomason [1] afirma que $\chi_\sigma^e(G) \leq 30$ para todo grafo conexo G não isomorfo ao K_2 . Uma observação interessante sobre esse resultado é o uso de grafos localmente irregulares em uma parte da demonstração, o que sugere outra relação entre essa classe de grafos e a Conjectura 1-2-3. Após algum tempo, usando técnicas similares, mas com uma análise mais cuidadosa, Wang e Yu [27] mostraram que $\chi_\sigma^e(G) \leq 13$ para todo grafo conexo G não isomorfo ao K_2 .

Para obter o melhor resultado que existia até 2022, foi necessário criar um novo esquema de demonstração bem diferente dos usados nos resultados anteriores. Esse esquema, criado por Kalkowski, Karoński e Pfender [13], usa argumentos indutivos com algumas suposições adicionais sobre a estrutura dos grafos, e deu origem a um algoritmo simples de tempo polinomial que encontra uma 5-ponderação soma-distinguidora das arestas de qualquer grafo conexo G não isomorfo ao K_2 , o que implica em $\chi_\sigma^e(G) \leq 5$.

Em 2023, Keusch provou que, para todo grafo conexo G não isomorfo ao K_2 , temos $\chi_\sigma^e(G) \leq 4$ [15]. Assim como a demonstração da Conjectura 1-2-3, feita pelo mesmo autor em 2024 [16], essa demonstração é feita por construção usando fluxos e cortes.

Capítulo 3

Decomposições localmente irregulares

Neste capítulo discutimos sobre os principais resultados na literatura relacionados a decomposições localmente irregulares. Conforme definimos no Capítulo 1, uma decomposição localmente irregular de um grafo G é uma partição $\{E_1, \dots, E_k\}$ de $E(G)$ na qual cada $G[E_i]$ é localmente irregular.

Note que podemos representar uma decomposição localmente irregular como uma coloração de arestas $c : E(G) \rightarrow \mathbb{Z}^+$ na qual $c(e) = i$ se $e \in E_i$. Então, podemos usar os termos *coloração localmente irregular* e *decomposição localmente irregular* de forma intercambiável.

Se c é uma coloração localmente irregular de G usando no máximo as cores $\{1, \dots, k\}$, dizemos que c é uma k -*liec* de G (do termo em inglês *locally irregular edge coloring*). Também definimos $d_i(v, c)$ como a quantidade de arestas incidentes a v que possuem a cor i em c . Quando não há ambiguidade, podemos representar esse número como $d_i(v)$.

3.1 Caracterização dos grafos decomponíveis

Como mencionado anteriormente, nem todo grafo admite uma decomposição localmente irregular. Se G admite uma decomposição localmente irregular, então dizemos que G é um *grafo decomponível*. A seguir apresentamos uma caracterização completa de todos os grafos que não são decomponíveis. Para isso, primeiro vamos introduzir uma família de grafos que é definida indutivamente como a seguir.

Definição 3.1 (Família \mathcal{T}). *A família \mathcal{T} de grafos é tal que:*

1. K_3 pertence a \mathcal{T} .
2. Seja $G \in \mathcal{T}$ tal que G possui um triângulo com um vértice v de grau 2. Seja H um caminho de tamanho par ou um caminho de tamanho ímpar com um triângulo ligado em uma de suas extremidades. Então, o grafo T obtido ao identificar v com um vértice de grau 1 de H pertence a \mathcal{T} .

A Figura 3.1 apresenta alguns exemplos de grafos em \mathcal{T} .

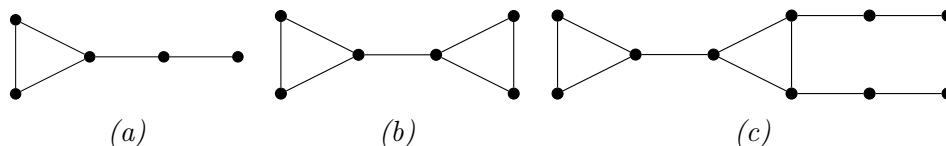


Figura 3.1: Alguns grafos pertencentes à família \mathcal{T} .

Note que os grafos que fazem parte de \mathcal{T} são fáceis de identificar. Com exceção do K_3 , todos esses grafos possuem grau máximo 3, todo vértice de grau 3 faz parte de exatamente um triângulo, todo ciclo é um triângulo, qualquer caminho que conecta dois triângulos possui uma quantidade ímpar de arestas e qualquer caminho que conecta um triângulo a um vértice de grau 1 possui uma quantidade par de arestas.

De fato, os únicos grafos conexos que não são decomponíveis são os caminhos de tamanho ímpar, ciclos de tamanho ímpar e grafos da família \mathcal{T} [4]. Esses grafos são chamados de *exceções*. A demonstração desse fato será dada a seguir nos Lemas 3.1 e 3.3.

Lema 3.1 ([4]). *Seja G um grafo conexo. Se G é uma exceção, então G não é decomponível.*

Demonstração. A conclusão é óbvia se G é um caminho de tamanho ímpar ou um ciclo de tamanho ímpar. Assim, assumamos que $G \in \mathcal{T}$. Suponha que G é um contraexemplo mínimo, ou seja, G é decomponível e não existe nenhum grafo em \mathcal{T} decomponível com menos arestas que G .

Seja H um triângulo em G formado pelos vértices u , v e w e considere uma decomposição localmente irregular de G . Note que não podemos ter as três arestas desse triângulo coloridas com a mesma cor, pois, caso contrário, garantiríamos dois vértices nesse triângulo com grau 2, ou dois vértices com grau 3 na mesma cor. Então, existe uma cor que aparece em apenas uma das arestas de H . Assumamos, sem perda de generalidade, que essa é a cor 1 e que $c(uv) = 1$. Note que, se todos os vizinhos de u e v estão em H , então existe uma aresta isolada em $G[E_1]^1$. Assim, assumamos sem perda de generalidade que $ux \in E(G)$ e que a cor de ux é 1.

Seja G_x a componente de $G - u$ que contém x , e note que $G' = G[V(G_x) \cup \{u, v\}]$ pertence a \mathcal{T} ou é um caminho de tamanho ímpar e, portanto, pela minimalidade de G , o grafo G' não é decomponível. Mas, como G é decomponível, então existe uma decomposição localmente irregular das arestas de G e podemos restringir essa decomposição apenas para as arestas que estão em G' , obtendo assim uma decomposição localmente irregular de G' , o que leva a uma contradição. \square

Para mostrar que grafos que não são exceções são decomponíveis (Lema 3.3), precisamos da seguinte ferramenta.

¹Lembrando que E_1 é o conjunto de todas arestas de $E(G)$ coloridas com a cor 1.

Lema 3.2 ([4]). *Seja G um grafo conexo cujo conjunto de arestas $E(G)$ pode ser particionado em dois subconjuntos não-vazios I e O tal que $G[I]$ e $G[O]$ são conexos. Se $|O| \geq 2$, então O contém duas arestas adjacentes uv e uw tal que $G - \{uv, uw\}$ é conexo.*

Agora provamos o último resultado desta seção.

Lema 3.3 ([4]). *Seja G um grafo conexo. Se G não é uma exceção, então G é decomponível.*

Demonstração. Seja G um grafo conexo. Suponha que G é um contraexemplo mínimo, ou seja, G não é uma exceção, não é decomponível e todo grafo com menos arestas do que G que não é uma exceção é decomponível. Note que claramente G não pode ter menos que 5 arestas, então assumamos que $|E(G)| \geq 5$.

Iremos mostrar que G não contém um vértice de grau 3 cuja vizinhança em G é um conjunto independente, e também não contém um vértice de grau pelo menos 4. Para fins de contradição, suponha que v é um tal vértice.

Se alguma componente C de $G - v$ tiver tamanho pelo menos 2, então, pelo Lema 3.2, existem duas arestas e_1 e e_2 adjacentes em C tais que $G' = G - \{e_1, e_2\}$ é conexo. Como $v \in V(G')$, note que G' não é uma exceção. Então, dado que G é um contraexemplo mínimo, G' é decomponível. Mas como $E(G) = E(G') \cup \{e_1, e_2\}$, e o grafo induzido pelas arestas e_1 e e_2 é localmente irregular, G também é decomponível, uma contradição.

Assuma agora que toda componente de $G - v$ possui no máximo uma aresta. Para cada uma dessas componentes que for uma aresta com ambos extremos incidentes a v , remova-a de G . O grafo restante é uma árvore que não é um caminho de tamanho ímpar e, portanto, é decomponível. Logo, G também é decomponível, uma contradição.

Sendo assim, temos $\Delta(G) \leq 3$ e todo vértice de grau 3 em G faz parte de pelo menos um triângulo. Iremos mostrar agora que G não contém nenhum ciclo com mais de 3 arestas. Para fins de contradição, assumamos que C é um desses ciclos.

Se alguma componente de $G - E(C)$ tiver tamanho pelo menos 2, então podemos usar o Lema 3.2 da mesma forma que descrevemos anteriormente para mostrar que G é decomponível, chegando a uma contradição.

Assuma que toda componente de $G - E(C)$ possui no máximo uma aresta. Como sabemos que todo vértice de grau 3 em G faz parte de pelo menos um triângulo, o grafo G é composto exatamente pelo ciclo C e zero ou mais arestas que ligam dois vértices deste ciclo formando um triângulo. Sendo assim, devem existir três vértices consecutivos u , v e w em C que formam um triângulo em G , pois caso contrário G seria um ciclo e, como sabemos que G não é uma exceção, G seria um ciclo par e, portanto, decomponível. Note que, a menos que $G - v$ seja um ciclo de tamanho ímpar, $G - v$ é decomponível e então G também é (dado que as arestas incidentes a v formam um P_3 ou um $K_{1,3}$ em G), uma contradição. Caso $G - v$ seja um ciclo de tamanho ímpar, então, se $d(v) = 2$, podemos

remover u e as arestas incidentes a u de G , e se $d(v) = 3$ e podemos remover um caminho de comprimento 2 formado por duas arestas incidentes a v diferentes de vw . Em ambos os casos o grafo restante é conexo e tem quantidade par de arestas, e portanto não é uma exceção e é decomponível. Como em ambos os casos removemos um grafo decomponível de G , então G também é decomponível, chegando novamente a uma contradição.

Sendo assim, sabemos que todo ciclo em G é um triângulo e que todo vértice de grau 3 em G faz parte de *exatamente* um triângulo. Note que G é muito similar aos grafos da família \mathcal{T} , exceto, possivelmente, pelo comprimento dos caminhos ligando triângulos a vértices de grau 1, e pelo comprimento dos caminhos ligando dois triângulos entre si. Portanto, sabemos que $\delta(G) = 1$ ou G contém um triângulo com dois vértices de grau 2.

Se $\delta(G) = 1$, então podemos escolher qualquer vértice u incidente a um vértice v com $d(v) = 1$ e remover de G as arestas uv e uw tal que v e w são os vértices de menor grau em $N(u)$. Iremos mostrar que o grafo resultante G' não é uma exceção. Suponha para fins de contradição que G' seja uma exceção. Então G' pode ser um caminho de tamanho ímpar ou um grafo da família \mathcal{T} no qual existe um caminho de tamanho par (possivelmente zero) ligando w a algum triângulo. Como G é igual a G' exceto pela adição de um P_3 , em ambos os casos podemos concluir que G também é uma exceção, o que é uma contradição. Sendo assim, G' não é uma exceção e, portanto, ambos G' e G são decomponíveis, o que é novamente uma contradição.

Por fim, podemos assumir sem perda de generalidade que, nesse caso, G contém um triângulo com dois vértices de grau 2. Podemos remover as duas arestas incidentes a qualquer um desses dois vértices e, usando um argumento similar ao usado no caso em que $\delta(G) = 1$, podemos mostrar que o grafo restante não é uma exceção e, portanto, é decomponível, e então G também é decomponível, uma contradição.

Sendo assim, mostramos que em todos os casos G é decomponível, e portanto não pode ser um contraexemplo mínimo, o que completa a demonstração. \square

Na Tabela 3.1 apresentamos os resultados mais relevantes relacionados à Conjectura 1.3. Note que ainda não conhecemos um limitante geral com poucas cores, dado que o melhor limitante conhecido para um grafo qualquer G é $\chi'_{irr}(G) \leq 220$ [18], e mesmo para famílias como grafos bipartidos ainda não sabemos se a conjectura é verdadeira.

Dentre os resultados exibidos na Tabela 3.1, nas próximas seções entramos em detalhes sobre alguns deles que utilizam ferramentas interessantes, começando pelo método probabilístico.

Tabela 3.1: Índice cromático irregular de algumas famílias de grafos.

Família	Resultados conhecidos
Qualquer grafo G	$\chi'_{irr}(G) \leq 220$ [18] $\chi'_{irr}(G) \leq 3$ se $\delta(G) \geq 10^{10}$ [22] $\chi'_{irr}(G) \leq 3\Delta(G) - 2$ se G não é regular [7]
Ciclo C_n	$\chi'_{irr}(C_{4n}) = 2$ e $\chi'_{irr}(C_{4n+2}) = 3$ para todo $n \leq 1$ [4]
Grafo completo K_n	$\chi'_{irr}(K_n) = 3$ [4] $\chi'_{irr}(K_n - e) = 2 \quad \forall e \in E(K_n)$ [4] $\chi'_{irr}(K_n - \{e, e'\}) = 2 \quad \forall e, e' \in E(K_n)$ [4]
Grafo bipartido completo $K_{p,q}$	$\chi'_{irr}(K_{p,q}) = 2$ se $p = q$ e $\chi'_{irr}(K_{p,q}) = 1$ se $p \neq q$ [4]
Árvore T	$\chi'_{irr}(T) \leq 3$ [4] Existe uma caracterização das árvores com $\chi'_{irr}(T) = 2$ e é possível verificar em tempo linear se $\chi'_{irr}(T) = 2$ [5]
Cacto C	$\chi'_{irr}(C) \leq 3$ se C não é isomorfo ao grafo gravata-borboleta [24]
Grafo bipartido G com bipartição (A, B)	Se G é regular com $\delta(G) \geq 3$, então $\chi'_{irr}(G) = 2$ [12] Para qualquer G bipartido, $\chi'_{irr}(G) \leq 7$, e se $d(v)$ é par pra todo $v \in A$, então $\chi'_{irr}(G) \leq 4$ [18]
Grafo subcúbico G	$\chi'_{irr}(G) \leq 4$ [18]
Grafo regular G de grau d	$\chi'_{irr}(G) \leq 3$ se $d \geq 10^7$ [4] $\chi'_{irr}(G) \leq 4$ se $d \geq 54000$ [23]
Grafo planar G	$\chi'_{irr}(G) \leq 15$ se $ E(G) $ é ímpar e $\chi'_{irr}(G) \leq 14$ se $ E(G) $ é par [7]
Grafo d -degenerado G	$\chi'_{irr}(G) \leq 3d + 1$ [7]
Grafo split G formado por clique C e conjunto independente I	Se $ C \geq 10$, então $\chi'_{irr}(G) \leq 3$ e sabemos caracterizar se $\chi'_{irr}(G) = 1$ e $\chi'_{irr}(G) = 2$ [17]

3.2 Método probabilístico

Os Teoremas 3.4 e 3.5 são ferramentas importantes na aplicação do método probabilístico, usado para limitar $\chi'_{irr}(G)$.

Teorema 3.4 (Lema Local de Lovász – Caso simétrico [3]). *Sejam A_1, A_2, \dots, A_n eventos em um espaço de probabilidade qualquer. Suponha que cada evento A_i é mutuamente independente de um conjunto contendo todos os outros eventos, exceto por no máximo D deles, e que $\mathbb{P}(A_i) \leq p$ para todo $1 \leq i \leq n$. Se $p \leq \frac{1}{e(D+1)}$, então temos*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}\right) > 0.$$

No método probabilístico, o Lema Local de Lovász geralmente é utilizado para garantir que, caso existam eventos “ruins” que desejamos evitar (por exemplo, dois vértices adjacentes com o mesmo grau), e que esses eventos tenham probabilidade suficientemente baixa e sejam em sua maioria mutuamente independentes, então garantidamente existe um cenário no qual nenhum destes eventos ocorre.

Teorema 3.5 (Desigualdade de Chernoff [20]). *Seja B uma variável aleatória com distribuição Binomial(n, p). Então para todo $0 \leq t \leq np$ temos*

$$\mathbb{P}(|B - np| > t) < 2e^{-t^2/(3np)}.$$

No método probabilístico, a desigualdade de Chernoff geralmente é utilizada para encontrar um limitante superior p para a probabilidade dos eventos que queremos evitar, e esse limitante será usado posteriormente no Lema Local de Lovász.

O Teorema 3.6 e o Corolário 3.7 também se mostraram muito úteis em outros problemas relacionados, e são ferramentas importantes para o resultado principal que apresentamos nesta seção.

Teorema 3.6 ([1]). *Suponha que, para um grafo G , escolhamos dois inteiros a_v^- e a_v^+ para cada vértice $v \in V(G)$ tais que*

$$a_v^- \in \left[\frac{d(v)}{3} - 1, \frac{d(v)}{2} \right] \quad a_v^+ \in \left[\frac{d(v)}{2} - 1, \frac{2d(v)}{3} \right].$$

Então existe um subgrafo gerador H de G tal que para todo vértice $v \in V(G)$ temos

$$d_H(v) \in \{a_v^-, a_v^- + 1, a_v^+, a_v^+ + 1\}.$$

Corolário 3.7. *Dados um grafo G , um inteiro positivo $\lambda \leq \frac{\delta(G)}{6}$, e qualquer função*

$t : V(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, \lambda - 1\}$, existe um subgrafo gerador H de G tal que

$$d_H(v) \in \left[\frac{d(v)}{3}, \frac{2d(v)}{3} \right]$$

e $d_H(v) \equiv t(v) \pmod{\lambda}$ ou $d_H(v) \equiv (t(v) + 1) \pmod{\lambda}$ para todo $v \in V(G)$.

Com essas ferramentas, estamos prontos para apresentar o resultado principal desta seção. Dado que nosso objetivo é mostrar como as ferramentas acima são usadas para a demonstração do teorema, alguns detalhes da demonstração serão omitidos. A demonstração completa está disponível no trabalho de Baudon, Bensmail, Przybyło, e Woźniak [4].

Teorema 3.8 ([4]). *Seja G um grafo d -regular com $d \geq 10^7$. Então $\chi'_{irr}(G) \leq 3$.*

Demonstração. Seja G um grafo d -regular com $d \geq 10^7$. Para cada $v \in V(G)$ escolha independentemente dois valores $c_1(v), c_2(v) \in \{0, 1, \dots, \lceil d^{0,35} \rceil - 1\}$ uniformemente ao acaso. Os valores de c_1 e c_2 serão usados com o Corolário 3.7 para encontrar subgrafos localmente irregulares de G que possuam grande quantidade de arestas. Para cada $v \in V(G)$, defina

$$A(v) = \{u \in N_G(v) : c_1(u) = c_1(v)\},$$

$$B(v) = \{u \in N_G(v) : c_2(u) = c_2(v)\},$$

$$C(v) = \{u \in N_G(v) : c_1(u) + c_2(u) \equiv (c_1(v) + c_2(v)) \pmod{\lceil d^{0,35} \rceil}\}, \text{ e}$$

$$D(v) = B(v) \cap C(v) = \{u \in N_G(v) : c_1(u) = c_1(v) \text{ e } c_2(u) = c_2(v)\}.$$

Agora, sejam A_v, B_v, C_v e D_v , respectivamente, os eventos $|A(v)| > 2d^{0,65}$, $|B(v)| > 2d^{0,65}$, $|C(v)| > 2d^{0,65}$ e $|D(v)| > 2d^{0,3} - 1$. Queremos evitar que esses eventos aconteçam, pois eles representam uma grande quantidade de vértices vizinhos com o mesmo grau. Podemos usar a desigualdade de Chernoff com $n = d$, $p = d^{-0,35}$ e $t = np = d^{0,65}$ para mostrar que

$$\mathbb{P}(A_v), \mathbb{P}(B_v), \mathbb{P}(C_v), \mathbb{P}(D_v) \leq 2e^{-2d^{0,3}/7}$$

para todo $v \in V(G)$, e então podemos usar o Lema Local de Lovász com $p = 2e^{-2d^{0,3}/7}$ e $D = 4d^2 + 3$ para mostrar que

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{v \in V} \overline{A_v} \cap \overline{B_v} \cap \overline{C_v} \cap \overline{D_v} \right) > 0$$

e portanto existe uma escolha de $c_1(v)$ e $c_2(v)$ para todo $v \in V(G)$ tal que

$$|A(v)|, |B(v)|, |C(v)| \leq 2d^{0,65} \text{ e } |D(v)| \leq 2d^{0,3} - 1.$$

Podemos então remover todas as arestas $uv \in E(G)$ tais que $c_1(u) = c_1(v)$, e chamar

o grafo resultante de G' . Pelo Corolário 3.7, existe um subgrafo H_1 de G' tal que

$$\begin{aligned} d_{H_1}(v) &\equiv 3\lfloor 2d^{0,3} \rfloor c_1(v) \pmod{3\lfloor 2d^{0,3} \rfloor \lceil d^{0,35} \rceil} \quad \text{ou} \\ d_{H_1}(v) &\equiv 3\lfloor 2d^{0,3} \rfloor c_1(v) + 1 \pmod{3\lfloor 2d^{0,3} \rfloor \lceil d^{0,35} \rceil} \end{aligned}$$

para todo $v \in V(G)$, e

$$\Delta(H_1) \leq \frac{2\Delta(G')}{3} \leq \frac{2d}{3}.$$

Note que, se $c_1(u) \neq c_1(v)$, então $d_{H_1}(u) \neq d_{H_1}(v)$. Isso vale para todo $uv \in E(G')$ por definição, e portanto também vale para todo $uv \in E(H_1)$, o que nos diz que H_1 é localmente irregular.

A parte final da demonstração usa argumentos similares para decompor as arestas restantes de G em dois subgrafos H_2 e H_3 e, então, mostrar que H_2 e H_3 são localmente irregulares, o que conclui a demonstração. \square

Além de apresentar o resultado que mostramos acima, a seguinte pergunta foi feita no trabalho de Baudon, Bensmail e Przybyło [4]:

Existe alguma constante D_0 tal que, se G é um grafo qualquer com grau mínimo $\delta(G) \geq D_0$, então $\chi'_{irr}(G) \leq 3$?

Alguns meses depois, essa pergunta foi respondida, usando também o método probabilístico.

Teorema 3.9 ([22]). *Para todo grafo G com $\delta(G) \geq 10^{10}$, vale que $\chi'_{irr}(G) \leq 3$.*

Note que esse resultado vale apenas para grafos com grau mínimo muito alto. Seria interessante conhecer algum limitante que sirva para qualquer grafo G , de modo que surge a seguinte pergunta:

Pergunta 3.1. *Existe alguma constante k tal que, para todo grafo decomponível G , temos $\chi'_{irr}(G) \leq k$?*

Note que essa é uma versão mais fraca da Conjectura 1.3. Na próxima seção apresentamos os resultados que permitiram responder essa pergunta, e o valor de k obtido.

3.3 Limitante superior para todos os grafos

A última pergunta feita na seção anterior foi respondida por Bensmail, Merker e Thomassen em 2017, com o seguinte teorema.

Teorema 3.10 ([8]). *Se G é um grafo decomponível, então $\chi'_{irr}(G) \leq 328$.*

A prova consiste em combinar as três seguintes ferramentas:

- É suficiente trabalhar com grafos de tamanho² par, usando apenas uma cor extra para transformar um grafo conexo de tamanho ímpar em um grafo no qual toda componente conexa tem tamanho par.
- Se G é um grafo bipartido no qual toda componente conexa tem tamanho par, então $\chi'_{irr}(G) \leq 9$.
- Se G é um grafo no qual toda componente conexa tem tamanho par, então $\chi'_{irr}(G) \leq 327$, pois G pode ser decomposto em um grafo H com $\chi'_{irr}(H) \leq 3$ e k grafos bipartidos B_1, \dots, B_k , com $k \leq 36$, nos quais toda componente conexa possui tamanho par (totalizando $\sum_{i=1}^k \chi'_{irr}(B_i) \leq 36 \cdot 9 = 324$ cores).

A seguir apresentamos os principais teoremas que dão origem a esses resultados.

3.3.1 Grafos com tamanho ímpar

Seja G um grafo qualquer. A subdivisão de uma aresta $uv \in E(G)$ é a operação que gera o grafo H no qual $V(H) = V(G) \cup \{w\}$ e $E(H) = E(G) \cup \{uw, vw\} \setminus \{uv\}$

Teorema 3.11 ([8]). *Seja G um grafo conexo com tamanho ímpar e $K''_{1,3}$ o grafo bipartido completo $K_{1,3}$ com duas arestas subdivididas. Se G é decomponível, então G contém um subgrafo H isomorfo ao $K_{1,3}$ ou $K''_{1,3}$ tal que toda componente conexa de $G - E(H)$ tem tamanho par.*

O Teorema 3.11 nos permite usar qualquer resultado que encontrarmos para grafos com tamanho par também em grafos com tamanho ímpar, aumentando o número de cores utilizadas em apenas 1.

3.3.2 Grafos bipartidos

Seja $G = (A, B)$ um grafo bipartido. Se para todo $v \in A$ temos que $d(v)$ é par, dizemos que G é A -par. Naturalmente estendemos essa notação para A -ímpar, B -par e B -ímpar.

Note que se G for A -par e B -ímpar, então G é localmente irregular. A ideia é remover alguns grafos bem comportados de G para obter um grafo que esteja muito próximo de ter essa estrutura. Esses subgrafos incluem um tipo particular de floresta e uma união específica de um ciclo e um caminho.

Lema 3.12 ([8]). *Seja F uma floresta A -par. Então, $\chi'_{irr}(F) \leq 2$, e existe uma coloração localmente irregular de F com duas cores na qual todo $v \in A$ é monocromático, ou seja, toda aresta incidente a v possui a mesma cor.*

Lema 3.13 ([8]). *Seja G um grafo decomponível formado pela união de um ciclo induzido C e um caminho P que começa em um vértice $v \in V(C)$. Então $\chi'_{irr}(G) \leq 4$.*

²Note que, conforme definido anteriormente, o tamanho de G é sua quantidade de arestas.

Lema 3.14 ([8]). *Seja G um grafo bipartido A -par. Então, $\chi'_{irr}(G) \leq 7$.*

A prova do Lema 3.14 consiste em mostrar que qualquer grafo bipartido e A -par G pode ser decomposto em três subgrafos: uma floresta A -par F , um grafo localmente irregular H , e uma união aresta-disjunta de um ciclo induzido C e um caminho P que começa em algum vértice $v \in V(C)$, resultando em $\chi'_{irr}(G) \leq \chi'_{irr}(F) + \chi'_{irr}(H) + \chi'_{irr}(C \cup P) \leq 2 + 1 + 4 = 7$.

Lema 3.15 ([8]). *Seja $G = (A, B)$ um grafo bipartido conexo de tamanho par. Existe uma floresta A -par ou B -par $F \subseteq G$ com todas as folhas em A tal que $G - E(F)$ é A -par.*

Os Lemas 3.14 e 3.15 levam diretamente aos resultados principais desta subseção.

Teorema 3.16 ([8]). *Se G é um grafo bipartido conexo de tamanho par, então vale que $\chi'_{irr}(G) \leq 9$.*

Corolário 3.17. *Se G é um grafo bipartido conexo não isomorfo a um caminho de tamanho ímpar, então vale que $\chi'_{irr}(G) \leq 10$.*

3.3.3 Grafos degenerados

Um grafo d -degenerado é aquele no qual todo subgrafo possui um vértice de grau no máximo d . A *degeneração* de um grafo G é o menor d tal que G é d -degenerado. A degeneração de um grafo mede o quão esparso ele é, e pode ser computada em tempo linear [19].

Saber decompor grafos d -degenerados em grafos localmente irregulares é útil para a obtenção de limitantes melhores para classes de grafos que podem ser facilmente decompostos em grafos d -degenerados e grafos com grau máximo limitado, dado que todo grafo G é $\Delta(G)$ -degenerado.

Teorema 3.18 ([8]). *Seja $d \geq 1$ um número natural. Se G é um grafo d -degenerado no qual toda componente conexa tem tamanho par, então G pode ser decomposto em $\lceil \log_2(d+1) \rceil + 1$ grafos bipartidos nos quais toda componente conexa tem tamanho par.*

Corolário 3.19. *Se G é um grafo conexo d -degenerado de tamanho par, então*

$$\chi'_{irr}(G) \leq 9 \cdot (\lceil \log_2(d+1) \rceil + 1).$$

A última ferramenta que precisamos para chegar ao resultado que vale para qualquer grafo decomponível é um teorema que nos permite reduzir um grafo qualquer a um grafo degenerado, apresentado a seguir.

Teorema 3.20 ([8]). *Seja d um número natural. Se G é um grafo conexo de tamanho par, então G pode ser decomposto em dois grafos D e H tal que D é $2d$ -degenerado, toda componente de D tem tamanho par, e $\delta(H) \geq d - 1$ ou H é vazio.*

Com essas ferramentas, é possível garantir a existência de uma coloração localmente irregular de qualquer grafo decomponível G com no máximo 328 cores da seguinte forma:

1. Se G tem tamanho ímpar, então pelo Teorema 3.11 é possível obter um grafo G' no qual toda componente conexa tem tamanho par. Caso contrário, $G' = G$.
2. Pelo Teorema 3.20 aplicado com $d = 10^{10} + 1$, é possível decompor G' em um grafo $(2 \cdot 10^{10} + 2)$ -degenerado D no qual toda componente conexa tem tamanho par e um grafo H cujo grau mínimo é pelo menos 10^{10} ou H é vazio.
3. Pelo Teorema 3.18, é possível decompor D em $k \leq 36$ grafos bipartidos B_1, \dots, B_k nos quais toda componente conexa tem tamanho par, e, pelo Teorema 3.16, temos $\chi'_{irr}(B_i) \leq 9$ para todo $1 \leq i \leq k$ e $\chi'_{irr}(D) \leq \sum_{i=1}^k \chi'_{irr}(B_i) \leq 36 \cdot 9 = 324$.
4. Pelo Teorema 3.9, temos $\chi'_{irr}(H) \leq 3$.
5. Portanto, $\chi'_{irr}(G) \leq 1 + \chi'_{irr}(D) + \chi'_{irr}(H) \leq 1 + 324 + 3 = 328$.

3.3.4 Estado da arte

Em 2018, Lužar, Przybyło, e Soták conseguiram melhorar o resultado para grafos bipartidos, consequentemente melhorando o resultado geral, e chegando aos melhores limitantes que conhecemos atualmente, descritos nos teoremas a seguir.

Teorema 3.21 ([18]). *Se G é um grafo bipartido no qual toda componente conexa tem tamanho par, então $\chi'_{irr}(G) \leq 6$.*

Teorema 3.22 ([18]). *Se G é um grafo decomponível, então $\chi'_{irr}(G) \leq 220$.*

3.4 Grafos subcúbicos

Seja G um grafo com $\Delta(G) \leq 3$. Dizemos que G é um *grafo subcúbico*. Estudar decomposições localmente irregulares de grafos subcúbicos é interessante, pois sabemos muito pouco a respeito de tais decomposições mesmo em grafos com grau máximo limitado. Além disso, usar a técnica de indução finita para provar resultados para grafos subcúbicos é difícil, pois todos os grafos não-decomponíveis são subcúbicos, então é comum ter que lidar com grafos não-decomponíveis ao tentar aplicar indução em grafos subcúbicos.

Para contornar esses problemas e chegar ao melhor resultado que conhecemos atualmente para grafos subcúbicos, Lužar, Przybyło e Soták [18] utilizaram uma estratégia interessante. Ao fortalecer a hipótese de indução, foi possível evitar lidar com grafos não-decomponíveis, além de garantir outras propriedades que foram úteis para a construção da prova.

Denotamos por $K''_{1,3}$ o grafo formado pela subdivisão de duas arestas do $K_{1,3}$. Chamamos o vértice de grau 3 do $K_{1,3}$ ou $K''_{1,3}$ e o vértice de grau 2 do P_3 de *vértice central* desses grafos. Seja G um grafo decomponível. Uma partição \mathcal{D} de $E(G)$ é *pertinente*

se cada elemento de \mathcal{D} é isomorfo ao P_3 , exceto por no máximo um elemento, que pode ser isomorfo ao $K_{1,3}$ ou ao $K''_{1,3}$. Uma partição \mathcal{D} de $E(G)$ é *fortemente pertinente* se \mathcal{D} é pertinente e, caso \mathcal{D} contenha algum elemento isomorfo ao $K''_{1,3}$, então G não possui nenhuma decomposição pertinente que não contém um $K''_{1,3}$.

Note que toda partição pertinente também é uma decomposição localmente irregular das arestas de G .

Teorema 3.23 ([18]). *Seja G um grafo subcúbico decomponível e \mathcal{D} uma partição fortemente pertinente das arestas de G . Então G admite uma coloração localmente irregular com no máximo 4 cores tal que:*

- *As arestas de cada elemento de \mathcal{D} são coloridas com a mesma cor;*
- *Se as arestas de dois elementos incidentes p_1 e p_2 de \mathcal{D} são coloridas com a mesma cor, então o vértice no qual p_1 e p_2 são incidentes é o vértice central de p_1 ou de p_2 .*

Sendo assim, vale que $\chi'_{irr}(G) \leq 4$.

A demonstração utiliza indução nos elementos de \mathcal{D} e, como para todo $F \in \mathcal{D}$ temos que $G - F$ é decomponível, nunca precisamos lidar com grafos não-decomponíveis ao longo da demonstração, o que a torna bem mais simples.

Capítulo 4

Nossos resultados

Conforme vimos anteriormente, um passo natural na direção da Conjectura 1.3 é tentar provar que, para algum k que seja o mais próximo possível de 3, temos $\chi'_{irr}(G) \leq k$ para todo grafo G decomponível. Também podemos restringir os grafos a alguma classe específica, como grafos bipartidos ou subcúbicos, de forma que seja possível usar a estrutura desses grafos para obter valores menores de k . Este capítulo está dividido em algumas seções, sendo que cada seção contém nossos resultados sobre uma classe de grafos. A última seção apresenta um limitante superior que vale para todo grafo decomponível.

4.1 Grafos subcúbicos

Conforme vimos na Seção 3.4, dizemos que um grafo G é subcúbico se $\Delta(G) \leq 3$. Durante nossa pesquisa, tentamos confirmar a Conjectura 1.3 para essa classe de grafos, obtendo alguns resultados intermediários que serviram para aumentar nosso entendimento sobre o problema.

Antes de apresentar esses resultados, iremos apresentar mais algumas definições. Dado um grafo G e $uv \in E(G)$, dizemos que uv é uma (x, y) -aresta se $d(u) = x$ e $d(v) = y$. Sejam $u \in V(G)$ e c uma coloração das arestas de G . Dizemos que u é *monocromático* se $c(uv)$ possui o mesmo valor para todo $v \in N(u)$. Dizemos que a cor i está *livre em u* se nenhuma aresta incidente a u foi colorida com a cor i , e que a cor i está *livre em uv* se nenhuma aresta incidente a u ou a v foi colorida com a cor i . Lembramos que uma k -lic de G é uma coloração localmente irregular de G usando no máximo k cores e que $d_i(v, c)$ é a quantidade de arestas incidentes a v que possuem a cor i em c , representado como $d_i(v)$ quando não há ambiguidade. Denotamos por \mathcal{X} o conjunto que contém todos caminhos de tamanho par e todos caminhos de tamanho ímpar com um triângulo em uma de suas extremidades. Note que, para todo $X \in \mathcal{X}$, existe uma 2-lic de X na qual cada cor induz uma floresta de P_3 e, portanto, vale que $\chi'_{irr}(X) \leq 2$. Dizemos que um caminho P foi pendurado em um grafo G para definir a operação que cria um novo grafo H ao identificar

um vértice de G com um vértice de grau 1 de P . Quando existe ambiguidade, deixamos explícito qual vértice de G está sendo usado.

O lema a seguir resolve a Conjectura 1.3 para uma subclasse de grafos subcúbicos.

Lema 4.1. *Se G é um grafo conexo subcúbico decomponível sem $(3, 3)$ -arestas, então vale $\chi'_{irr}(G) \leq 3$.*

Demonstração. Seja G um grafo conexo subcúbico decomponível sem $(3, 3)$ -arestas. Se $\Delta(G) = 2$, então G é um caminho de tamanho par ou um ciclo de tamanho par, e o resultado vale. Assim, suponha que $\Delta(G) = 3$ e seja $u \in V(G)$ com $d(u) = 3$ e $N_G(u) = \{u_1, u_2, u_3\}$. Como G não tem $(3, 3)$ -aresta, cada u_i pode ter no máximo um vizinho além de u . Caso exista, chamaremos tal vizinho de v_i . Iremos construir uma 3-lic c_G de G usando indução no número de arestas de G .

Se $|E(G)| = 3$, então G é isomorfo ao $K_{1,3}$ e a coloração é trivial. Assim, suponha que $|E(G)| > 3$ e seja $G' = G - u$. A prova será dividida em três casos, pois a forma como iremos construir c_G depende da quantidade de componentes conexas em G' .

Caso 1: G' tem três componentes conexas G_1, G_2 e G_3 .

Para cada G_i com $1 \leq i \leq 3$, se G_i é decomponível, então, pela hipótese de indução, temos $\chi'_{irr}(G_i) \leq 3$. Seja c_{G_i} uma 3-lic de G_i na qual a cor 1 é livre em u_i . Faça $c_G(e) = c_{G_i}(e)$ para todo $e \in E(G_i)$. Se G_i não é decomponível, faça $G'_i = G_i + uu_i$. Pela hipótese de indução, temos $\chi'_{irr}(G'_i) \leq 3$. Seja $c_{G'_i}$ uma 3-lic de G'_i na qual $c_{G'_i}(uu_i) = 1$. Faça $c_G(e) = c_{G'_i}(e)$ para todo $e \in E(G'_i)$. Para finalizar a coloração c_G , faça $c_G(uu_i) = 1$ para cada aresta uu_i que ainda não foi colorida. Note que isso faz com que $d_1(u) = 3$. A coloração obtida é localmente irregular pois, para todo $u_i \in N_G(u)$, temos $d_1(u_i) \in \{0, 2\}$.

Caso 2: G' tem duas componentes conexas G_1 e G_2 .

Suponha, sem perda de generalidade, que $u_1 \in V(G_1)$ e $\{u_2, u_3\} \subseteq V(G_2)$.

Caso 2.1: G_1 e G_2 são decomponíveis. Por hipótese de indução, $\chi'_{irr}(G_1) \leq 3$ e $\chi'_{irr}(G_2) \leq 3$. Seja c_{G_1} uma 3-lic de G_1 na qual a cor 1 é livre em u_1 e c_{G_2} uma 3-lic de G_2 na qual a cor 1 é livre em u_2 e u_3 (isso é possível pois $d_G(u_i) \leq 2$ para todo $u_i \in N_G(u)$). Faça $c_G(e) = c_{G_1}(e)$ para todo $e \in E(G_1)$ e $c_G(e) = c_{G_2}(e)$ para todo $e \in E(G_2)$. Para finalizar a coloração c_G , faça $c_G(uu_i) = 1$ para todo $u_i \in N_G(u)$. A coloração obtida é localmente irregular, pois para todo $u_i \in N_G(u)$ temos $d_1(u_i) = 0$.

Caso 2.2: G_1 não é decomponível e G_2 é decomponível. Faça $G'_1 = G_1 + uu_1$. Por hipótese de indução, G'_1 e G_2 admitem 3-lics. Sejam $c_{G'_1}$ e c_{G_2} tais colorações. Suponha, sem perda de generalidade, que $c_{G'_1}(uu_1) = 1$ e $c_{G_2}(u_2v_2) = 1$. Faça $c_G(e) = c_{G'_1}(e)$ para todo $e \in E(G'_1)$ e $c_G(e) = c_{G_2}(e)$ para todo $e \in E(G_2)$. Restam colorir as arestas uu_2 e uu_3 . Note que ambas são adjacentes apenas a arestas coloridas com a cor 1 e possivelmente mais uma cor e, portanto, existe uma cor i livre em ambas. Faça $c_G(uu_2) = c_G(uu_3) = i$, finalizando a coloração c_G .

Caso 2.3: G_1 é decomponível e G_2 não é decomponível. Faça $G'_2 = G_2 + uu_1 + uu_2 + uu_3$. Note que G'_2 é decomponível, pois $|E(G'_2)|$ é par. Se $|E(G_1)| \geq 1$, então $|E(G'_2)| < |E(G)|$ e, por hipótese de indução, $\chi'_{irr}(G_1) \leq 3$ e $\chi'_{irr}(G'_2) \leq 3$. Seja c_{G_1} uma 3-lic de G_1 na qual a cor 1 é livre em u_1 e seja $c_{G'_2}$ uma 3-lic de G'_2 na qual $c_{G'_2}(uu_1) = 1$. Faça $c_G(e) = c_{G_1}(e)$ para todo $e \in E(G_1)$ e $c_G(e) = c_{G'_2}(e)$ para todo $e \in E(G'_2)$, finalizando a coloração c_G .

Se $|E(G_1)| = 0$, então $G = G'_2$. Como G é conexo e $|E(G_2)| > 0$, então pelo menos um dos vértices u_2 e u_3 possui um vizinho em G_2 . Suponha, sem perda de generalidade, que $u_2v_2 \in E(G_2)$. Se $d_{G_2}(v_2) = 1$, então $v_2 = u_3$ e $E(G_2) = \{u_2u_3\}$, pois G não tem $(3,3)$ -aresta. Faça $c_G(uu_1) = c_G(uu_2) = 1$ e $c_G(uu_3) = c_G(u_2u_3) = 2$. Se $d_{G_2}(v_2) = 2$, então seja $G''_2 = G_2 - u_2v_2$. Note que, como G_2 não é decomponível, G''_2 é formado por uma componente com o vértice u_2 sem nenhuma aresta incidente e por outra componente decomponível, pois $|E(G''_2)|$ é par. Pela hipótese de indução, seja $c_{G''_2}$ uma 3-lic de G''_2 . Note que, como $d_{G''_2}(v_2) = d_{G''_2}(u_3) = 1$, existe uma mesma cor i livre em ambos v_2 e u_3 . Faça $c_G(e) = c_{G''_2}(e)$ para todo $e \in E(G''_2)$ e faça $c_G(uu_1) = c_G(uu_2) = c_G(uu_3) = c_G(u_2v_2) = i$, finalizando a coloração c_G . Se $d_{G_2}(v_2) = 3$, então v_2 está em um triângulo, e u_2v_2 é um caminho de tamanho ímpar pendurado nesse triângulo em G_2 , o que faz com que G_2 seja decomponível, uma contradição.

Caso 2.4: G_1 e G_2 não são decomponíveis. Suponha primeiro que $E(G_2) = \{u_2u_3\}$. Se G_1 é um caminho de tamanho ímpar, então G é formado pelo triângulo uu_2u_3 com um caminho de tamanho par pendurado em u . Se $G_1 \in \mathcal{T}$, então existe um caminho de tamanho ímpar ligando o triângulo uu_2u_3 com um triângulo em G_1 e, portanto, $G \in \mathcal{T}$. Em ambos os casos G não é decomponível, uma contradição. Suponha então que $E(G_2) \neq \{u_2u_3\}$.

Faça $G'_1 = G_1 + uu_1$ e $G'_2 = G_2 + uu_2$. Note que ambos G'_1 e G'_2 são decomponíveis e sem $(3,3)$ -aresta. Por hipótese de indução, $\chi'_{irr}(G'_1) \leq 3$ e $\chi'_{irr}(G'_2) \leq 3$. Seja c'_1 uma 3-lic de G'_1 na qual $c'_1(uu_1) = 1$ e c'_2 uma 3-lic de G'_2 na qual $c'_2(uu_2) = 1$. Se G_2 é um caminho de tamanho ímpar, então G'_2 é um caminho de tamanho par. Nesse caso, podemos assumir sem perda de generalidade que $c'_2(u_3v_3) \neq 1$. Faça $c_G(e) = c'_1(e)$ para todo $e \in E(G'_1)$ e $c_G(e) = c'_2(e)$ para todo $e \in E(G'_2)$ e $c_G(uu_3) = 1$. Note que c_G é uma 3-lic de G .

Assim, podemos assumir que $G_2 \in \mathcal{T}$. Faça $G''_2 = G_2 + uu_2 + uu_3$. Note que G''_2 é decomponível, pois existe um ciclo em G''_2 que não é um triângulo. Seja c''_2 uma 3-lic de G''_2 na qual $c''_2(uu_2) \neq 1$ e $c''_2(uu_3) \neq 1$ e faça $c_G(e) = c'_1(e)$ para todo $e \in E(G'_1)$ e $c_G(e) = c''_2(e)$ para todo $e \in E(G''_2)$, de modo que c_G é uma 3-lic de G .

Caso 3: G' é conexo.

Suponha que $u_1u_2 \in E(G)$. Como G' é conexo, então existe um caminho em G' ligando u_1 ou u_2 a u_3 . Portanto, temos $d_G(u_1) = 3$ ou $d_G(u_2) = 3$ e G tem $(3,3)$ -aresta, uma contradição. Suponha então que $G[\{u_1, u_2, u_3\}]$ não contém nenhuma aresta, pois o mesmo argumento valeria se u_1u_3 ou u_2u_3 existissem. Observe que v_1, v_2 e v_3 existem.

Caso 3.1: G' é decomponível. Suponha primeiro que $G'' = G' + uu_1$ é decomponível. Por hipótese de indução, temos $\chi'_{irr}(G'') \leq 3$. Seja $c_{G''}$ uma 3-liec de G'' na qual $c_{G''}(uu_1) = 1$. Se $c_{G''}(u_2v_2) \neq 1$ e $c_{G''}(u_3v_3) \neq 1$, faça $c_G(e) = c_{G''}(e)$ para todo $e \in E(G'')$ e faça $c_G(uu_2) = c_G(uu_3) = 1$, completando a coloração c_G . Então suponha que $c_{G''}(u_2v_2) = 1$. Note que uu_2 e uu_3 são incidentes apenas a arestas coloridas com a cor 1 e possivelmente mais uma cor e, portanto, existe uma cor i livre em ambas. Faça $c_G(uu_2) = c_G(uu_3) = i$, completando a coloração c_G .

Suponha então que G'' não é decomponível. Como $G[\{u_1, u_2, u_3\}]$ não contém nenhuma aresta, sabemos que G' não é um caminho de tamanho ímpar nem um ciclo de tamanho ímpar e, portanto, $G' \in \mathcal{T}$. Como G não tem $(3, 3)$ -aresta, todo triângulo em G só pode ter um vértice de grau 3. Como $d_{G''}(u) = 1$, então G'' só pode ser formado por um triângulo com um caminho de tamanho par pendurado em um de seus vértices. Note que u é o único vértice de grau 1 em G'' e, portanto, $d_{G''}(u_2) = 2$ e $d_{G''}(u_3) = 2$. Como $uu_2 \notin E(G'')$, então $d_G(u_2) = 3$ e uu_2 é uma $(3, 3)$ -aresta em G , uma contradição.

Caso 3.2: G' não é decomponível. Como $G[\{u_1, u_2, u_3\}]$ não contém nenhuma aresta, então sabemos que G' não é um caminho de tamanho ímpar nem um ciclo de tamanho ímpar e, portanto, $G' \in \mathcal{T}$. Como G não tem $(3, 3)$ -aresta, todo triângulo em G só pode ter um vértice de grau 3. Então G' é formado por um triângulo com um caminho de tamanho par pendurado em um de seus vértices ou por dois triângulos ligados por um caminho de tamanho ímpar. Em ambos os casos existe no máximo um vértice de grau 1 em G' . Então, existe um vértice $u_i \in N_G(u)$ com $d_{G'}(u_i) = 2$. Como $uu_i \notin G'$, então $d_G(u_i) = 3$ e uu_i é uma $(3, 3)$ -aresta em G , uma contradição. \square

Uma estratégia que utilizamos para tentar confirmar a Conjectura 1.3 para grafos subcúbicos é assumir que existe um contraexemplo mínimo, e então analisar a estrutura desse contraexemplo até chegar a uma contradição. Um grafo G é um contraexemplo mínimo se G é subcúbico decomponível com $\chi'_{irr}(G) > 3$ e, para todo grafo G' subcúbico decomponível com $|E(G')| < |E(G)|$, vale $\chi'_{irr}(G) \leq 3$. Durante nossa pesquisa, descobrimos que caso esse contraexemplo exista, valem as seguintes afirmações:

- G não possui vértice de corte, e portanto $\delta(G) \geq 2$;
- G é livre de triângulos;
- Todo vértice de G possui pelo menos um vizinho de grau 3;
- Se G contém um C_4 induzido, então os quatro vértices desse C_4 têm grau 3;
- G não contém um $K_{2,3}$ induzido;
- Pelo Lema 4.1, G contém uma $(3, 3)$ -aresta.

4.2 Grafos não decomponíveis

Os resultados nesta seção mostram que tivemos um bom progresso no entendimento sobre o índice cromático irregular de grafos que são obtidos ao adicionar ou remover uma aresta de um grafo não decomponível e sobre a estrutura das decomposições localmente irregulares desses grafos.

Lema 4.2. *Seja $G \in \mathcal{T}$ um grafo não decomponível e abc um triângulo em G no qual $d(a) = 2$. Existe uma 3-lic de $G - ab$ na qual cada cor induz uma floresta de P_3 e, portanto, $\chi'_{irr}(G - ab) \leq 3$.*

Demonstração. Seja $G \in \mathcal{T}$ um grafo não decomponível, abc um triângulo em G no qual $d(a) = 2$ e $G' = G - ab$. Iremos criar uma 3-lic $c_{G'}$ de G' usando indução no número k de operações feitas para gerar G , de acordo com a Definição 3.1.

Se $k = 0$, então G é isomorfo ao K_3 , e fazemos $c_{G'}(ac) = c_{G'}(bc) = 1$. Se $k \geq 1$, então G é o grafo gerado ao identificar os vértices $u \in V(H)$ e $v \in V(X)$, onde $H \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{X}$, $d_H(u) = 2$, $d_X(v) = 1$ e u pertence a um triângulo em H .

Se o triângulo abc pertence a H , então, por hipótese de indução, seja $c_{H'}$ uma 3-lic de $H - ab$ na qual cada cor induz uma floresta de P_3 . Vamos começar fazendo $c_{G'}(e) = c_{H'}(e)$ para toda $e \in E(H - ab)$. Como certamente há uma cor livre i em v , podemos colorir as arestas de X com 2 cores de forma que a aresta incidente a v recebe a cor i , finalizando a coloração $c_{G'}$. Note que a e v podem ser o mesmo vértice, mas isso não altera o resultado.

Se o triângulo abc pertence a X , então certamente X é um caminho de tamanho ímpar com um triângulo em uma de suas extremidades. Seja t um vizinho de u em H . Por hipótese de indução, seja $c_{H''}$ uma 3-lic de $H - ut$ na qual cada cor induz uma floresta de P_3 . Vamos começar colorindo $c_{G'}(e) = c_{H''}(e)$ para toda $e \in E(H - ut)$. Certamente há uma cor livre i em ut . Note que as arestas que ainda não foram coloridas em $c_{G'}$ são as arestas de $X - ab + ut$ que formam um caminho de tamanho par ou um $K_{1,3}$ com um caminho de tamanho ímpar ligado em uma de suas extremidades. Em ambos os casos, essas arestas podem ser coloridas com 2 cores de forma a colorir ut com a cor i sem criar nenhuma componente monocromática que não seja isomorfa ao P_3 , finalizando a coloração $c_{G'}$. \square

Lema 4.3. *Seja G um grafo não decomponível, $u \in V(G)$, $v \notin V(G)$ e seja $G' = G + uv$. Existe uma 3-lic de G' na qual cada cor induz uma floresta de P_3 e, portanto, temos $\chi'_{irr}(G') \leq 3$.*

Demonstração. Seja G um grafo não decomponível, $u \in V(G)$, $v \notin V(G)$ e seja $G' = G + uv$. Iremos construir uma 3-lic $c_{G'}$ de G' na qual cada cor induz uma floresta de P_3 .

Como G não é decomponível, então G é um caminho de tamanho ímpar, um ciclo de tamanho ímpar ou um grafo da família \mathcal{T} . Suponha primeiro que G é um caminho de

tamanho ímpar. Se $d_G(u) = 1$, então G' é um caminho de tamanho par, e a construção é trivial. Se $d_G(u) = 2$, então seja $N_G(u) = \{x, y\}$ e suponha, sem perda de generalidade, que a componente de $G - u$ que contém x é um caminho de tamanho ímpar. Então, faça $c_{G'}(uv) = c_{G'}(ux) = 1$. As arestas de G' que ainda não foram coloridas formam dois caminhos de tamanho par, que podem ser coloridos com as cores 2 e 3, obtendo uma 3-lic de G' na qual cada cor induz uma floresta de P_3 .

Suponha agora que G é um ciclo de tamanho ímpar. Seja $x \in N_G(u)$. Faça $c_{G'}(uv) = c_{G'}(ux) = 1$. As arestas de G' que ainda não foram coloridas formam um caminho de tamanho par, que pode ser colorido com as cores 2 e 3, obtendo uma 3-lic de G' na qual cada cor induz uma floresta de P_3 .

Suponha agora que $G \in \mathcal{T}$. Seja \mathcal{T}' a família contendo todos os grafos $H' = H + ab$, onde $H \in \mathcal{T}$, $a \in V(H)$ e $b \notin V(H)$. Por definição, temos $G' \in \mathcal{T}'$. Iremos construir a coloração $c_{G'}$ de G' por indução no número de arestas de G' .

Se $|E(G')| = 4$, então G é isomorfo ao K_3 , e a coloração já foi coberta no caso anterior. Suponha então que $|E(G')| \geq 5$ e que todo grafo $H' \in \mathcal{T}'$ com $|E(H')| < |E(G')|$ admite uma 3-lic na qual cada cor induz uma floresta de P_3 .

Caso 1: $d_G(u) = 1$. Seja $G^- = G - u$. Assim, $G^- \in \mathcal{T}'$ e, por hipótese de indução, G^- admite uma 3-lic c_{G^-} na qual cada cor induz uma floresta de P_3 . Faça $c_{G'}(e) = c_{G^-}(e)$ para toda $e \in E(G^-)$. Seja $N_G(u) = \{x\}$ e note que, como $d_{G^-}(x) = 1$, existe uma cor i livre em x . Faça $c_{G'}(uv) = c_{G'}(ux) = i$, finalizando a coloração.

Caso 2: $d_G(u) = 2$ e u não faz parte de um triângulo em G . Seja $N_G(u) = \{x, y\}$. Note que $G - ux$ ou $G - uy$ é formado por duas componentes conexas de tamanho par. Sem perda de generalidade, assumamos que seja $G^- = G - ux$. Cada uma dessas componentes pode ser um grafo da família \mathcal{T}' ou um caminho de tamanho par. Em ambos os casos, G^- admite uma 3-lic c_{G^-} na qual cada cor induz uma floresta de P_3 . Faça $c_{G'}(e) = c_{G^-}(e)$ para toda $e \in E(G^-)$. Novamente, existe uma cor i livre em x . Faça $c_{G'}(uv) = c_{G'}(ux) = i$, finalizando a coloração.

Caso 3: $d_G(u) = 2$ e u faz parte de um triângulo em G . Seja $N_G(u) = \{x, y\}$ e seja $G^- = G - ux$. Note que $G^- - uy \in \mathcal{T}$ e, portanto, $G^- \in \mathcal{T}'$. Sendo assim, podemos construir $c_{G'}$ da mesma forma que no caso anterior.

Caso 4: $d_G(u) = 3$. Seja $N_G(u) = \{x, y, z\}$ e suponha, sem perda de generalidade, que uxy é um triângulo em G . Note que o grafo $G^- = G - u$ é formado por duas componentes conexas H_1 e H_2 . Suponha, sem perda de generalidade, que $x, y \in V(H_1)$ e $z \in V(H_2)$. Faça $H'_1 = H_1 + ux + uy + uv$ e $H'_2 = H_2 + uz$. Note que H'_1 e H'_2 são grafos da família \mathcal{T}' , pois $H_1 + ux + uy \in \mathcal{T}$ e $H_2 \in \mathcal{T}$. Seja c_1 uma 3-lic de H'_1 na qual cada cor induz uma floresta de P_3 . Note que existem exatamente duas cores incidentes em u e, portanto, existe uma cor i livre em u . Seja c_2 uma 3-lic de H'_2 na qual cada cor induz uma floresta de P_3 e com $c_2(uz) = i$. Faça $c_{G'}(e) = c_1(e)$ para toda $e \in E(H'_1)$ e $c_{G'}(e) = c_2(e)$ para toda $e \in E(H'_2)$. Como $E(G') = E(H'_1) \cup E(H'_2)$, a coloração $c_{G'}$ está completa. \square

4.3 Grafos sunlet

Um grafo G é chamado de grafo *sunlet* se ele é composto por um ciclo C_n com um vértice de grau 1 pendurado em cada um dos vértices do C_n . Definimos que G é um *grafo quasi-sunlet* se G é composto por um ciclo C_n com *até* um vértice de grau 1 pendurado em cada um dos vértices do C_n e G contém ao menos um vértice de grau 1. A Figura 4.1 mostra um exemplo de grafo quasi-sunlet. Note que todo grafo sunlet é um grafo quasi-sunlet.

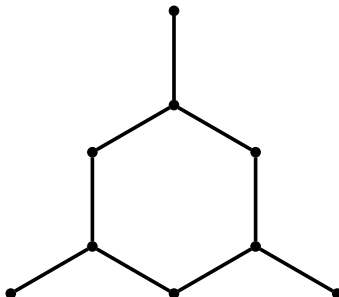


Figura 4.1: Exemplo de grafo quasi-sunlet.

Durante nossa pesquisa, provamos o seguinte resultado.

Lema 4.4. *Se G é um grafo quasi-sunlet, então temos $\chi'_{irr}(G) \leq 2$. Além disso, existe uma 2-licc de G na qual toda componente conexa monocromática é isomorfa ao P_3 , exceto no máximo uma componente que pode ser isomorfa ao $K_{1,3}$ com até duas arestas subdivididas.*

Demonstração. Seja G um grafo quasi-sunlet. Sejam v_1, \dots, v_n os vértices de G que estão no ciclo e u_i o vértice de grau 1 que está pendurado em v_i , quando for o caso. Suponha, sem perda de generalidade, que $d(v_1) = 3$, ou seja, $u_1 \in V(G)$.

Vamos definir a função indicadora $I : \{1, \dots, n\} \mapsto \{0, 1\}$ como $I(i) = 1$ se $u_i \in V(G)$ e $I(i) = 0$ caso contrário. Vamos também definir uma bijeção $\alpha : E(G) \mapsto \{1, \dots, |E(G)|\}$ como $\alpha(v_k u_k) = \sum_{i=1}^k I(i) + k - 1$ e $\alpha(v_k v_{k+1}) = \sum_{i=1}^k I(i) + k$. Vamos considerar que esses índices estão em módulo n (assim, $n + 1 \equiv 1$). Para cada $1 \leq i \leq |E(G)|$, definimos e_i como a aresta com $\alpha(e_i) = i$. Note que não existem duas arestas com o mesmo valor de α e, para qualquer $1 \leq i \leq |E(G)|$, as arestas e_i e e_{i+1} são adjacentes.

Vamos agora construir a coloração c_G de forma que ela seja uma 2-licc de G . Se $|E(G)| \not\equiv 3 \pmod{4}$, faremos $c_G(e_i) = 1$ se $i \equiv \{1, 2\} \pmod{4}$ e $c_G(e_i) = 2$ caso contrário. Note que c_G é uma 2-licc de G . Se $|E(G)| \equiv 0 \pmod{4}$, cada cor de c_G induz uma floresta de P_3 . Se $|E(G)| \equiv 1 \pmod{4}$, o mesmo vale, exceto pela componente que contém v_1 , que é isomorfa ao $K_{1,3}$. Se $|E(G)| \equiv 2 \pmod{4}$, o mesmo vale, exceto pela componente que contém v_1 , que é isomorfa ao $K_{1,3}$ com uma aresta subdividida.

Se $|E(G)| \equiv 3 \pmod{4}$, faremos $c_G(e_1) = c_G(e_2) = c_G(e_3) = 1$. Para as outras arestas de G , faremos $c_G(e_i) = 1$ se $i \equiv \{2, 3\} \pmod{4}$ e $c_G(e_i) = 2$ caso contrário. Novamente c_G

é uma 2-lic de G na qual cada cor induz uma floresta de P_3 , exceto pela componente que contém v_1 , que é isomorfa ao $K_{1,3}$ com duas arestas subdivididas. \square

4.4 Limitante superior para todos os grafos

Durante esse mestrado, buscamos melhorar o limitante superior geral para grafos decomponíveis e tentamos responder a seguinte pergunta, pois acreditamos que é possível usar ferramentas conhecidas para respondê-la.

Pergunta 4.1. *Seja G um grafo decomponível. Podemos afirmar que $\chi'_{irr}(G) \leq \Delta(G)+1$?*

Lembramos que o melhor limitante superior geral conhecido até o momento para grafos decomponíveis G é $\min\{220, 3\Delta(G) - 2\}$ [7, 18]. Assim, caso seja confirmada, a Pergunta 4.1 melhora esse limitante se e somente se $\Delta(G) < 219$.

O Lema 4.6 apresenta o melhor limitante superior geral que encontramos durante nossa pesquisa. Ele melhora o limitante apresentado no parágrafo anterior quando $2\Delta(G) - 1$ é menor que 220, ou seja, $\Delta(G) \leq 110$. O Lema 4.5 foi criado como uma ferramenta para facilitar a demonstração do Lema 4.6.

Nas próximas demonstrações iremos usar bastante a definição de cor livre, então lembramos que a cor i está livre em u se nenhuma aresta incidente a u foi colorida com a cor i , e que a cor i está livre em uv se nenhuma aresta incidente a u ou a v foi colorida com a cor i .

Lema 4.5. *Sejam G um grafo com $\Delta(G) \geq 4$, $v \in V(G)$ com $d(v) = \Delta(G)$ e c_H uma $(2\Delta(G) - 1)$ -lic de $H = G - v$. Existe uma cor $1 \leq i \leq 2\Delta(G) - 1$ que está livre em três vértices distintos de $N_G(v)$ em c_H .*

Demonstração. Seja $u \in N_G(v)$, $\sigma_{c_H}(u)$ a quantidade de cores livres em u em c_H e $\sigma_{c_H}(N_G(v)) = \sum_{u \in N_G(v)} \sigma_{c_H}(u)$. Como $d_H(u) \leq \Delta(G) - 1$, temos $\sigma_{c_H}(u) \geq \Delta(G)$. Então, temos $\sigma_{c_H}(N_G(v)) \geq \Delta(G)^2$.

Suponha que, para qualquer cor $1 \leq i \leq 2\Delta(G) - 1$, a cor i está livre em no máximo dois vértices de $N_G(v)$. Então, temos $\sigma_{c_H}(N_G(v)) \leq 2(2\Delta(G) - 1)$. Assim, temos que $\Delta(G)^2 \leq 2(2\Delta(G) - 1)$. Como essa equação só é verdadeira quando $\Delta(G) \leq 2 + \sqrt{2} < 4$, chegamos em uma contradição. \square

Lema 4.6. *Se G é um grafo decomponível, então $\chi'_{irr}(G) \leq 2\Delta(G) - 1$.*

Demonstração. A prova é por indução no número de arestas de G . Se $|E(G)| = 2$, então G é isomorfo ao P_3 e temos $\chi'_{irr}(G) = 1 \leq 2 \cdot 2 - 1 = 3$.

Seja G um grafo decomponível com $|E(G)| \geq 3$. Se G é um caminho ou ciclo de tamanho par, temos $\chi'_{irr}(G) \leq 3 \leq 2 \cdot 2 - 1 = 3$. Se $\Delta(G) \leq 3$, pelo Teorema 3.23,

temos $\chi'_{irr}(G) \leq 4 \leq 2 \cdot 3 - 1 = 5$. Suponha então que $\Delta(G) \geq 4$ e que para todo grafo decomponível H com $|E(H)| < |E(G)|$, temos $\chi'_{irr}(H) \leq 2\Delta(H) - 1$.

Seja $v \in V(G)$ com $d(v) = \Delta(G)$ e $N_G(v) = \{u_1, u_2, \dots, u_{\Delta(G)}\}$. Seja $H = G - v$ e sejam H_1, \dots, H_t as componentes conexas de H . A demonstração será dividida em dois casos. Por simplicidade, vamos estender a definição de grafo decomponível para grafos desconexos. Nesse caso diremos que H é decomponível se e somente se todas componentes conexas de H são decomponíveis.

Caso 1: H é decomponível. Pela hipótese de indução, temos $\chi'_{irr}(H) \leq 2\Delta(H) - 1 \leq 2\Delta(G) - 1$. Seja c_H uma $(2\Delta(H) - 1)$ -lic de H . Iremos criar uma $(2\Delta(G) - 1)$ -lic c_G de G .

Vamos começar colorindo $c_G(e) = c_H(e)$ para toda $e \in E(H)$. Note que, para todo $u \in N_G(v)$, existem no máximo $\Delta(G) - 1$ cores incidentes em u e, portanto, existem no mínimo $\Delta(G)$ cores livres em u . Então, existe ao menos uma cor $i_{x,y}$ que está livre em qualquer par $u_x, u_y \in N_G(v)$.

Se $\Delta(G)$ é par, faça $c_G(vu_x) = c_G(vu_{x+1}) = i_{x,x+1}$ para todo $x \in \{1, 3, \dots, \Delta(G) - 1\}$. Ao fim desse processo, c_G é uma $(2\Delta(G) - 1)$ -lic de G .

Se $\Delta(G)$ é ímpar, pelo Lema 4.5 existem três vértices $u_x, u_y, u_z \in N_G(v)$ com uma cor i livre em comum. Faça $c_G(vu_x) = c_G(vu_y) = c_G(vu_z) = i$. Resta colorir uma quantidade par de arestas, que podem ser coloridas da mesma forma que no caso anterior.

Caso 2: H não é decomponível. Seja k o número de componentes não decomponíveis de H e considere que H_1, \dots, H_k são tais componentes e que H_{k+1}, \dots, H_t são as componentes decomponíveis de H . Seja $H'_i = H_i + vx_i$ se $1 \leq i \leq k$ e $H'_i = H_i$ se $k+1 \leq i \leq t$, onde $x_i \in V(H_i) \cap N_G(v)$. Note que $V(H_i) \cap N_G(v)$ pode conter mais de um vértice, e iremos escolher apenas um sem perda de generalidade. Pela hipótese de indução, temos $\chi'_{irr}(H'_i) \leq 2\Delta(H'_i) - 1 \leq 2\Delta(G) - 1$.

Seja J um grafo qualquer e sejam c e c' duas colorações das arestas de J . Diremos que c' é *equivalente* a c se existe uma bijeção $f: \mathbb{N}^+ \mapsto \mathbb{N}^+$ na qual $c'(e) = f(c(e))$ para toda $e \in E(J)$. Note que c' é localmente irregular se e somente se c é localmente irregular, e c' e c usam a mesma quantidade de cores.

Seja $c_{H'_i}$ uma $(\chi'_{irr}(H'_i))$ -lic de H'_i e seja $c^j_{H'_i}$ uma coloração equivalente a $c_{H'_i}$ na qual $c^j_{H'_i}(vx_i) = j$ se $vx_i \in V(H'_i)$. Note que, se H_i não é decomponível, então, pelo Lema 4.3, $c^j_{H'_i}$ usa no máximo 3 cores. Além disso, iremos escolher $c^j_{H'_i}$ de forma que cada cor induz uma floresta de P_3 e, portanto, para todo $v \in V(H'_i)$ e para qualquer cor a , temos $d_a(v, c^j_{H'_i}) \leq 2$.

Caso 2.1: $k \leq \Delta(G) - 4$. Faremos $c_G(e) = c^i_{H'_i}(e)$ para todo $e \in E(H'_i)$ com $1 \leq i \leq t$. Pelo Lema 4.5 podemos colorir as arestas restantes de G da mesma forma que no Caso 1. Para cada cor $1 \leq i \leq k$ que foi usada para colorir alguma aresta no último passo, um conflito foi criado com uma aresta $vx_i \in E(H'_i)$. Para corrigir esse conflito, faça

$c_G(e) = c_{H'_i}^{L_i}(e)$ para todo $e \in E(H'_i)$, onde L_i é uma cor que estava livre em v . Note que isso sempre é possível pois existem $2\Delta(G) - 1$ escolhas possíveis para L_i e no máximo $\Delta(G)$ cores incidem em v a qualquer momento.

Caso 2.2: $k = \Delta(G) - 1$. Seja $vu_x \in E(G)$ a aresta que não está em nenhum H'_i . Suponha, sem perda de generalidade, que $u_x \in V(H_1)$. Seja c' uma coloração equivalente a $c_{H'_1}$ na qual a cor 1 está livre em u_x . Faremos $c_G(e) = c'(e)$ para toda $e \in E(H'_1)$ e $c_G(e) = c_{H'_i}^1(e)$ para toda $e \in E(H'_i)$ com $2 \leq i \leq t$. Então faremos $c_G(vu_x) = 1$, finalizando a coloração. Note que isso não criou nenhum conflito pois $d_1(v, c_G) \geq \Delta(G) - 1 \geq 3 > d_1(u_i, c_G)$ para todo $u_i \in N_G(v)$.

Caso 2.3: $k = \Delta(G) - 2$. Sejam $vu_x, vu_y \in E(G)$ as duas arestas que não estão em nenhum H'_i . Suponha que $u_x \in V(H_x)$ e $u_y \in V(H_y)$. É possível que $H_x = H_y$ e isso não altera a demonstração. Seja c' uma coloração equivalente a $c_{H'_x}$ na qual a cor 1 está livre em u_x e c'' uma coloração equivalente a $c_{H'_y}$ na qual a cor 1 está livre em u_y . Note que isso é possível mesmo quando $H_x = H_y$. Faremos $c_G(e) = c'(e)$ para todo $e \in E(H'_x)$, $c_G(e) = c''(e)$ para todo $e \in E(H'_y)$ e $c_G(e) = c_{H'_i}^1(e)$ para todo $e \in E(H'_i)$ com $1 \leq i \leq t$ e $i \notin \{x, y\}$. Então faremos $c_G(vu_x) = c_G(vu_y) = 1$, finalizando a coloração. Para mostrar que nenhum conflito foi criado, analisaremos dois casos. Primeiro, se $d_1(v, c_G) = 2$, então $k = 2$, e pela definição de c_G não existem arestas com a cor 1 incidentes a v , u_x ou u_y exceto por vu_x e vu_y . Finalmente, se $d_1(v, c_G) \geq 3$ não há conflito pois $d_1(u_i, c_G) < 3$ para todo $u_i \in N_G(v)$.

Caso 2.4: $k = \Delta(G) - 3$. Sejam $vu_x, vu_y, vu_z \in E(G)$ as três arestas que não estão em nenhum H'_i . Suponha, sem perda de generalidade, que a cor 1 está livre em u_x , u_y e u_z . Faremos $c_G(e) = c_{H'_i}(e)$ para todo $e \in E(H'_i)$ com $1 \leq i \leq t$ e faremos $c_G(vu_x) = c_G(vu_y) = c_G(vu_z) = 1$, finalizando a coloração c_G . Suponha então que não há nenhuma cor que está livre nos três vértices u_x , u_y e u_z .

Dado que qualquer $c_{H'_i}$ com $1 \leq i \leq k$ usa no máximo 3 cores, então temos $k < t$. Mais especificamente, temos $t = k + 1$ pois, se u_x , u_y e u_z não estivessem todos em H_t , seria possível construir c_G usando colorações equivalentes a $c_{H'_i}$ e $c_{H'_{t-1}}$ nas quais a cor 1 está livre em u_x , u_y e u_z , uma contradição.

Seja $H''_t = H'_t + vu_x$. Faremos $c_G(e) = c_{H''_t}^1(e)$ para toda $e \in E(H''_t)$. Suponha que $d_1(u_y, c_G) > 0$ ou $d_1(u_z, c_G) > 0$. Então, com uma contagem simples, podemos concluir que existe uma cor j que está livre em vu_y e vu_z . Faremos $c_G(vu_y) = c_G(vu_z) = j$ e faremos $c_G(e) = c_{H'_i}^j(e)$ para todo $e \in E(H'_i)$ com $1 \leq i \leq k$. Suponha então que $d_1(u_y, c_G) = 0$ e $d_1(u_z, c_G) = 0$. Faremos $c_G(vu_y) = c_G(vu_z) = 1$. Se $d_1(u_x, c_G) \neq \Delta(G)$, então faremos $c_G(e) = c_{H'_i}^1(e)$ para todo $e \in E(H'_i)$ com $1 \leq i \leq k$. Caso contrário, faremos $c_G(e) = c_{H'_i}^1(e)$ para todo $e \in E(H'_i)$ com $2 \leq i \leq k$ e $c_G(e) = c_{H'_1}^2(e)$ para todo $e \in E(H'_1)$, finalizando a coloração c_G . \square

Capítulo 5

Considerações finais

Nesta dissertação apresentamos os principais resultados obtidos sobre a *Conjectura 1-2-3* e decomposições localmente irregulares, que foram os tópicos que estudamos de forma aprofundada durante esse mestrado.

Apesar de a *Conjectura 1-2-3* ter sido resolvida em 2024 [16], muito esforço foi feito na literatura nos últimos anos para chegarmos nessa solução, e as técnicas desenvolvidas para obter os resultados intermediários que apresentamos podem ser úteis para resolver outros problemas adjacentes que ainda estão em aberto. Alguns desses problemas podem ser encontrados no trabalho de Bensmail [6].

A *Conjectura 1.3*, que foi refutada em 2021 [25], ainda é um tópico ativo de pesquisa, pois acredita-se que o grafo gravata-borboleta é o único contraexemplo para essa conjectura [24]. Os nossos resultados expandem o conhecimento que temos sobre algumas classes de grafos, como grafos subcúbicos, grafos sunlet e grafos obtidos ao adicionar ou remover uma aresta de um grafo não decomponível. Nesta dissertação também trouxemos um novo limitante superior para o índice cromático irregular de grafos decomponíveis, que é o melhor limitante conhecido atualmente para grafos com grau máximo igual ou inferior a 110.

Os caminhos mais importantes para pesquisas futuras envolvem encontrar limitantes superiores melhores para grafos decomponíveis quaisquer, e resolver a *Conjectura 1.3* para classes específicas de grafos como grafos subcúbicos e grafos bipartidos. Grafos bipartidos são uma classe especialmente importante pois, caso um limitante melhor seja encontrado, ele também produzirá um limitante geral melhor como corolário. Especificamente, se a *Conjectura 1.3* vale para todo grafo bipartido, então $\chi'_{irr}(G) \leq 111$ vale para todo grafo decomponível G .

Referências Bibliográficas

- [1] Addario-Berry, L., Dalal, K., McDiarmid, C., Reed, B.A., Thomason, A.: Vertex-colouring edge-weightings. *Combinatorica* **27**(1), 1–12 (2007)
- [2] Addario-Berry, L., Dalal, K., Reed, B.A.: Degree constrained subgraphs. *Discrete Applied Mathematics* **156**(7), 1168–1174 (2008)
- [3] Alon, N., Spencer, J.H.: *The probabilistic method*. John Wiley & Sons (2004)
- [4] Baudon, O., Bensmail, J., Przybyło, J., Woźniak, M.: On decomposing regular graphs into locally irregular subgraphs. *European Journal of Combinatorics* **49**, 90–104 (2015)
- [5] Baudon, O., Bensmail, J., Sopena, E.: On the complexity of determining the irregular chromatic index of a graph. *Journal of Discrete Algorithms* **30**, 113–127 (2015)
- [6] Bensmail, J.: A contribution to distinguishing labellings of graphs. Habilitation à diriger des recherches, Université côte d’azur (Dec 2020), <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-03081889>
- [7] Bensmail, J., Dross, F., Nisse, N.: Decomposing degenerate graphs into locally irregular subgraphs. *Graphs and Combinatorics* **36**, 1869–1889 (2020)
- [8] Bensmail, J., Merker, M., Thomassen, C.: Decomposing graphs into a constant number of locally irregular subgraphs. *European Journal of Combinatorics* **60**, 124–134 (2017)
- [9] Bondy, J.A., Murty, U.S.R., et al.: *Graph theory with applications*. Macmillan London (1976)
- [10] Chang, G.J., Lu, C., Wu, J., Yu, Q.: Vertex-coloring edge-weightings of graphs. *Taiwanese Journal of Mathematics* **15**(4), 1807–1813 (2011)
- [11] Dudek, A., Wajc, D.: On the complexity of vertex-coloring edge-weightings. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* **13**(3), 45–50 (2011)
- [12] Havet, F., Paramaguru, N., Sampathkumar, R.: Detection number of bipartite graphs and cubic graphs. Ph.D. thesis, INRIA (2012)
- [13] Kalkowski, M., Karoński, M., Pfender, F.: Vertex-coloring edge-weightings: towards the 1-2-3-conjecture. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **100**(3), 347–349 (2010)
- [14] Karoński, M., Łuczak, T., Thomason, A.: Edge weights and vertex colours. *Journal of Combinatorial Theory Series B* **91**(1), 151–157 (2004)
- [15] Keusch, R.: Vertex-coloring graphs with 4-edge-weightings. *Combinatorica* **43**(3), 651–658 (2023)
- [16] Keusch, R.: A solution to the 1-2-3 conjecture. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **166**, 183–202 (2024)
- [17] Lintzmayer, C.N., Mota, G.O., Sambinelli, M.: Decomposing split graphs into locally irregular graphs. *Discrete Applied Mathematics* **292**, 33–44 (2021)

- [18] Lužar, B., Przybyło, J., Soták, R.: New bounds for locally irregular chromatic index of bipartite and subcubic graphs. *Journal of Combinatorial Optimization* **36**(4), 1425–1438 (2018)
- [19] Matula, D.W., Beck, L.L.: Smallest-last ordering and clustering and graph coloring algorithms. *Journal of the ACM (JACM)* **30**(3), 417–427 (1983)
- [20] Molloy, M.S., Reed, B.: *Graph colouring and the probabilistic method*, vol. 23. Springer Science & Business Media (2002)
- [21] Pereira, W.D.L.: *Decomposição de grafos em subgrafos localmente irregulares*. Ph.D. thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro (2021)
- [22] Przybyło, J.: On decomposing graphs of large minimum degree into locally irregular subgraphs. arXiv preprint arXiv:1508.01129 (2015)
- [23] Przybyło, J.: Decomposability of regular graphs to 4 locally irregular subgraphs. arXiv preprint arXiv:2402.18739 (2024)
- [24] Sedlar, J., Škrekovski, R.: Local irregularity conjecture vs. cacti. *Discrete Applied Mathematics* **343**, 115–133 (2024)
- [25] Sedlar, J., Škrekovski, R.: Remarks on the local irregularity conjecture. *Mathematics* **9**(24) (2021). DOI [10.3390/math9243209](https://doi.org/10.3390/math9243209)
- [26] Thomassen, C., Wu, Y., Zhang, C.Q.: The 3-flow conjecture, factors modulo k , and the 1-2-3-conjecture. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **121**, 308–325 (2016)
- [27] Wang, T., Yu, Q.: On vertex-coloring 13-edge-weighting. *Frontiers of Mathematics in China* **3**(4), 581–587 (2008)