Bases Matemáticas - 2^o quadrimestre de 2010

Prof.ª Cecilia Chirenti

Lista 3 - Conjuntos II - Conjuntos Numéricos

1. Decida qual das afirmações abaixo é correta ou incorreta:

   (a) $\pi \in \mathbb{Q}$
   (b) $3 \in \mathbb{Z}$
   (c) $-3 \in \mathbb{N}$
   (d) $\sqrt{-1} \in \mathbb{Q}'$
   (e) $\sqrt{9} \in \mathbb{N}$
   (f) $-5 \in \mathbb{Z}$
   (g) $\sqrt{-3} \in \mathbb{R}$
   (h) $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}'$
   (i) $\frac{2}{3} \in \mathbb{Z}$
   (j) $2 \in \mathbb{Q}$

2. Use o princípio da indução finita para provar:

   (a) $\log(a_1 a_2 \cdots a_n) = \log a_1 + \log a_2 + \cdots + \log a_n$
   (b) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{(n+1)n}{2}$
   (c) $1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$, $r \neq 1$
   (d) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$
   (e) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$
   (f) $1(5) + 2(5)^2 + 3(5)^3 + \cdots + n(5)^{n-1} = \frac{5+(4n-1)5^{n+1}}{16}$
   (g) $x^{2n-1} + y^{2n-1}$ é divisível por $x + y$ para $n = 1, 2, 3, ...$
   (h) $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}x}$, $x \neq 0$, $x \neq \pm 2\pi$, $x \neq \pm 4\pi$, ...
   (i) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \cdots + \operatorname{sen} nx = \frac{\cos\frac{1}{2}x - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}x}$, $x \neq 0$, $x \neq \pm 2\pi$, $x \neq \pm 4\pi$, ...

3. Considere a fórmula do Binômio de Newton: $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$, onde os coeficientes binomiais são definidos como $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$, e temos $\binom{n}{0} = 1$ e $\binom{n}{n} = 1$.

   (a) Prove que $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

(b) Prove pelo princípio da indução finita que a fórmula do Binômio de Newton é válida para todo n natural.

4. Prove as seguintes propriedades dos coeficientes binomiais:

   (a) $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}$

   (b) $1 + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 2^n$

   (c) $1 - \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} - \cdots + (-1)^n \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 0$

   (d) $\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} + \cdots + n\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 2^{n-1}n$

5. Decida qual das afirmações abaixo é (a) sempre correta, (b) correta às vezes ou (c) incorreta. Considere aqui $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

   (a) $a \in \mathbb{Z}\,,\, b \in \mathbb{Q}$ e $a - b \in \mathbb{N}$

   (b) $a \in \mathbb{N}\,,\, b \in \mathbb{Z}$ e $ab \in \mathbb{Z}$

   (c) $a \in \mathbb{N}\,,\, b \in \mathbb{Q}'$ e $a/b \in \mathbb{Q}$

   (d) $a \in \mathbb{N}\,,\, b \in \mathbb{Q}'$ e $a + b \in \mathbb{Q}'$

   (e) $a \in \mathbb{Z}\,,\, b \in \mathbb{Q}$ e $a/b \in \mathbb{N}$

6. Considere os conjuntos $\mathbb{R}\,,\mathbb{Q}\,,\mathbb{Q}'\,,\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$. Quais destes conjuntos não são fechados pelas operacões de (1) adição e (2) multiplicação (exceto por 0)?

7. Resolva as inequações:

   (a) $x^2 + 3 > 0$

   (b) $x^2 + x + 1 < 0$

   (c) $x^2 + x + 1 \leq 0$

   (d) $x^2 + 5 \leq 0$

   (e) $(x - 3)(x^2 + 5) > 0$

   (f) $(2x + 1)(x^2 + x + 1) \leq 0$

   (g) $x(x^2 + 1) \geq 0$

   (h) $(1 - x)(x^2 + 2x + 2) < 0$

   (i) $\frac{2x-3}{x^2+1} > 0$

   (j) $\frac{x}{x^2+x+1} \geq 0$

8. Resolva as inequações:

   (a) $|x| \leq 1$

   (b) $|2x - 1| < 3$

   (c) $|3x - 1| < -2$

   (d) $|3x - 1| < \frac{1}{3}$

   (e) $|2x^2 - 1| < 1$

   (f) $|x - 3| < 4$

   (g) $|x| > 3$

   (h) $|x + 3| > 1$

   (i) $|2x - 3| > 3$

   (j) $|2x - 1| < x$

   (k) $|x + 1| < |2x - 1|$

   (l) $|x - 1| - |x + 2| > x$

   (m) $|x - 3| < x + 1$

   (n) $|x - 2| + |x - 1| > 1$

9. Elimine o módulo:

   (a) $|x+1|+|x|$

   (b) $|x-2|-|x+1|$

   (c) $|2x-1|+|x-2|$

   (d) $|x|+|x-1|+|x-2|$

10. Prove que é irracional: (a) $\sqrt{6}$ e (b) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

11. $x=\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ é racional ou irracional? Justifique.

12. Sejam x e y dois reais quaisquer, com $0<x<y$. Prove que $\sqrt{y-x}>\sqrt{y}-\sqrt{x}$.

13. Se $a^2+b^2=1$ e $c^2+d^2=1$, prove que $ac+bd\leq 1$.

14. Se $x>0$, prove que $x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}>x^n+\frac{1}{x^n}$, onde n é um inteiro positivo qualquer.

15. Prove:

   (a) $|x+y|\leq|x|+|y|$

   (b) $|x+y+z|\leq|x|+|y|+|z|$

   (c) $|x-y|\geq|x|-|y|$