Funções de Várias Variáveis - 2º quadrimestre de 2010

Prof.ª Cecilia Chirenti

Lista 3 - Diferenciação, regra da cadeia e funções homogêneas

1. Mostre pela definição que a função $f(x, y) = 3x^2 + 4y^2$ é diferenciável no ponto $(1, 1)$ e calcule a diferencial de f nesse ponto para $\Delta x = \Delta y = 0,01$.

2. Mostre pela definição que a função $f(x, y) = xy^2$ é diferenciável no ponto $(3, 4)$ e calcule a diferencial de f nesse ponto para $\Delta x = \Delta y = 0,001$.

3. Mostre pela definição que a função $f(x, y) = 2x + 3y$ é diferenciável no ponto $(5, 7)$ e calcule a diferencial de f nesse ponto para $\Delta x = 0,1$ e $\Delta y = 0,5$.

4. Dada a função $f(x, y) = x^2 + y$ calcule exatamente $f(1,01\,, 2,01) - f(1, 2)$. Calcule também a diferencial de f no ponto $(1, 2)$ para $\Delta x = \Delta y = 0,01$ e compare os resultados.

5. Dada a função $f(x, y) = ax + by + c$, mostre que f é diferenciável em qualquer ponto (x, y) e que a diferencial de f é exatamente igual a Δf quaisquer que sejam Δx e Δy (grandes ou pequenos).

6. Calcule df nos seguintes casos:

   (a) $f(x, y) = \frac{x^2}{x+y}$ (b) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$

7. Verifique se cada função é diferenciável nos pontos de seu domínio. Em caso afirmativo, calcule a diferencial de f num ponto (x_0, y_0).

   (a) $f(x, y) = 2x - y$
   (b) $f(x, y) = \ln(2x^2 + 3y^2)$
   (c) $f(x, y) = \cos(2x + y^3)$
   (d) $f(x, y) = x^2 \operatorname{sen} y$
   (e) $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$

8. O período de um pêndulo simples é $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Achar o erro cometido na apreciação de T, admitindo um erro de 1% na determinação de l e de g.

9. Determinando-se g por meio da fórmula $h = 1/2gt^2$, achar o erro resultando de um erro de 1% na medição de h e t.

10. O seno de um ângulo agudo de um triângulo retângulo deve ser calculado medindo a hipotenusa e o cateto oposto. Sejam $5cm$ e $4cm$ respectivamente os seus valores. Admitindo um erro possível de $0,5mm$ nas medições efetuadas, achar o erro máximo cometido na avaliação do seno. Qual o erro admissível na avaliação do ângulo?

11. Calcule a diferencial total de 2ª ordem.

(a) $z = y/x$

(b) $u = \ln \frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}$

12. Obtenha $\frac{dF}{dt}$ diretamente e pela regra da cadeia, sendo F a função composta de f com x e y:

    (a) $f(x,y) = 3x + 6y - 9\,, \quad x(t) = 3t\,, \quad y(t) = t^2 - 1$

    (b) $f(x,y) = 3x + y^2\,, \quad x(t) = \operatorname{sen} t\,, \quad y(t) = \cos t$

    (c) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)\,, \quad x(t) = 3t\,, \quad y(t) = t - 1$

    (d) $f(x,y) = e^{x+y}\,, \quad x(t) = t^2\,, \quad y(t) = 2t^3 - 1$

    (e) $f(x,y) = x^2y^3 + x^3y^2\,, \quad x(t) = \frac{1}{t}\,, \quad y(t) = \frac{1}{t^2}$

13. Encontre a equação da tangente às curvas abaixo, nos pontos indicados, e identifique cada curva:

    (a) $x^2 + y^2 = 1$, no ponto (x_0, y_0)

    (b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, no ponto (x_0, y_0)

    (c) $y^2 = 2ax - x^2$, no ponto $(0, a)$

    (d) $y^2 = 2ax$, no ponto $(\frac{a}{2}, a)$

14. Verifique se são homogêneas as seguintes funções e, em caso afirmativo, dê o grau de homogeneidade.

    (a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy \log \frac{y}{x}$

    (b) $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$

    (c) $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

    (d) $f(x,y) = e^{x+y}$

15. Mostre que, se $f(x,y)$ é homogênea de grau m, então

$$f(x,y) = x^m \phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

    onde $\phi\left(\frac{y}{x}\right)$ é uma função de $\frac{y}{x}$. (Sugestão: tome $\lambda = 1/x$.)

16. Verificar o teorema de Euler nas seguintes funções:

    (a) $f(x,y) = (x+y)^2$

    (b) $f(x,y) = \frac{x+y}{x^3+y^3}$

    (c) $z = x^3 \operatorname{sen}(y/x)$

    (d) $z = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x-y}$