Funções Complexas e Transformadas Integrais

Prof.ª Cecilia Chirenti

Lista 7 - Transformadas de Laplace

1. Encontre a transformada de Laplace das funções abaixo, usando as propriedades se necessário (mas sem usar a tabela):

   (a) $f(t) = \cosh at$
   (b) $f(t) = 2t^2 - t + 4$
   (c) $f(t) = \cos^2 at$
   (d) $f(t) = t^2 \cos t$
   (e) $f(t) = \begin{cases} t^3, & t < 5 \\ e^{2t}, & t > 5 \end{cases}$

2. Encontre a transformada de Laplace das funções abaixo (por qualquer método):

   (a) $f(t) = \operatorname{sen} t - \cos t$
   (b) $f(t) = e^{2t} \cos 3t$
   (c) $f(t) = \operatorname{senh}^2 t$
   (d) $f(t) = 2\Theta_1(t) - 4\Theta_5(t)$
   (e) $f(t) = \Theta_2(t) e^{t-2}$

3. Encontre a transformada inversa de Laplace das funções:

   (a) $F(s) = \frac{1}{s^4}$
   (b) $F(s) = \frac{1}{s(s-1)}$
   (c) $F(s) = \frac{3s}{s^2-2}$
   (d) $F(s) = \frac{e^{-5s}}{2s}$
   (e) $H(s) = \frac{se^{2s}}{(s^2+9)^2}$
   (f) $H(s) = \frac{3}{(s+2)(s^2+1)}$
   (g) $H(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)}$

4. Resolva as seguintes equações diferenciais pelo método da transformada de Laplace:

   (a) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} - 4y = 0$

   $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

   (b) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + y = e^t$

   $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = -3 \end{cases}$

   (c) $\dfrac{dy}{dt} + y = \cosh 2t$

   $\{\ y(0) = 3$

   (d) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 5\dfrac{dy}{dt} + y = t$

   $\begin{cases} y(0) = 3 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

(e) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + y = \operatorname{sen} 2t$

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = -0 \end{cases}$$

(f) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y = t^2 - \cosh 4t$

$$\begin{cases} y(0) = -1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

5. Resolva, pelo método da transformada de Laplace, o oscilador harmônico simples, com as condições iniciais

$$\begin{cases} X(0) = X_0 \\ X'(0) = V_0 \end{cases}$$

6. Resolva o oscilador harmônico forçado, utilizando a transformada de Laplace, para as forças

   (a) $f(t) = F_0 \cos \alpha t$

   (b) $f(t) = A_0 + A_1 t$

   (c) $f(t) = F_0 e^{-2t}$

   As condições iniciais são as mesmas do problema anterior.

7. Resolva o circuito RC sujeito a uma tensão externa $V = V_0$ usando a transformada de Laplace, com a condição inicial $q(0) = 0$.

8. Resolva o circuito RLC submetido à tensão

$$V = \begin{cases} V_0 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right), & t \leq \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases}$$

   com as condições iniciais

$$\begin{cases} q(0) = Q_0 \\ i(0) = I_0 \end{cases}$$

9. Use a fórmula complexa da inversão para calcular

   (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2 + a^2}\right\}$

   (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2 + a^2}\right\}$

   (c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\}$

10. Encontre a transformada inversa de Laplace de cada uma das seguintes funções, usando a fórmula complexa de inversão:

(a) $\dfrac{1}{(s+1)^2}$ (b) $\dfrac{1}{s^3(s^2+1)}$

11. Mostre que

$$F(s) = \frac{1}{s^2 - 3s + 2}$$

satisfaz as condições da fórmula complexa de inversão e encontre $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.