Nome:____

Funções Complexas e Transformadas Integrais

Prova 1 - 04/03/2011

1. (2,5ptos) Se $z = re^{i\theta}$ e $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$, onde r e θ são coordenadas polares, mostre que as equações de Cauchy-Riemann são

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

2. Seja $f(z)$ analítica em toda parte dentro de e sobre uma curva simples fechada C, exceto em $z = a$, um pólo de ordem n de $f(z)$.
   (a) (0,5ptos) Apresente a série de Laurent de $f(z)$ ao redor de $z = a$.
   (b) (1,0ptos) Prove que $\oint_C f(z)dz = 2\pi i a_{-1}$.
   (c) (1,5ptos) Mostre que $a_{-1} = \lim_{z\to a} \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-a)^n f(z)]$.

3. Para calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6 + a^6},$$

   siga os passos abaixo.
   (a) (1,0ptos) Considere a função $f(z) = (z^6 + a^6)^{-1}$. Encontre e classifique seus pólos.
   (b) (1,5ptos) Calcule a integral $\oint_C f(z)dz$ pelo teorema dos resíduos, usando o contorno C que consiste de um segmento ao longo do eixo dos x de $-R$ a R e do semicírculo Γ acima do eixo dos x.
   (c) (0.5ptos) Tomando o limite $R \to \infty$, encontre o valor da integral pedida acima.

4. (2,5ptos) Se a série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\right)$$

   converge uniformemente para $f(x)$ em $(-L, L)$, calcule os coeficientes a_0, a_n e b_n para $n = 1,\ 2,\ 3\ \ldots$