

Funções de Várias Variáveis

Prof.^a Cecilia Chirenti

Lista 2 - Derivadas Parciais e Plano Tangente

1. Seja $f(x, y) = x^2 + 3y^2$. Calcule pela definição (usando o limite) $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ no ponto $(3, 2)$.
2. Seja $f(x, y) = 4xy^2$. Calcule pela definição (usando o limite) $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ no ponto $(-1, 2)$.
3. Determine as derivadas parciais de $f(x, y)$ definida como

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y^4}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

4. Seja a função

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{\left(\frac{1}{x^2+y^2-1}\right)} & \text{se } x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{se } x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$

- (a) Esboce o gráfico de f .
- (b) Determine $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

5. Determine as derivadas parciais para as seguintes funções:

- | | |
|---|---|
| (a) $f(x, y) = 7x + 10y$ | (i) $f(x, y) = e^x + 2x^2 + 6y + 10$ |
| (b) $f(x, y) = x^2 + 3y^2$ | (j) $f(x, y) = \ln x + 4y^3 + 9$ |
| (c) $f(x, y) = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{y}$ | (k) $z = \ln \frac{x - \sqrt{x^2 - y^2}}{x + \sqrt{x^2 - y^2}}$ |
| (d) $f(x, y) = \frac{2}{x^3} - \frac{6}{y^2}$ | (l) $z = \arctg \frac{x+y}{1-xy}$ |
| (e) $f(x, y) = x^{1/2} + y^{1/2}$ | (m) $z = e^y \arcsen(x - y)$ |
| (f) $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ | (n) $z = (\tg y)^{1/x}$ |
| (g) $f(x, y) = 4x^2y$ | (o) $u = \sqrt{\left(\frac{y^2 - z^2}{y^2 + z^2}\right)^x}$ |
| (h) $f(x, y) = 10xy^2 + 5x^2y$ | |

6. Considere a função $f(x, y) = 2x + 3y$. Calcule $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$.
7. Se $f(x, y) = \arctg(xy) + \sen(xy) + xy + 1$, verifique que $x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.
8. Se $z = x^4 + \sen(x + y) - y \ln x$, verificar que $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial^2 x} - 2 \frac{\partial^3 z}{\partial^2 y \partial x} + \frac{\partial^3 z}{\partial^3 y} = \frac{1}{x^2}$.

9. Achar a equação do plano tangente e as equações da reta normal às superfícies abaixo no ponto indicado:
- (a) o cone $z^2 = x^2 + y^2$ no ponto $(3, 4, 5)$
 - (b) o parabolóide $z = xy$ no ponto $(2, 3, 6)$
 - (c) $x^2 + 4y^2 = 5z$ no ponto $(3, -2, 5)$
10. Determine o plano que passa pelos pontos $(1, 1, 2)$ e $(-1, 1, 1)$ e que seja tangente ao gráfico de $f(x, y) = xy$.
11. Achar os pontos da superfície $z = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9$, em que o plano tangente é paralelo ao plano xy .
12. A esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 50$ e o parabolóide hiperbólico $z = \frac{5}{12}xy$ passam pelo ponto $(3, 4, 5)$. Achar o ângulo formado pelos seus planos tangentes nesse ponto.