Nome:____

Álgebra Linear

Prova 1 - 11/03/2015

1. (2,5) Seja $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ o conjunto formado pelos elementos $a+b\sqrt{2}$ com $a, b \in \mathbb{Q}$. Dados $a+b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e $c+d\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, definimos a soma e o produto, respectivamente, como:

   - $(a+b\sqrt{2}) + (c+d\sqrt{2}) = (a+c) + (b+d)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$
   - $(a+b\sqrt{2}) \cdot (c+d\sqrt{2}) = (ac+2bd) + (ad+bc)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

   (a) Afirmamos que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ é um corpo. Determine o inverso de um elemento $a+b\sqrt{2} \neq 0$ em $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

   (b) Resolva o sistema abaixo em $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$:

$$\begin{cases} (2+3\sqrt{2})x_1 & -3x_2 & +x_3 & = 0 \\ (1-\sqrt{2})x_1 & & +\sqrt{2}x_3 & = 0 \end{cases}$$

2. (2,5) Sabe-se que uma matriz A é chamada *ortogonal* se $A^{-1} = A^t$. Determine x, y e z para que a matriz A dada abaixo seja ortogonal:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

3. (2,5) Seja $V = M_n(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes quadradas de dimensão $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$.

   (a) Mostre que o subconjunto U formado pelas matrizes anti-simétricas é subespaço de V.

   (b) Mostre que V é a soma direta dos subespaços U e W das matrizes simétricas e anti-simétricas, respectivamente.

   (c) Qual é a dimensão de V? E de U? E de W?

4. (2,5) Considere o espaço vetorial $\mathbb{C}^2$ dos pares ordenados de números complexos.

   (a) Mostre que os conjuntos $\{(1,0),(0,1)\}$, $\{(i,0),(2,-3)\}$ e $\{(i,i),(-1,2i)\}$ são bases de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$.

   (b) Mostre que $\{(1,0),(i,0),(0,1),(0,i)\}$ é uma base de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$.

   (c) Mostre que o conjunto do item (b) é lineramente dependente se considerarmos $\mathbb{C}^2$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Qual é a dimensão de $\mathbb{C}^2$?