Nome:____

Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias

Prova 1 - 04/11/2014

1. (2,5) Mostre, usando a regra da cadeia, que a solução de uma equação diferencial separável que pode ser escrita da forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)},$$

pode ser dada por

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + C.$$

Justifique todas as suas passagens.

2. (a) (0,5) A equação diferencial

$$(2x - y + 4)dy + (x - 2y + 5)dx = 0$$

é da forma $y' = \frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2y+b_2y+c_2}$. Classfique a equação diferencial dada e resolva o sistema

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0. \end{cases}$$

(b) (0,5) Usando α e β obtidos no item (a), faça a mudança de variáveis $x = u + \alpha$ e $y = v + \beta$ e obtenha uma equação diferencial homogênea.

(c) (0,5) Fazendo a mudança de variáveis $v = uw$, transforme a equação diferencial homogênea do item (b) em uma equação diferencial separável.

(d) (1,0) Resolva a equação diferencial separável obtida no item (c) e obtenha a solução na forma implícita para as variáveis x e y.

3. (2,5) Classifique e resolva a equação diferencial abaixo:

$$\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y - 3x^2}{y^4}dy = 0.$$

4. Um dos problemas famosos da matemática é o problema da braquistócrona (*brachisto* em grego significa a mais curta e *chronos* significa tempo): encontrar uma curva ao longo da qual uma partícula desliza sem atrito em um tempo mínimo de um ponto dado $P = (0, 0)$ até outro ponto $Q = (x_0, y_0)$, onde o segundo ponto está baixo do primeiro, mas não diretamente abaixo. (Orientamos o eixo y para baixo e o eixo x para a direita.) É possível mostrar que a curva de tempo mínimo é dada por uma função $y = f(x)$ que satisfaz a equação diferencial

$$(1 + y'^2)y = k^2,$$

onde k é uma constante a ser determinada mais tarde.

(a) (0,5) Resolva a equação dada para y'. Justifique o sinal da raiz.

(b) (0,5) Faça a mudança de variável dada por $y = k^2 \operatorname{sen}^2 t$ na equação obtida no item (a).

(c) (1,0) Fazendo $\theta = 2t$, mostre que a solução da equação encontrada no tem (b) para a qual $x = 0$ quando $y = 0$ é dada por

$$x = k^2(\theta - \operatorname{sen}\theta)/2, \quad y = k^2(1 - \cos\theta)/2.$$

(d) (0,5) O gráfico das equações obtidas no item (c) é chamado de ciclóide. Encontre um valor de k para o qual o ponto (1,0) pertence à ciclóide.