Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias

Prof.ª Cecilia Chirenti

Lista 7 - Equação de Cauchy-Euler e Sistemas de Equações Diferenciais Lineares. Espaço de fase e Estabilidade.

1. Determine uma solução geral das seguintes equações diferenciais

   (a) $x^2y'' + xy' - y = 0\,,$

   (b) $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0\,,$

   (c) $x^2y'' + xy' - 4y = 0\,,$

   (d) $x^2y'' - xy' + y = 0\,,$

   (e) $x^2y'' - xy' + 0,75y = 0\,,$

   (f) $xy'' - 3y' = 0\,,$

   (g) $x^2y'' + 0,25y = 0\,,$

   (h) $xy'' + y' = 0\,.$

2. Dada a equação de Cauchy-Euler,

$$x^2y'' + axy' + by = 0\,, \quad (a, b \text{ constantes}) \tag{1}$$

   reduza as equações abaixo à forma (1) e resolva:

   (a) $(x+1)^2y'' + 5(x+1)y' + 3y = 0\,,$

   (b) $(2x-3)^2y'' + 7(2x-3)y' + 4y = 0\,.$

3. Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

   (a) $x^2y'' + xy' - 0,25y = 0\,,\quad y(1) = 2\,,\quad y'(1) = 1\,.$

   (b) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0\,,\quad y(1) = 1\,,\quad y'(1) = 1\,.$

   (c) $x^2y'' + xy' - 2,25y = 0\,,\quad y(1) = 2\,,\quad y'(1) = 0\,.$

   (d) $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0\,,\quad y(1) = 0\,,\quad y'(1) = -2\,.$

4. Mostre que, fazendo-se $x = e^t$ $(x > 0)$, a equação de Cauchy-Euler (1) pode ser transformada na equação

$$\ddot{y} + (a-1)\dot{y} + by = 0\,,$$

   cujos coeficientes são constantes.

5. Resolva os seguintes sistemas de equações diferenciais:

   (a) $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 4x + y \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} \dot{x} + \dot{y} = \cos t \\ \dot{x} - \dot{y} = \operatorname{sen} t \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} \dot{x} + 4x + 6y = 0 \\ \dot{y} - y - x = 0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} \ddot{x} = y + 1 \\ \ddot{y} = x + t \end{cases}$ (f) $\begin{cases} \dot{x} - 2x + 2\dot{y} = 2 - 4e^{2t} \\ 2\dot{x} - 3x + 3\dot{y} - y = 0 \end{cases}$

6. Encontre a solução que satisfaz as condições dadas:

(a) $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 4y \\ \dot{y} = 4x - 3y \\ x(0) = 1,\ y(0) = 3 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \dot{x} - 2x - 3y = 2e^{2t} \\ -x + \dot{y} - 4y = 3e^{2t} \\ x(0) = -2/3,\ y(0) = 1/3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = -8x + 11y \\ x(0) = 1,\ y(0) = 1 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 4y - 5t^2 + 6t + 25 \\ \dot{y} = x + 2y - t^2 + 2t + 4 \\ x(0) = 0,\ y(0) = 0 \end{cases}$

7. No sistema de vibração autônomo controlado por $\ddot{y} + y = 0$, com $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 1$, uma solução geral é $y = A\cos t + B\operatorname{sen} t$. Qual é o raio do círculo correspondente no espaço de fase?

8. Considere a oscilação amortecida $y(t) = e^{-t}\operatorname{sen} t$. Grafe alguns pontos da curva correspondente no espaço de fase para obter a impressão de que esta deve ser uma espiral.

9. Resolva as equações abaixo e indique o tipo de curvas correspondentes no espaço de fase:

(a) $4\ddot{y} + y = 0$ (c) $\ddot{y} - y = 0$

(b) $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$ (d) $\ddot{y} - k^2 y = 0$

10. Reduza as equações abaixo à primeira ordem, resolva e construa os gráficos de algumas das curvas solução no espaço de fase:

(a) $\ddot{y} = \dot{y}$ (c) $y\ddot{y} + \dot{y}^2 = 0$

(b) $\ddot{y} + 3\dot{y} = 0$ (d) $\ddot{y} + \dot{y}^2 = 0$

11. O movimento de um pêndulo não amortecido de comprimento ℓ é controlado pela equação não-linear

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\operatorname{sen}\theta = 0\,,$$

onde g é a aceleração da gravidade na superfície da Terra. Construa o gráfico do espaço de fase, supondo $\ell = 2$ m e a curva correspondente à solução $\theta(t)$ para a qual $\theta(0) = 0$ e $\dot{\theta}(0) = 1$ m/s.

12. Uma solução geral do sistema $\dot{x} = x$, $\dot{y} = y$ é $x = Ae^t$, $y = Be^t$. Mostre que para cada escolha de A e B se obtém um raio dirigido a partir da origem (de modo que este ponto crítico é instável).

13. Resolva o sistema $\dot{x} = -x$, $\dot{y} = -y$ e verifique que (0,0) é um nó próprio estável.

14. Resolva o sistema $\dot{x} = x$, $\dot{y} = 2y$ e verifique que (0,0) é um nó impróprio instável. Que curvas representam as trajetórias no espaço de fase? Quais são as direções para as quais tendem as trajetórias na origem?

15. Resolva o sistema $\dot{x} = -x$, $\dot{y} = -2y$ e verifique que (0,0) é um nó impróprio atrativo e estável. Que curvas representam as trajetórias no espaço de fase?

16. No sistema do item acima, t representa o tempo. Introduza $\tau = -t$ como uma nova variável independente, resolva e compare com a solução do sistema dois ítens acima. O que significa esta transformação em termos da mecânica?

17. Mostre que uma solução do sistem $\dot{x} = x$, $\dot{y} = x + y$ é dada por $x = Ae^t$, $y = (At + B)e^t$ e estude os seus pontos críticos.

18. Resolva o sistem $\dot{x} = -x$, $\dot{y} = x - y$ e estude os seus pontos críticos.

19. Resolva o sistema $\dot{x} = x$, $\dot{y} = -y$ e mostre que as trajetórias curvas no espaço de fase representam ramos de hipérboles.

20. Resolva o sistema $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$ e verifique a solução possui um centro na origem.

21. Mostre que, a partir do sistema de primeira ordem

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + d \end{cases}$$

onde $ad - bc \neq 0$podemos obter uma equação diferencial de segunda ordem da forma $\ddot{x} - (a + d)\dot{x} + (ad - bc)x = 0$.

22. Exercícios dos Capítulos 8 (menos a parte de transformada de Laplace) e 10 do Zill & Cullen e dos Capítulos 7 e 9 do Boyce & DiPrima. (Resolver os sistemas pelo método da substituição!)