Geometria Analítica - Prof.ª Cecilia Chirenti

Lista 1 - Vetores

1. Verifique se é verdadeira ou falsa cada afirmação e justifique sua resposta:
   (a) $(A, B) \in \overrightarrow{AB}$
   (b) $(A, B) \sim (C, D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
   (c) $AB \parallel CD \Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$
   (d) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow A = C \quad \text{e} \quad B = D$

2. Verifique se é verdadeira ou falsa cada afirmação e justifique sua resposta:
   (a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow (A, C) \sim (B, D)$
   (b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow AC \cap BD = \emptyset$
   (c) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
   (d) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$
   (e) Se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, então existe um único plano contendo $A, B, C$ e $D$.
   (f) $(A, B) \sim (C, D) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$

3. $ABCD$ é um quadrilátero, $\overrightarrow{AD} = 3\vec{v}$, $\overrightarrow{BC} = 2\vec{v}$ e $\overrightarrow{AB} = \vec{w}$. Que tipo de quadrilátero é $ABCD$? Determine o lado $\overrightarrow{CD}$ e as diagonais $\overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{CA}$ em função de $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

4. $ABCD$ é um trapézio, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DC} = 2\vec{a}$ e $\overrightarrow{DA} = \vec{b}$. O ponto $E$ é tal que $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Escreva $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{DE}$ em função de $\vec{a}$ e de $\vec{b}$.

5. Calcule a soma de seis vetores que têm por representantes segmentos orientados com origem em cada um dos vértices, e extremidade no centro de um mesmo hexágono regular.

6. São dados $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\vec{c}$ e $\overrightarrow{BQ} = \frac{4}{5}\vec{a}$. Escreva $\overrightarrow{PQ}$ em função de $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$.

7. Quais são a origem e a extremidade de um representante do vetor $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{FA} - \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{FB}$? (Dica: não é necessário fazer uma figura para encontrar a resposta.)

8. Sejam $ABCD$ um quadrilátero, $O$ um ponto qualquer e $P$ o ponto médio do segmento que une os pontos médios das diagonais $AC$ e $BD$. Prove que $4\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.

9. Em um triângulo $ABC$, o ponto $M$ é tal que $3\overrightarrow{BM} = 5\overrightarrow{MC}$. Escreva o vetor $\overrightarrow{AM}$ em função dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

10. É dado o triângulo $ABC$ e o ponto $X$ sobre a reta $AB$ tal que $\overrightarrow{XB} = 4\overrightarrow{XA}$. Sejam $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ e $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$.

    (a) Determine o vetor $\overrightarrow{CX}$ em função de $\vec{b}$ e $\vec{c}$.

    (b) Seja $M$ o ponto médio de $\overrightarrow{CX}$. Escreva $\overrightarrow{BM}$ em função de $\vec{b}$ e $\vec{c}$.

11. Num triângulo $ABC$ temos $3\overrightarrow{BP} = 4\overrightarrow{PC}$ e $3\overrightarrow{PQ} = 4\overrightarrow{QA}$.

    (a) Localize numa figura os pontos $P$ e $Q$, justificando sua resposta.

    (b) A seguir, expresse $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{BQ}$ como combinações lineares de $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

12. Dado o triângulo $ABC$, tome $D$ na reta $BC$ tal que $C$ seja o ponto médio de $BD$ e $Y$ na reta $AC$ tal que as retas $AD$ e $BY$ sejam paralelas. Exprima $\overrightarrow{AY}$ em função de $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ e mostre que $C$ é o ponto médio de $AY$.

13. $ABCD$ é um paralelogramo de diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. O ponto $R$ é tal que $3\overrightarrow{DR} = 2\overrightarrow{CD}$ e $S$ é tal que $2\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{SC}$.

    (a) Marque $R$ e $S$ na figura.

    (b) Escreva $\overrightarrow{RS}$ em função de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$.

14. Seja $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ um hexágono regular de centro $O$.

    (a) Expresse $\overrightarrow{A_1A_i}$, $i = 2, \ldots, 6$, em função de $\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2}$ e $\vec{b} = \overrightarrow{A_1A_6}$;

    (b) mostre que $\sum_{i=2}^{6} \overrightarrow{A_1A_i} = 6\overrightarrow{A_1O}$;

    (c) expresse $\vec{w} = \overrightarrow{A_1A_5}$ em função de $\vec{u} = \overrightarrow{A_1A_4}$ e $\vec{b} = \overrightarrow{A_1A_3}$.

15. Dado o tetraedro $OABC$, tem-se $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$, $M$ é o ponto médio de $\overline{AB}$, $N$ é o ponto médio de $\overline{BC}$ e $Q$ é o ponto médio de $\overline{AC}$. Pede-se $\vec{s} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PN}$ em função de $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$.

16. Os pontos $A$, $B$, $C$ e $D$ são vértices consecutivos de um paralelogramo. $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$, $\overrightarrow{AD} = y$, $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\vec{x}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\vec{y}$ e $F$ é a intersecção de $\overline{PQ}$ e $\overline{AC}$. Escreva $\overrightarrow{QF}$ em função de $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

17. No trapézio $ABCD$, $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$, $\overrightarrow{AD} = 2\vec{v}$ e $E$ é o ponto de intersecção das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Sendo $\overrightarrow{BE} = \lambda\overrightarrow{BD}$, determine $\lambda$.

18. Exercícios do Capítulo 1 do livro Vetores e uma Iniciação à Geometria Analítica.

19. Exercícios dos Capítulos 1-5 do livro Geometria Analítica - um tratamento vetorial.