Geometria Analítica - Prof.ª Cecilia Chirenti

Lista 2 - Dependência Linear e Bases

1. Se possível, desenhe. Se impossível, explique por quê.
   (a) $(\vec{u},\vec{v})$ $\ell d.$, $(\vec{v},\vec{w})$ $\ell i.$ e $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ $\ell d.$;
   (b) $(\vec{u},\vec{v})$ $\ell d.$, $(\vec{v},\vec{w})$ $\ell i.$ e $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ $\ell i.$;
   (c) $(\vec{u},\vec{v})$ $\ell d.$, $(\vec{u},\vec{w})$ $\ell d.$ e $(\vec{v},\vec{w})$ $\ell i.$;
   (d) $(\vec{u},\vec{v})$ $\ell i.$, $(\vec{u},\vec{w})$ $\ell i.$ e $(\vec{v},\vec{w})$ $\ell d.$;

2. Verdadeiro ou falso. Explique.
   (a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ implica que A, B e C são colineares.
   (b) Se os 4 pontos A, B, C e D são não coplanares, então os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ também são não coplanares.

3. Prove que:
   (a) $(\vec{u},\vec{v})$ é $\ell d. \Rightarrow (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é $\ell d.$.
   (b) $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é $\ell i. \Rightarrow (\vec{u},\vec{v})$ é $\ell i.$.
   (c) $(\vec{u},\vec{v})$ é $\ell d. \Leftrightarrow (\vec{u}+\vec{v},\vec{u}-\vec{v})$ é $\ell d.$.

4. Sendo $3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}=0$, prove que $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ são $\ell d.$ para qualquer O.

5. Dados os vetores $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ e $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ tais que $2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}=0$, prove que os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são $\ell d.$.

6. Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ três vetores quaisquer, $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{v}=-\vec{b}-\vec{c}$ e $\vec{w}=\vec{a}-\vec{c}$. Prove que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são $\ell d.$.

7. Suponha que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ seja $\ell i.$. Dado $\vec{t}$, existem α,β e γ tais que $\vec{t}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}$. Prove: $(\vec{u}+\vec{t},\vec{v}+\vec{t},\vec{w}+\vec{t})$ é $\ell i. \Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma+1\neq 0$.

8. Sejam O, A, B e C quatro pontos tais que $\overrightarrow{OA}=\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{OB}=3\vec{a}-2\vec{b}$ e $\overrightarrow{OC}=2\vec{a}+m\vec{b}$. Sendo $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores $\ell i.$, determine m para que os vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BC}$ sejam $\ell d.$. Ilustre o problema com um desenho.

9. No $\triangle ABC$ temos $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $3\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PC}$ e $\overrightarrow{BQ}=\lambda\overrightarrow{BC}$. Determine λ para que $\overrightarrow{PQ}$ fique paralelo ao vetor $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$.

10. Dados os vetores $\vec{a}=(5,-1,0)$, $\vec{b}=(2,0,1)$ e $\vec{c}=(0,1,3)$, escreva o vetor $\vec{x}=(2,-1,-1)$ como combinação linear de $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$.

11. É possível escrever $(0,0,1)$ como combinação linear de $(1,2,1)$, $(1,0,1)$ e $(1,1,1)$? Se quatro vetores de V^3 são sempre $\ell d.$, como interpretar a resposta anterior?

12. Os vetores $\vec{u} = (a, -1, b+1)$ e $\vec{v} = (4, a-5, b-1)$ são paralelos. Determine as coordenadas de $\vec{u} + \vec{v}$.

13. $\overrightarrow{OA} = (4, -3, -1)$, $\overrightarrow{OB} = (-5, 3, -7)$ e $\overrightarrow{OC} = (1, y, z)$. Determine y e Z sabendo que C pertence à reta AB.

14. Sejam $\vec{u} = (m, -1, m^2+1)$, $\vec{v} = (m^2+1, m, 0)$ e $\vec{w} = (m, 1, 1)$. Mostre que $C = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma base de V^3, independentemente do valor de m.

15. Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base. Sejam $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ e $\vec{f}_3 = -2\vec{e}_3$.
    (a) Mostre que $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ também é uma base.
    (b) Resolva $(x, y, z)_E = (3, -2, 4)_F$.
    (c) Determine na base F as coordenadas de $\vec{v} = (1, 2, -1)_E$.

16. Seja $B = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ uma base de V^3.
    (a) Demostre que $C = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$, com $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3$, $\vec{v}_2 = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 - \vec{u}_3$ e $\vec{v}_3 = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + 4\vec{u}_3$, é base de v^3.
    (b) Se $\vec{a} = (1, -3, 2)_B$, quais são as coordenadas de $\vec{a}$ na base C?
    (c) Se $\vec{b} = (-1, 1, 2)_C$, quais são as coordenadas de $\vec{b}$ na base B?

17. Dadas as bases: $E = ((-1,1,0)_B, (1,1,2)_B, (-1,0,1)_B)$ e $F = ((0,1,1)_E, (1,2,-1)_E, (2,-1,0)_E)$, determine na base B as coordenadas de $\vec{v} = (-1,2,-3)_E - (-2,1,1)_F$.

18. Exercícios do Capítulo 2 do livro Vetores e uma Introdução à Geometria Analítica.

19. Exercícios dos Capítulos 6, 7 e 8 do livro Geometria Analítica - um tratamento vetorial.