Nome:____

Geometria Analítica - Prova 1 - Turma A - 16/03/2017

PARTE A - TESTES: Marque as respostas nesta folha, e justifique as alternativas na folha de respostas. Alternativas corretas sem justificativa ou com justificativas incorretas não serão consideradas.

1. (1,0 ponto) Sejam $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $C = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ duas bases de V^3. Assuma que B seja ortonormal e que $\vec{f}_1 = \vec{e}_2$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$ e $\vec{f}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$. Considere as seguintes afirmações:

   (I) os vetores $(1, -2, 1)_B$ e $(2, 1, 3)_C$ são linearmente independentes;

   (II) os vetores $(1, -2, 1)_B$ e $(2, 1, 3)_C$ são ortogonais;

   (III) as bases B e C não têm a mesma orientação.

   Assinale a alternativa correta:

   (a) todas as afirmações são verdadeiras;

   (b) apenas a afirmação (II) é verdadeira.

   (c) apenas a afirmação (I) é verdadeira.

   (d) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;

   (e) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

2. (1,0 ponto) Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$ vetores distintos e seja $L = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$. Considere as seguintes afirmações:

   (I) se $\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$ então L é ℓi ;

   (II) se $\vec{v}$ não é combinação linear de $\vec{u}$ $\vec{w}$ então L é linearmente independente;

   (III) se $\vec{u} + \vec{v}$ é paralelo a $\vec{w}$ então L é linearmente dependente.

   Assinale a alternativa correta:

   (a) todas as afirmações são verdadeiras;

   (b) apenas a afirmação (II) é verdadeira.

   (c) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;

   (d) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;

   (e) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;

3. (1,0 ponto) Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$ vetores unitários linearmente independentes. Sejam α e β, respectivamente, os ângulos entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Suponha que tais ângulos sejam agudos. Então, $||\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} \times \text{proj}_{\vec{v}}\vec{w}||$ é igual a:

   (a) $2\text{sen}\,(2\beta)\cos(\alpha)$;

   (b) $\frac{1}{2}\text{sen}\,(\alpha) + \cos(\beta)$;

   (c) $2\text{sen}\,(\beta)\cos(2\alpha)$;

   (d) $\frac{1}{2}\text{sen}\,(2\alpha)\cos(\beta)$;

   (e) $\frac{1}{2}\text{sen}\,(\alpha)\cos(2\beta)$;

4. (1,0 pto) Seja B uma base ortonormal de V^3. Se $\vec{u}, \vec{v} \in v^3$ são tais que:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (2, -1, 2)_B \,, \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 3\sqrt{2} \,,$$

pode-se afirmar que:

(a) $||\vec{u}||||\vec{v}|| = 3\sqrt{2}$;
(b) $||\vec{u}||||\vec{v}|| = 4\sqrt{3}$;
(c) $||\vec{u}||||\vec{v}|| = 2\sqrt{3}$;
(d) $||\vec{u}||||\vec{v}|| = 2\sqrt{2}$.
(e) $||\vec{u}||||\vec{v}|| = 3\sqrt{3}$;

5. (1,0 ponto) Seja B uma base ortonormal de V^3 e considere os vetores $\vec{u} = (1, -1, 1)_B$ e $\vec{v} = (1, 0, 1)_B$. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se o vetor $\vec{w} = (a, b, c)_B$ é tal que $||\vec{w}|| = 3$, $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{v}$ e o cosseno do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{w}$ é $1/3$, então podemos afirmar que

(a) $a = 3$ ou $a = -3$
(b) $a = \sqrt{3}$ ou $a = -\sqrt{3}$
(c) $a = \sqrt{3}/3$ ou $a = -\sqrt{3}/3$
(d) $a = 3\sqrt{3}$ ou $a = -3\sqrt{3}$
(e) $a = 1/3$ ou $a = -1/3$

PARTE B - DISCURSIVA: Faça seus cálculos na folha de respostas.

1. (2,5 ptos) Prove que o segmento de reta que une os pontos médios das diagonais de um trapézio é paralelo às bases e igual à semidiferença desta (veja a figura abaixo).

2. (2,5 ptos)Dados $\vec{a} = (0, 1, 2)$ e $\vec{b} = (1, -1, 0)$, determine uma base ortonormal de orientação positiva $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ tal que seu primeiro vetor seja paralelo a $\vec{b}$ e o segundo, uma combinação linear de $\vec{a}$ e $\vec{b}$.