Nome:____

Funções de Várias Variáveis - Turma A

Prova 1 - 11/07/2018

Resolva TODOS os TRÊS exercícios abaixo:

1. (2,5) Determine o domínio e a imagem da função

$$z(x,y) = \frac{x-y}{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}$$

Represente graficamente os resultados encontrados. Justifique suas passagens.

2. (2,5) Determine a para que a função $f(x,y)$ dada abaixo seja contínua em todo o seu domínio. Justifique a sua resposta.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 \cos x \sin y}{x^2+y^2}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ a^2 + 2a + 1\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

3. (2,5) Determinando-se g por meio da fórmula $h = 1/2gt^2$, achar o erro resultando de um erro de 1% na medição de h e t. Para fazer a propagação de erros de uma função $f(x,y,z,\cdots)$, use a fórmula:

$$\sigma_f^2 = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2 + \cdots}$$

Resolva UM dos DOIS exercícios abaixo:

4. (2,5) Seja a função $z(x,y) = \sqrt{2x^2+3y^2}$. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de $z(x,y)$ em um ponto (x_0, y_0, z_0) qualquer do gráfico, e determine (caso existam), os pontos onde o plano tangente será paralelo ao plano xy. Esboce o gráfico da função para ilustrar os seus resultados, e discuta o plano tangente no ponto (0,0,0).

5. (2,5) O operador *Laplaciano* é denotado pelo símbolo ∇^2 e é definido em duas dimensões pela sua ação sobre uma função $f(x,y)$ da seguinte forma:

$$\nabla^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,.$$

Considere agora que x e y sejam funções de ρ e ϕ dadas pelas equações das *coordenadas polares*: $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho \operatorname{sen}\phi$. Use a regra da cadeia e a derivada da função implícita para mostrar que $\nabla^2 f(\rho,\phi)$ pode ser escrito como:

$$\nabla^2 f(r,\phi) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}\,.$$