Sequências e Séries

Prof.ª Cecilia Chirenti

Lista 1 - Sequências e Limites de Sequências

1. Escreva os 4 primeiros termos das sequências abaixo ($n = 1, 2 \cdots$):

   (a) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

   (b) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$

   (c) $a_n = \frac{(2x)^{n-1}}{(2n-1)^5}$

   (d) $a_n = \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$

   (e) $a_n = \frac{\cos nx}{x^2+n^2}$

2. Encontre um possível n-ésimo termo para as seqüências cujos primeiros 5 termos se indicam e encontre o 6o. termo:

   (a) $\frac{-1}{5}, \frac{3}{8}, \frac{-5}{11}, \frac{7}{14}, \frac{-9}{17}, \cdots$

   (b) $1, 0, 1, 0, 1, \cdots$

   (c) $\frac{2}{3}, 0, \frac{3}{4}, 0, \frac{4}{5}, \cdots$

3. A seqüência de Fibonacci é dada por $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ e $u_1 = 1$, $u_2 = 1$.

   (a) Ache os primeiros 6 termos.

   (b) Mostre que o n-ésimo termo é dado por $u_n = (a^n - b^n)/\sqrt{5}$ onde $a = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, $b = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$.

4. Usando a definição de limite, prove que:

   (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{4-2n}{3n+2} = \frac{-2}{3}$

   (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^4+1}{n^2} = \infty$

   (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n} = 0$

5. Determine o menor $N > 0$ tal que $|(3n+2)/(n-1) - 3| < \varepsilon$ para todo $n > N$ se

   (a) $\varepsilon = 0,01$

   (b) $\varepsilon = 0,001$

   (c) $\varepsilon = 0,0001$

6. Usando a definição de limite, prove que $\lim_{n\to\infty} (2n-1)/(3n+4)$ não pode ser $\frac{1}{2}$.

7. Prove que $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = A/B$ se $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = B \neq 0$.

8. Calcule os seguintes limites, aplicando as propriedades:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{4-2n-3n^2}{2n^2+n}$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n^2-5n+4}}{2n-7}$

(c) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n}-n)$

(d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{(3-\sqrt{n})(\sqrt{n}+2)}{8n-4}}$

(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot 10^n - 3\cdot 10^{2n}}{3\cdot 10^{n-1}+2\cdot 10^{2n-1}}$

(f) $\lim_{n\to\infty} (2^n+3^n)^{1/n}$

9. Prove que a seqüência $u_n = \sqrt{n}/(n+1)$

(a) é monótona decrescente,

(b) é limitada inferiormente,

(c) é limitada superiormente,

(d) tem um limite.

10. Para as sequências abaixo, calcule os 5 primeiros termos da sequências, determine se a sequência converge e, em caso afirmativo, calcule o limite:

(a) $\left\{\frac{n}{n+2}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

(b) $\left\{\frac{\ln n}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

(c) $\left\{\frac{n^2}{2n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

(d) $\{1+(-1)^n\}_{n=1}^{+\infty}$

(e) $\left\{n^{1/n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

(f) $\left\{\left(1-\frac{2}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{+\infty}$

11. Escreva uma expressão para o termo geral das sequências abaixo, determine se a sequência converge e, em caso afirmativo, encontre o seu limite:

(a) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \cdots$

(b) $-1, 2, -3, 4, -5, \cdots$

(c) $\left(1-\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right), \cdots$

(d) $(\sqrt{2}-\sqrt{3}), (\sqrt{3}-\sqrt{4}), (\sqrt{4}-\sqrt{5}), \cdots$

12. Considere a sequência $\{a_n\}$ cujo n-ésimo termo é

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n}.$$

Mostre que $\lim_{n\to\infty} a_n = \ln 2$. [*Dica:* Interprete $\lim_{n\to\infty} a_n$ como uma integral definida.]

13. (a) Mostre que um polígono com n lados iguais inscrito em um círculo de raio r possui perímetro $p_n = 2rn\text{sen}\,(\pi/n)$.

(b) Encontre o limite da sequência $\{p_n\}$ para mostrar que os perímetros se aproximam da circunferência do círculo à medida que n aumenta.