Sequências e Séries

Prof.ª Cecilia Chirenti

Lista 4 - Séries e Critérios de Convergência III

1. Use o Teste da Comparação para determinar se a série é convergente ou divergente:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+30}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^{3/2}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n^2+3}}$

2. Use o Teste da Comparação no Limite para determinar se a série é convergente ou divergente:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n^3-n^2+3}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3+4^n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{5n+4}\right)^n$

3. Prove que, se $\sum a_n$ é uma série convergente de termos não-negativos, então $\sum a_n^2$ converge.

4. Suponha que $a_n > 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_n = 0$. Prove que $\sum a_n$ converge.

5. Use o Teste da Razão para determinar se a série é convergente ou divergente:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(n+2)!}{n!3^{2n}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n5^n}{(2n+3)\ln(n+1)}$

6. Use o Teste da Raiz para determinar se a série é convergente ou divergente:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{(2n+5)^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln\left(e^2+\frac{1}{n}\right)\right)^{n+1}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

7. Quais das séries $\sum a_n$ definidas pelas fórmulas recursivas abaixo convergem e quais divergem? Justifique.

   (a) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1+\operatorname{sen} n}{n} a_n$ (c) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1+\ln n}{n} a_n$

   (b) $a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{3n-1}{2n+5} a_n$ (d) $a_1 = 5, \quad a_{n+1} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} a_n$

8. Determine se as séries alternadas convergem ou divergem:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{(\ln n)^2}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

9. Determine se as séries convergem absolutamente, convergem (condicionalmente) ou divergem.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^3+1}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2n!}{2^n n! n}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n\sqrt{n}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\operatorname{sen} n}{n^2}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}n^2(2/3)^n$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sqrt{n^2+n}-n$

10. Estime o erro envolvido no uso da soma dos quatro primeiros termos para aproximar a soma da série inteira.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{10^n}$

11. Determine quantos termos devem ser utilizados para calcular a soma da série inteira com um erro de menos de 0,001.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2+3}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\ln(\ln(n+2))}$

12. Mostre que se tanto $\sum a_n$ quanto $\sum b_n$ convergem absolutamente, então isso também acontece com as séries a seguir.

(a) $\sum(a_n+b_n)$ (b) $\sum(a_n-b_n)$ (c) $\sum ka_n$

13. Mostre com um exemplo que $\sum a_n b_n$ pode divergir, mesmo se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergirem.