Nome:____

Geometria Diferencial I

Prova 2 - 03/05/2019

1. (2,5pts) Seja $\mathbf{a}$ um ponto do $\mathbb{R}^3$ tal que $|\mathbf{a}| = 1$. Prove que fórmula

$$C(\mathbf{p}) = \mathbf{a} \times \mathbf{p} + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{a})\, \mathbf{a}\,,$$

define uma transformação ortogonal e descreva o seu efeito geral sobre o $\mathbb{R}^3$.

2. (2,5pts) Sejam $\alpha, \bar{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$ duas curvas regulares com velocidade unitária e torsão e curvatura não-nulas. Mostre que se os campos vetoriais binormais das duas curvas são coincidentes, ou seja, se $B(s) = \bar{B}(s)$, então as curvas são congruentes.

3. (2,5 pts) Mostre que a superfície parametrizada

$$\mathbf{x}(u, v) = (v \cos u, v \operatorname{sen} u, au)\,, \quad a \neq 0$$

é regular. Calcule o seu vetor normal $N(u, v)$ e mostre que, ao longo da reta coordenada $u = u_0$, o plano tangente de $\mathbf{x}$ gira em torno dessa reta de tal modo que a tangente de seu ângulo com o eixo Oz é proporcional ao inverso da distância v $(= \sqrt{x^2 + y^2})$ do ponto $\mathbf{x}(u_0, v)$ ao eixo Oz. Que superfície é essa?

4. (2,5pts) O Teorema de Stokes (clássico) afirma tipicamente que se $\mathbf{x} : D \to \mathbb{R}^3$ é um 2-segmento e V é um campo vetorial em R^3, então

$$\int_{\partial \mathbf{x}} V \cdot dS = \iint_{\mathbf{x}} U \cdot (\nabla \times V)\, dA\,,$$

onde $\nabla \times V = \mathrm{rotV}$ e U é o campo vetorial unitário normal à superfície. Interprete esta expressão como um caso particular do teorema de Stokes dado por

$$\int_{\partial \mathbf{x}} \phi = \iint_{\mathbf{x}} d\phi\,.$$

Dica: assuma que $dA \approx \sqrt{EG - F^2}\; du\, dv$. (Veja a definição de E, F e G no exercício extra abaixo.)

EXTRA

5. (1,0pt) As velocidades parciais $\mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$ são definidas para uma aplicação arbitrária $\mathbf{x} : D \to \mathbb{R}^3$, de maneira que podemos considerar as funções reais

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u\,, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v\,, \quad \text{e} \quad \mathrm{G} = \mathbf{x}_\mathrm{v} \cdot \mathbf{x}_\mathrm{v}\,,$$

em D. Mostre que $|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|^2 = EG - F^2$ e justifique a dica dada no exercício 4.