



Fundação Universidade Federal do ABC

Modelos de discos de acreção ao redor de buracos negros

Caio Almeida Alves de Souza

Orientador: Prof^a Dr^a Cecilia B. M. H. Chirenti

Centro de Matemática, Computação e Cognição (CMCC)

Santo André, 2017

Fundação Universidade Federal do ABC

Modelos de discos de acreção ao redor de buracos negros

Relatório parcial de iniciação em desenvolvimento tecnológico e inovação com as informações do andamento do projeto, como parte dos requisitos das atividades do bolsista, realizado com auxílio de bolsa PIBITI (CNPq).

Bolsista: Caio Almeida Alves de Souza

Orientador: Prof^a Dr^a Cecilia B. M. H. Chirenti
Centro de Matemática, Computação e Cognição (CMCC)

Santo André, 2017

Resumo

O projeto vem sendo desenvolvido com a orientação da Prof.^a Dr.^a Cecilia Bertoni Martha Hadler Chirenti e fomentado pelo CNPq, na modalidade PIBITI.

O objetivo principal, proposto como resultado final da pesquisa, é o estudo do modelo geometricamente fino dos discos de acreção no contexto da relatividade geral. Neste relatório parcial, introduzimos o pano de fundo acerca do processo de acreção e da formação destas estruturas astrofísicas, construindo um primeiro modelo para o disco, utilizando apenas mecânica newtoniana. Também apresentamos a formulação lagrangiana da mecânica, utilizada para investigar a gravitação universal com maior rigor analítico e, por fim, desenvolver as leis de Kepler. Ademais, exibimos os fundamentos teóricos estudados nos últimos meses, os quais serão necessários para a continuidade do projeto; e.g., relatividade geral.

Palavras-chave: *buracos negros, discos de acreção, gravitação, mecânica clássica, relatividade geral*

Abstract

The project has been developed with the guidance of Prof.^a Dr.^a Cecilia Bertoni Martha Hadler Chirenti and promoted by CNPq, in the PIBITI modality.

The main objective, proposed as the research final result, is the study of the *thin accretion disk* model in the general relativity context. In this partial report, we introduce the background ideas about accretion processes and the formation of such astrophysical structures, building a first model for the disk, using Newtonian mechanics only. We also present the Lagrangian formulation of mechanics, used to investigate the universal gravitation with greater analytical rigor and, lastly, to derive the Kepler's laws. Furthermore, we exhibit theoretical fundamentals that have been studied during the past months, which are necessary to continue the project; e.g., general relativity.

Keywords: *black holes, accretion disks, gravitation, classical mechanics, general relativity*

Sumário

1	Metodologia e Conteúdo Teórico	3
1.1	O fenômeno de acreção é viável?	3
1.2	Como (e por que) ocorre o fenômeno de acreção?	4
1.3	Modelo newtoniano dos discos de acreção	5
1.3.1	Premissas iniciais e definições	5
1.3.2	Desenvolvimento matemático	6
1.4	Formalismo Lagrangiano	9
1.4.1	Princípio de D'Alembert	10
1.4.2	Equação de Lagrange	11
1.4.3	Princípio de Hamilton	12
1.4.4	Equação de Lagrange à partir do Princípio de Hamilton	13
1.4.5	Problema da Força Central: Redução ao equivalente do corpo único	14
1.5	Relatividade Restrita	15
1.5.1	Sistemas de coordenadas e diagramas de Minkowski	15
1.5.2	Transformações de Lorentz	16
1.5.3	Espaço-tempo de Minkowski	17
1.6	Relatividade Geral	18
1.6.1	Métrica	19
1.6.2	Noções básicas de análise vetorial	20
1.6.3	Geodésicas	21
1.6.4	Métrica de Schwarzschild	21
2	Resultados	23
2.1	Viabilidade da acreção	23
2.2	Estrutura do disco de acreção newtoniano	23
2.2.1	Soluções analíticas	23
2.2.2	Estimativas de magnitude	25
2.2.3	Análise gráfica das soluções	27
2.3	Leis de Kepler	31
2.3.1	Segunda Lei de Kepler	31
2.3.2	Primeira Lei de Kepler	32
2.3.3	Terceira Lei de Kepler	33
2.4	Geodésicas tipo-tempo na métrica de Schwarzschild	34
3	Discussão	36
4	Cronograma	36
5	Bibliografia	36

1 Metodologia e Conteúdo Teórico

1.1 O fenômeno de acreção é viável?

Quando as primeiras ideias acerca do fenômeno de acreção foram apresentadas à comunidade científica por volta do século XVIII, houve muitas discussões acerca da viabilidade deste processo astrofísico, uma vez que certas equações utilizadas no contexto da Física possuem soluções matemáticas, porém estas podem vir a não representar algum aspecto da realidade. Os estudos quantitativos de grande prestígio para a teoria de acreção se perpetuaram no século XX, com embasamento teórico forte e um conjunto de evidências observacionais [4]. Sendo assim, nada mais justo que iniciarmos o projeto verificando de maneira simples, porém seguramente fundamentada, a viabilidade do fenômeno de acreção.

Imaginemos duas partículas, m_1 e m_2 , que orbitam circularmente um corpo central de massa M , tal que $M \gg m_1, m_2$. As partículas se encontram, inicialmente, a uma distância r do corpo. Devido a algum tipo de interação entre elas, e.g. a existência de estresse viscoso, as partículas dirigem-se para órbitas distintas. A partícula m_1 passa a realizar uma órbita circular de raio r_1 , onde $r_1 < r$, enquanto que a partícula m_2 descreve uma outra, de raio r_2 , onde $r_2 > r$.

Uma maneira simples de verificar se o processo descrito acima é viável consiste em verificar a diferença na energia do sistema entre os estados inicial e final. Se a variação de energia for positiva, significa que é necessário inserir energia ao sistema para que o fenômeno ocorra. Caso seja negativa, então significa que o sistema perde energia ao realizar esse processo, logo, o fenômeno é espontâneo e, portanto, viável.

Como estamos tratando de um sistema mecânico com rotação, é necessário impor uma condição bastante importante: a conservação de momento angular do sistema. Sendo assim, é natural inferir que a variação de momento angular é nula, uma vez que os torques envolvidos são internos. Matematicamente, temos

$$\Delta J = 0. \quad (1)$$

O momento angular para massas pontuais é definido conforme

$$\mathbf{J}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i,$$

onde \mathbf{r}_i é o vetor posição e \mathbf{p}_i é o momento, respectivos à i -ésima partícula. No contexto do problema, temos $i = 1, 2$. Como estamos trabalhando com o módulo do momento angular, $|\mathbf{J}_i| \equiv J_i$, de partículas em órbitas circulares, temos $\mathbf{r}_i \perp \mathbf{p}_i$, então

$$J_i = r_i p_i = m_i \omega_i (r_i)^2. \quad (2)$$

No contexto da gravitação clássica, a velocidade angular de um corpo qualquer em órbita circular pode ser determinada pela fórmula $\omega = \sqrt{GM/r^3}$, onde G é a constante gravitacional universal, M , a massa do corpo central e r , o raio de sua órbita. Aplicando esta ao módulo do momento angular da i -ésima partícula, J_i , obtemos

$$J_i = m_i \sqrt{GM r_i}.$$

Aplicando os módulos do momento angular de cada partícula, respectivos aos instantes inicial e final do sistema, a Eq.(1) pode ser explicitada conforme

$$m_1 \sqrt{r_1} + m_2 \sqrt{r_2} = (m_1 + m_2) \sqrt{r}. \quad (3)$$

Utilizando um pouco de trabalho algébrico, podemos escrever a Eq.(3) da seguinte maneira

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\sqrt{r} - \sqrt{r_1}}{\sqrt{r_2} - \sqrt{r}}, \quad (4)$$

assim representando, neste contexto simplificado, que a conservação de momento angular implica numa relação específica entre a razão das massas das partículas e os raios das órbitas.

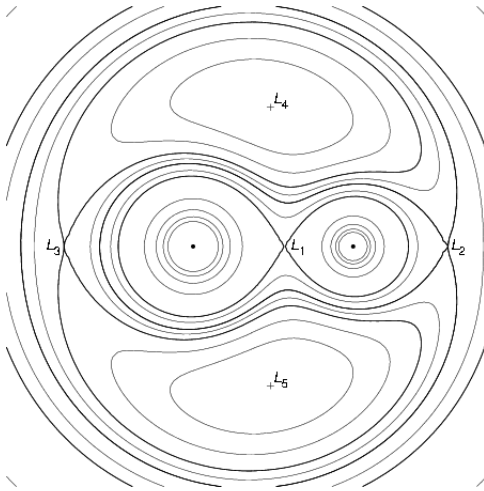
Calculando a variação da energia total do sistema, obtemos

$$\Delta E = \frac{GM}{2} \left[m_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) + m_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right) \right]. \quad (5)$$

Precisamos avaliar se esta expressão é positiva ou negativa. Caso seja negativa, significa que o sistema sai de uma configuração para outra de menor energia e, portanto, o processo é energeticamente favorável. Caso seja positivo, indicará um grande problema conceitual na análise que buscamos desenvolver. O resultado desta análise encontra-se na seção 2.1.

1.2 Como (e por que) ocorre o fenômeno de acreção?

Antes de discutirmos sobre os discos de acreção em si, precisamos compreender como se dá o fenômeno de acreção. Para isso, partiremos de um panorama qualitativo geral desta ocorrência num sistema binário. Para adequar o estudo dentro da proposta deste projeto, suponhamos um sistema binário formado por um buraco negro de Schwarzschild e uma estrela normal.



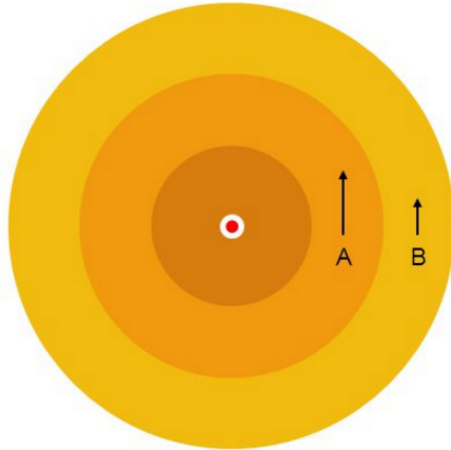
(Figura 1. Superfícies equipotenciais em um sistema binário com a demarcação dos pontos de Lagrange. Fonte: INSPIRE HEP. <http://inspirehep.net/record/846517/plots>)

Uma das principais propriedades de estrelas é o escoamento de matéria através de sua superfície – geralmente, material gasoso. A taxa com a qual massa é liberada depende do tipo de estrela que estamos considerando. Além disso, durante o processo de evolução estelar, existe um estágio no qual a estrela começa a “inflar”. Em sistemas binários, quando essa expansão da estrela é tal que preenche o lóbulo de Roche, a matéria passa a ser deslocada para o buraco negro, uma vez que atravessou o limite das superfícies equipotenciais, determinado aqui pelo ponto de Lagrange interno, L_1 . Este, e outros pontos de Lagrange num sistema binário, estão ilustrados na Figura 1.

Como a estrela, em geral, possui rotação em torno do próprio eixo, isso impede que a matéria descreva uma trajetória de queda livre radial em direção ao buraco negro. Sendo assim, a existência de momento angular não nulo das partículas do gás em acreção faz com que estas movam-se em órbitas quase-circulares ao redor do buraco negro. A partir do momento em que este evento se sucede, é possível a formação de um disco gasoso ao redor do buraco negro; à este, daremos o nome de **disco de acreção**. [7, 8]

A composição desse tipo de estrutura requer algum tipo de torque viscoso entre as partículas do gás em acreção, fazendo com que as mesmas percam energia e promovam a transferência de momento angular para fora do disco. As causas dessa viscosidade ainda nos são enigmáticas, mas há evidências de que os campos magnéticos desempenham um papel importante nesse aspecto através do que chamamos de *instabilidade magneto-rotacional*, um fenômeno que engendra turbulência no gás e torna instável o fluido [4].

Para entender como esse torque viscoso age para o desenvolvimento da estrutura do disco, imaginemos duas camadas sucessivas de matéria deste: uma mais interna, A, e outra, mais externa, B, conforme ilustrado na Figura 2.



(Figura 2. Camadas sucessivas do disco de acreção sob ação de torques viscosos. Fonte: C.P. Dullemond. Structure and evolution of protoplanetary disks. Accretion disk theory lecture. <http://slideplayer.com/slide/5124157/>)

Entre estes anéis, a presença de atrito gera um torque negativo em A, o que leva à diminuição de seu momento angular e , conseqüentemente, à redução de seu raio orbital. Sendo assim, a camada B sofre a ação de um torque positivo, que aumenta seu momento angular e , portanto, amplia seu raio orbital. Portanto, momento angular é transportado para fora do disco, enquanto matéria flui para dentro do buraco negro. A diferença de energia do sistema é liberada na forma de energia térmica e radiação. [4]

A eficiência energética desse fenômeno cósmico é uma das maiores conhecidas, configurando discos de acreção como os objetos astrofísicos mais luminosos do Universo. No caso de um buraco negro de Schwarzschild, a eficiência energética de acreção é $\eta \approx 0,06$ [7].

1.3 Modelo newtoniano dos discos de acreção

De modo a estudar analiticamente um primeiro modelo para discos de acreção, decidiu-se abordar o conteúdo presente no artigo *Black Holes in Binary Systems. Observational Appearance*, publicado em 1973 pelos pesquisadores soviéticos N. I. Shakura e R. A. Sunyaev [7]. Este é um dos mais importantes e reconhecidos artigos científicos para o desenvolvimento da teoria de acreção, uma vez que os modelos de discos de acreção foram primeiramente formulados através de mecânica newtoniana por Shakura & Sunyaev. Aqui, percebe-se a clara motivação por trás dessa escolha.

1.3.1 Premissas iniciais e definições

A ideia principal de Shakura & Sunyaev (1973) era descrever um disco geometricamente fino através de equações hidrodinâmicas ao longo da espessura do mesmo. Dizer que o disco é “geometricamente fino” significa dizer que a escala da espessura H do disco é muito menor que a da distância radial r em relação ao buraco negro, i.e. $H \ll r$. [7, 8] Além disso, é válido atentar que, diante da geometria deste objeto astrofísico, é conveniente utilizarmos coordenadas cilíndricas em nossos cálculos.

O processo mais importante que governa a acreção da matéria em rotação é a ação de estresse viscoso dentro do fluxo. Esses estresses dirigem a acreção, como já explicado, transportando momento angular para fora e matéria para dentro; é também uma forma de converter a energia gravitacional da matéria em calor, o qual será transferido para as faces superior e inferior do disco, e então, radiado. [7, 8]

O modelo original também supõe um disco de acreção opticamente espesso na direção vertical e um fluido turbulento descrito por um tensor de estresse viscoso proporcional à pressão total, P . [7] Este é então parametrizado conforme

$$w_{r\varphi} = -\alpha P = -\alpha \rho v_s^2, \quad (6)$$

onde v_s é a velocidade do som no fluido, ρ representa a densidade deste, e α é uma constante adimensional, que pode ser fixada para valores entre 0 (quando a acreção é interrompida) e próximos a 1.

Deve ficar claro que este modelo não é uma teoria real de viscosidade em discos de acreção, mas apenas uma forma de esconder nossa ignorância acerca da viscosidade através do parâmetro α , o qual é suposto $\lesssim 1$. [7]

Foi considerado que o disco não possui auto-gravitação, o que significa que a massa deste é muito menor que a massa do objeto central (i.e. $M_{\text{disco}} \ll M_{\text{buraco negro}}$), portanto, a influência gravitacional do disco é desprezível.

O modelo assume que o disco está em equilíbrio térmico local, não transporta calor para dentro e pode irradiar o calor viscoso eficientemente como um corpo negro.

Além das considerações prévias, de modo a ajustar o conteúdo nas concepções do projeto, assumiremos que:

- O disco é estável, i.e. $\partial/\partial t \equiv 0$;
- O disco possui simetria axial, i.e. $\partial/\partial\varphi \equiv 0$;
- A velocidade tangencial é muito maior que a radial, i.e. $v_\varphi \gg v_r$;
- Há balanço hidrostático na direção vertical;
- Não há presença de campos magnéticos no disco.

Durante o progresso analítico, posteriormente apresentado neste relatório, iremos nos utilizar de alguns aspectos importantes para descrever a estrutura do disco de acreção. Um destes é a densidade superficial de matéria do disco a uma distância r do buraco negro, u_0 . Considerando z_0 como sendo a meia-espessura do disco, definimos u_0 conforme

$$u_0 \equiv 2 \int_0^{z_0} \rho dz \approx 2 z_0 \rho, \quad (7)$$

onde ρ representa a densidade volumétrica do gás e z é a coordenada que aponta na direção vertical, perpendicular ao plano do disco. [7, 8]

É necessário determinar também o estresse viscoso que age sobre as camadas adjacentes de matéria, viabilizando assim o fenômeno de acreção e a estruturação do disco. Definimos $W_{r\varphi}$ como sendo o estresse entre os elementos fluidos na órbita de raio r em elementos vizinhos numa órbita $r + dr$, estando relacionado ao tensor de estresse de acordo com

$$W_{r\varphi} = 2 \int_0^{z_0} w_{r\varphi} dz. \quad (8)$$

Calculando o resultado desta integral, com o auxílio das Eqs.(6) e (7), obtemos

$$W_{r\varphi} = -\alpha u_0 v_s^2. \quad (9)$$

1.3.2 Desenvolvimento matemático

A descrição analítica para a formulação das equações que regem a estrutura do disco de acreção será elaborada através do uso de mecânica newtoniana, tal como apresentado em Shakura & Sunyaev (1973), porém com as devidas alterações diante o contexto do projeto.

Iremos assumir que o disco orbita um buraco negro de massa M e que o gás é depositado no disco à uma taxa constante, \dot{M} . A taxa de acreção sobre o objeto central é a mesma, \dot{M} . Consideraremos também que o plano central do disco se encontra no plano equatorial do buraco negro, definido por $z = 0$. [7, 8]

Em condições estáveis, a estrutura do disco pode ser determinada através da solução simultânea de quatro equações de conservação, em conjunto à especificação de leis para a viscosidade e para o transporte de radiação do centro à superfície do disco.

Conservação de Massa. A equação referente à conservação de massa no escoamento de fluidos é a chamada *equação de continuidade*. Relembrando que estamos considerando um disco de acreção estável, a equação de continuidade com a qual iremos trabalhar reduz-se a

$$\nabla \cdot (\rho v) = 0, \quad (10)$$

onde \mathbf{v} representa o campo de velocidades dos elementos de fluido.

Integrando a Eq.(10) em relação ao elemento de volume dV do disco, obtemos

$$2\pi r v_r u_0 = \text{constante}, \quad (11)$$

onde v_r denota a componente radial da velocidade do gás.

Além disso, utilizando o Teorema de Ostrogradski-Gauss, podemos demonstrar que

$$\dot{M} = \int \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) dV, \quad (12)$$

e, portanto, concluir que

$$\boxed{\dot{M} = 2\pi r v_r u_0 = \text{constante}}. \quad (13)$$

Conservação de Momento Angular. Neste sistema, trabalhamos com a transferência de momento angular de dentro para fora do disco, entretanto, este processo deve obedecer uma lei fundamental da cinemática de rotação, a conservação do momento angular. Sabemos que uma variação temporal no módulo do momento angular de um sistema é igual ao módulo do torque aplicado sobre este,

$$\tilde{\tau} = \frac{d\tilde{J}}{dt}, \quad (14)$$

onde $\tilde{\tau}$ representa o torque viscoso por unidade de área e \tilde{J} representa o momento angular referente à densidade superficial de matéria, u_0 .

Vamos entender, mais uma vez, como isso acontece. Devido ao atrito entre as camadas adjacentes, uma componente de velocidade radial ($v_r < 0$) surge, e então, as partículas começam a espiralar em direção ao buraco negro [7]. Sendo assim, temos

$$\frac{d\tilde{J}}{dt} = u_0 \frac{d\omega}{dt} r^2 = -u_0 v_r \frac{d\omega}{dr} r^2. \quad (15)$$

Construindo a expressão para o torque viscoso por unidade de área, $\tilde{\tau}$, obtemos

$$\tilde{\tau} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} W_{r\varphi} r^2. \quad (16)$$

Aplicando as duas relações anteriores à Eq.(14), obtemos

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} W_{r\varphi} r^2 = -u_0 v_r \frac{d\omega}{dr} r^2. \quad (17)$$

Integrando ambos os lados da Eq.(17) em relação ao elemento de área dA , encontramos

$$-2\pi W_{r\varphi} r^2 + C = 2\pi u_0 v_r r^3 \omega. \quad (18)$$

Aplicando o resultado concedido pela imposição de conservação de massa, apresentado na Eq.(13), auferimos

$$-2\pi W_{r\varphi} r^2 + C = \dot{M} \omega r^2. \quad (19)$$

No caso de um buraco negro sem rotação, a constante C na equação anterior é simplesmente o momento angular referente à taxa de acreção do gás na órbita circular marginalmente estável, $r_{\text{ISCO}} \equiv r_0 = 6GM/c^2$, portanto a Eq.(19) representa a variação do momento angular do fluxo de matéria no disco entre um órbita de raio r até sua “queda” ao r_0 , relacionando esta diferença ao estresse viscoso que promove os torques necessários para que este fenômeno aconteça e, além disso, leva em consideração a conservação de massa. [4, 7, 8] Finalmente, sabendo que $C = \dot{M} \omega_0 r_0^2$, temos

$$\boxed{\dot{M} \omega \left[1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^{1/2} \right] = 2\pi \alpha u_0 v_s^2}. \quad (20)$$

Conservação de Energia. Conforme certas partículas do gás vão perdendo momento angular, elas diminuem seu raio orbital e acabam por perder também suas respectivas energias gravitacionais. Parte desta última vai para o aumento da energia cinética de rotação e a outra parte é convertida em energia térmica, podendo ser irradiada pela superfície do disco. [4, 7, 8]

As forças que levam à transferência de momento angular em um sistema em rotação também estão induzindo um fluxo de energia P , podendo ser facilmente desenvolvido com ajuda da Eq.(19). Sabemos que a potência de um corpo em rotação, em função do torque τ aplicado sobre ele e de sua velocidade angular ω , é $P = \tau\omega$. Logo,

$$P = -2\pi W_{r\varphi} r^2 \omega. \quad (21)$$

A energia deve ser conservada, logo, se considerarmos a transferência de energia devido ao torque viscoso, em conjunto com o aumento da energia cinética orbital e a perda de energia gravitacional das partículas em acreção, temos que o resultado da soma de todos os termos deverá ser a quantidade de energia restante para ser irradiada pelo disco através de sua superfície, i.e.

$$P_{rad} = \frac{1}{2} \dot{M} v_\varphi^2 - \dot{M} \left(\frac{GM}{r} \right) - 2\pi W_{r\varphi} r^2 \omega. \quad (22)$$

A área efetiva por onde a radiação pode escapar é aquela relacionada às faces superior e inferior do disco, portanto, se quisermos calcular a energia que será radiada por unidade de área dA_s , temos

$$Q = \frac{dP_{rad}}{dA_s},$$

onde dA_s se refere à área total disponível para emissão de radiação, portanto, $dA_s = 4\pi r dr$. Sendo assim,

$$Q = \frac{1}{4\pi r} \frac{d}{dr} \left[\dot{M} \left(\frac{1}{2} v_\varphi^2 - \frac{GM}{r} \right) - 2\pi W_{r\varphi} r^2 \omega \right]. \quad (23)$$

Aplicando as relações dadas pelas Eqs.(9) e (20), realizando o devido tratamento algébrico e considerando os fatores corretos ao sistema em análise, a Eq.(23) pode ser reescrita conforme

$$Q = \frac{3}{8\pi} \dot{M} \frac{GM}{r^3} \left[1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^{1/2} \right]. \quad (24)$$

Como queremos determinar as características do espectro de radiação do disco, precisamos apresentar parâmetros acerca da temperatura, da distribuição de energia da radiação e dos processos que estão relacionados à absorção/emissão da mesma ao longo da estrutura do disco. [7]

Para um dado fluxo Q , a densidade de energia da radiação dentro da camada com densidade superficial u_0 é determinada pela relação

$$\varepsilon = \frac{3}{4} \frac{Q}{c} \sigma u_0 = \frac{9}{32\pi} \dot{M} \frac{GM}{r^3} \frac{\sigma u_0}{c} \left[1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^{1/2} \right], \quad (25)$$

onde σ é a opacidade do gás. Nas condições que estamos considerando, a maior contribuição para a opacidade surge do espalhamento Thomson em elétrons livres e da absorção livre-livre para a qual $\sigma_{ff} = 0.11 T^{-7/2} n \frac{cm^2}{g}$. Dentro do disco, que é opticamente espesso em relação à “verdadeira” absorção, $\tau = \sigma_{ff} u_0$, ou mesmo $\tau^* = \sqrt{\sigma_T \sigma_{ff} u_0}$, caso $\sigma_T > \sigma_{ff}$, existe equilíbrio termodinâmico completo e a densidade de energia da radiação é igual à $\varepsilon = bT^4$. [7]

Conservação de Momento Vertical. Visto que não há movimento resultante do gás na direção vertical, a conservação de momento ao longo de \hat{z} se reduz a uma condição de equilíbrio hidrostático. Matematicamente, este se apresenta na seguinte equação

$$\nabla P = -\rho g, \quad (26)$$

onde P representa a pressão no gás e $\mathbf{g} = (GM/r^2) \hat{\mathbf{r}}$. Como já dito anteriormente, o equilíbrio hidrostático se instaura na direção vertical perpendicular ao plano do disco, portanto, podemos considerar apenas a contribuição do gradiente de pressão nesta direção. Assim, a Eq.(26) reduz-se para

$$\frac{dP}{dz} = -\rho \frac{GM}{r^2} \sin \theta, \quad (27)$$

onde θ é o angulo entre o vetor posição de um elemento de fluido no disco e a projeção deste sobre o plano central, $z = 0$. Fazendo as seguintes aproximações,

$$\sin \theta \approx \frac{z_0}{r} \quad \text{e} \quad \frac{dP}{dz} \approx -\frac{P}{z_0},$$

podemos determinar uma importante relação que possibilite resolver analiticamente a estrutura do disco de acreção através de mecânica newtoniana. Portanto, realizando as devidas passagens algébricas, tendo em mente que $P = \rho v_s^2$, obtemos

$$\boxed{z_0 = \frac{v_s}{v_\varphi} r}. \quad (28)$$



Shakura & Sunyaev perceberam que, para valores fixos de M e \dot{M} , o disco pode ser convenientemente dividido em três regiões distintas, dependendo de r . [7] Estas regiões são:

- a) Uma região interna, para pequenos valores de r , na qual a pressão de radiação é muito maior que a pressão do gás, e onde $v_s^2 = \varepsilon/3\rho$. Em relação à opacidade, a influência do espalhamento domina sobre a da absorção.
- b) Uma região intermediária, para valores um pouco maiores de r , na qual a pressão do gás é dominante e onde $v_s^2 = kT/m_p$. Em relação à opacidade, a maior contribuição parte do espalhamento pelos elétrons.
- c) Uma região externa, para valores grandes de r , na qual a pressão do gás é dominante e onde $v_s^2 = kT/m_p$. Em relação à opacidade, esta é determinada pela absorção livre-livre e outros mecanismos.

Uma vez auferidas as equações em destaque e definidas as particularidades de cada uma destas regiões, é possível compôr as funções que descrevem o disco de acreção com um nível de detalhamento notável, observando o fato de que não utilizamos artifícios matemáticos insensatos ou hipóteses físicas ilógicas para tal elaboração.

O desenvolvimento destas soluções é longo e tedioso, portanto, são apresentadas apenas as expressões finais na seção 2.2 deste relatório.

1.4 Formalismo Lagrangiano

O estudo do formalismo lagrangiano da Mecânica foi proposto pela orientadora durante o último trimestre de 2016, com o intuito de compreender a teoria e aplicá-la em problemas simples, até que pudéssemos avançar no estudo de gravitação clássica com o problema da força central e desenvolver, analiticamente, as três leis de Kepler na seção 2.3.

O formalismo lagrangiano é uma das mais conhecidas (e úteis) generalizações na Física, dentro do estudo de Mecânica Clássica. O método foi desenvolvido partindo de um raciocínio muito interessante acerca de mudanças na configuração de um sistema, o qual será apresentado em breve. [5] Uma vez que detemos do conhecimento desta formulação, aplicaremos esta ao problema de dois corpos que movem-se sob a influência de uma força central mútua, i.e. o problema da força central.

1.4.1 Princípio de D'Alembert

Um deslocamento virtual (infinitesimal) refere-se à uma variação na configuração de um sistema como resultado de alguma mudança infinitesimal arbitrária nas coordenadas $\delta \mathbf{r}_i$, tal que esta seja consistente com as forças e vínculos impostos ao sistema num dado instante t . O deslocamento é dito *virtual* para distingui-lo de um deslocamento real do sistema que ocorre durante um intervalo dt , durante o qual as forças e vínculos podem variar. [5]

Suponha que o sistema esteja em equilíbrio, i.e. a força total em cada partícula do sistema é nula, $\mathbf{F}_i = 0$. Então, fica claro perceber que o produto escalar $\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i$, que é o trabalho virtual da força \mathbf{F}_i sobre o deslocamento $\delta \mathbf{r}_i$, também será nulo. A soma de todos estes produtos nulos sobre todas as partículas do sistema também deverá ser nulo,

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (29)$$

A força total sobre a i -ésima partícula pode ser decomposta entre as forças aplicadas sobre esta, $\mathbf{F}_i^{(a)}$, e as forças de vínculo atreladas, \mathbf{f}_i ,

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{f}_i. \quad (30)$$

Agora, iremos nos restringir aos sistemas para os quais o trabalho virtual das forças de vínculos é nulo, i.e. $\mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$. Com esta consideração, utilizando as Eqs.(29) e (30), temos como condição para o equilíbrio do sistema que o trabalho virtual das forças aplicadas também deve ser nulo,

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (31)$$

A Eq.(31) é geralmente chamada de *princípio do trabalho virtual*. Esta equação é útil no sentido em que não depende de \mathbf{f}_i , mas lida apenas com o caso estático; queremos uma condição que envolva o movimento geral do sistema. [5]

Para obter tal princípio, iremos utilizar a equação de movimento

$$\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}}_i,$$

que pode ser escrita como

$$\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i = 0,$$

indicando que as partículas no sistema estarão em equilíbrio sob a ação de uma força igual à força atual mais uma “força reversa efetiva” $-\dot{\mathbf{p}}_i$. Ao invés da Eq.(29), podemos imediatamente escrever

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (32)$$

Realizando a decomposição da força \mathbf{F}_i em forças aplicadas, $\mathbf{F}_i^{(a)}$, e forças de vínculo, \mathbf{f}_i , temos

$$\sum_i \left(\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i \right) \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (33)$$

Novamente, iremos nos restringir ao caso para o qual o trabalho virtual das forças de vínculo é nulo, portanto,

$$\boxed{\sum_i \left(\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i \right) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0}. \quad (34)$$

A Eq.(34) é conhecida como o *princípio de D'Alembert*. [5]

1.4.2 Equação de Lagrange

Apesar de resolver o problema anterior, o princípio de D'Alembert ainda não está em uma forma útil para descrever as equações de movimento de um sistema. Precisamos agora transformar a equação em uma expressão que envolva deslocamentos virtuais de coordenadas generalizadas. [5] A tradução de \mathbf{r}_i para a linguagem q_j começa com as equações de transformação

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \quad (35)$$

assumindo n coordenadas independentes. Sendo assim, um deslocamento virtual arbitrário $\delta\mathbf{r}_i$ pode ser relacionado com o deslocamento virtual δq_j conforme

$$\delta\mathbf{r}_i = \sum_j \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (36)$$

Note que não há variação de tempo, δt , envolvida aqui, uma vez que um deslocamento virtual, por definição, considera apenas deslocamentos das coordenadas.

Por exemplo, em termos de coordenadas generalizadas, o trabalho virtual de \mathbf{F}_i se torna

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = \sum_{i,j} \left(\mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j. \quad (37)$$

Agora, iremos olhar para o outro termo da Eq.(34), que pode ser reescrito conforme

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i.$$

Aplicando aqui a expressão do deslocamento virtual $\delta\mathbf{r}_i$ em termos de coordenadas generalizadas q_j , evidenciada na Eq.(36), obtemos

$$\sum_{i,j} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (38)$$

Considere agora a seguinte relação,

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \right]. \quad (39)$$

Observando que

$$\frac{\partial\mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad \text{e} \quad \frac{\partial\mathbf{v}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right)$$

são relações válidas, podemos aplicá-las à Eq.(39), juntamente com a correlação $\mathbf{v}_i \equiv \dot{\mathbf{r}}_i$, para obter

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i &= \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial\mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial\mathbf{v}_i}{\partial q_j} \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right). \end{aligned} \quad (40)$$

Podemos notar que os somatórios presentes na Eq.(40) referem-se à energia cinética total T do sistema de partículas, i.e.

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2. \quad (41)$$

Sendo assim, temos que o segundo termo da Eq.(34), em função de coordenadas generalizadas, é dado por

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i \equiv \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = \sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j. \quad (42)$$

Utilizando a equação anterior e tendo em mente que o trabalho virtual de uma força \mathbf{F}_i pode ser escrito conforme apresentado na Eq.(37), então podemos formular o princípio de D'Alembert em termos de coordenadas generalizadas q_j conforme

$$\sum_j \left\{ \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] - Q_j \right\} \delta q_j = 0. \quad (43)$$

Quando as forças envolvidas no problema podem ser determinadas através de uma função de potencial escalar V , sabemos que

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i V.$$

Portanto, o trabalho virtual de \mathbf{F}_i pode ser apresentado conforme

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = - \sum_i \nabla_i V \cdot \delta \mathbf{r}_i. \quad (44)$$

Representando a Eq.(44) em termos das coordenadas generalizadas, podemos concluir que esta será satisfeita se, e somente se,

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}. \quad (45)$$

Aplicando esta última relação à Eq.(43), obteremos a seguinte expressão

$$\sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0. \quad (46)$$

Definiremos aqui que o potencial V não depende das velocidades generalizadas \dot{q}_j , portanto, a Eq.(46) pode ser apresentada como

$$\sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} \right\} \delta q_j = 0.$$

Esta última é satisfeita se, e somente se, o termo nas chaves for nulo, i.e.

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0. \quad (47)$$

Definimos agora uma nova função, chamada **lagrangiana** do sistema, que correlaciona a energia cinética e potencial totais do sistema da seguinte maneira:

$$L \equiv T - V. \quad (48)$$

Com isso, a Eq.(47) pode ser representada conforme

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0}. \quad (49)$$

Essa é a chamada *equação de Lagrange*. [5]

1.4.3 Princípio de Hamilton

Também é possível obter a equação de Lagrange à partir de um princípio que considera o movimento completo de um sistema entre instantes t_1 e t_2 . Um princípio desta natureza é conhecido como um “princípio integral”.

Antes de apresentar o princípio integral, precisamos definir com mais precisão o significado atrelado à frase “movimento de um sistema entre instantes t_1 e t_2 ”. A configuração instantânea de um sistema é definida pelos valores de n coordenadas generalizadas q_1, \dots, q_n , e corresponde a um ponto particular no hiperespaço cartesiano. Conforme o tempo passa, o estado do sistema muda e o ponto que o descreve move-se no espaço de configuração traçando uma curva, descrita como “a trajetória de movimento do sistema.” [5]

O *princípio de Hamilton* descreve o movimento daqueles sistemas mecânicos para os quais todas as forças (exceto forças de vínculo) são deriváveis de um potencial escalar generalizado que pode ser uma função das coordenadas, velocidades e tempo. Tais sistemas serão denotados como *monogênicos*. [5]

Para sistemas monogênicos, o princípio de Hamilton pode ser apresentado como:

O movimento de um sistema entre um instante t_1 e um instante t_2 é tal que a integral de linha, chamada ação,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt,$$

onde $L \equiv T - V$, possui valor estacionário para a trajetória real de movimento.

Podemos então resumir o princípio simplesmente dizendo que o movimento é tal que a *variação* da integral de linha S , para valores fixos de t_1 e t_2 , é zero,

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt = 0.$$

O princípio de Hamilton é uma condição suficiente para derivar as equações de movimento que permitem construir a mecânica de sistemas monogênicos a partir deste como postulado básico ao invés de utilizar as leis de Newton. Tal formulação possui vantagens; e.g., visto que a integral S é invariante ao sistema de coordenadas generalizadas utilizadas para expressar a lagrangiana L , as equações de movimento devem sempre ter a forma lagrangiana, independente de como as coordenadas generalizadas se transformam. [5]

1.4.4 Equação de Lagrange à partir do Princípio de Hamilton

Queremos achar as condições para que a variação da integral S seja nula, i.e. $\delta S = 0$. Sendo assim, temos

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q_i, \dot{q}_i, t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \right\} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right\} \delta q_i \right] dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \right\} dt = 0. \end{aligned} \quad (50)$$

O segundo termo do lado esquerdo da Eq.(50) representa a integral de um diferencial total, logo, apenas depende dos instantes t_1 e t_2 . Com isso, nota-se ser invariante à trajetória, portanto, podemos desconsiderá-la do contexto adotado. Sendo assim, o princípio de Hamilton se reduz a

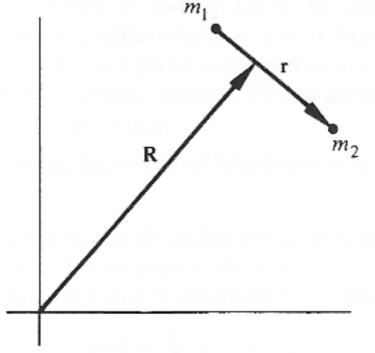
$$\delta S = 0 \iff \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right\} \delta q_i \right] dt = 0.$$

Aqui, fica perceptível que a integral apresentada será nula se, e somente se,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0, \forall i. \quad (51)$$

1.4.5 Problema da Força Central: Redução ao equivalente do corpo único

Consideremos um sistema monogênico de duas massas pontuais, m_1 e m_2 , onde as únicas forças são devidas à interação de um potencial U . [5] O sistema está representado no diagrama a seguir.



(Figura 3. Diagrama do sistema de dois corpos pontuais sob ação de uma força central. Fonte: Referência bibliográfica [5])

Na Figura 3, o vetor de posição \mathbf{R} se refere ao centro de massa do sistema, enquanto que \mathbf{r} representa a diferença entre os vetores de posição de cada massa, i.e. $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

Em primeira instância, iremos assumir que U é qualquer função do vetor entre as duas partículas, $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, ou da sua velocidade relativa, $\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1$, ou de qualquer derivada superior deste mesmo vetor. [5] Sendo assim, a função lagrangiana para o sistema acima terá a seguinte forma

$$L = T(\dot{\mathbf{R}}, \dot{\mathbf{r}}) - U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \dots) . \quad (52)$$

A energia cinética T pode ser escrita como a soma da energia cinética do centro de massa e das energias de cada massa em relação ao centro de massa, i.e.

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\mathbf{R}}^2 + T' ,$$

onde

$$T' = \frac{1}{2} m_1 (\dot{\mathbf{r}}'_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{\mathbf{r}}'_2)^2 .$$

Na relação imediatamente acima, os vetores $\dot{\mathbf{r}}'_1$ e $\dot{\mathbf{r}}'_2$ estão relacionados ao vetor $\dot{\mathbf{r}}$, respectivamente, por

$$\dot{\mathbf{r}}'_1 = \frac{-m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}} \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{r}}'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}} .$$

Logo, a energia cinética total do sistema é dada por

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) \dot{\mathbf{r}}^2 . \quad (53)$$

Definindo aqui a quantidade μ , [5], chamada *massa reduzida*,

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} , \quad (54)$$

temos que a energia cinética T do sistema pode ser escrita de modo mais sucinto

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 .$$

Portanto, a lagrangiana total é dada por

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 - U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \dots). \quad (55)$$

Na seção 2.3, iremos desenvolver uma aplicação prática para o problema de dois corpos com o advento de algumas simplificações adicionais e, a partir desta abordagem, derivaremos analiticamente as três leis de Kepler.

1.5 Relatividade Restrita

A compreensão dos elementos principais da teoria da Relatividade integra parte dos objetivos deste projeto, sendo necessário para avançar em certas metas estipuladas como, por exemplo, aplicar correções relativísticas ao modelo do disco de acreção apresentado neste relatório. Portanto, fica evidente que os estudos em Relatividade Restrita são de suma importância ao andamento da pesquisa, sendo iniciados no alvorecer de 2017.

A teoria da Relatividade Restrita foi apresentada por Albert Einstein em 1905, fundada em dois postulados [3, 2, 9]:

1. As leis da Física são as mesmas em todos os sistemas inerciais. Não existe nenhum sistema inercial preferencial. (Princípio da Relatividade)
2. A velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor, c , em todos os sistemas inerciais. (Princípio da Constância da Velocidade da Luz)

Buscando compreender melhor, vemos que o princípio da Relatividade de Einstein afirma ser impossível, por meio de quaisquer medidas físicas, escolher um sistema inercial como sendo intrinsicamente estacionário ou em movimento; só podemos falar em termos do movimento relativo entre dois sistemas. [3, 2, 9]

Toda a teoria da Relatividade Restrita é derivada diretamente destas duas hipóteses. Entretanto, o mais impressionante é que esta teoria não apenas explicou todos os resultados experimentais existentes neste contexto, mas previu novos efeitos, os quais foram confirmados em experimentos posteriores. Sendo assim, até hoje, não encontramos qualquer objeção experimental à teoria de Einstein. [3, 9]

1.5.1 Sistemas de coordenadas e diagramas de Minkowski

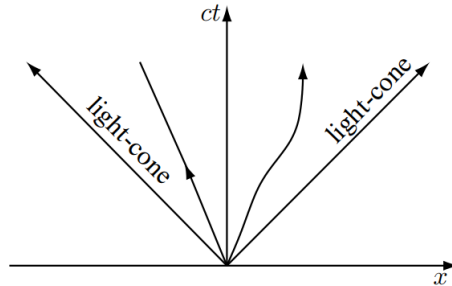
O fenômeno físico mais simples que podemos descrever é chamado um *evento*. Este é uma incidência que ocorre num certo ponto no espaço e num certo ponto no tempo. Portanto, quando determinamos a posição deste no espaço e no tempo, temos uma descrição completa do evento. Assumimos que nossas observações são feitas em relação a um referencial. Uma vez estabelecido o referencial, introduzimos neste um sistema de coordenadas. Geralmente, é vantajoso empregarmos um sistema de coordenadas cartesianas. [3]

É um pouco mais difícil determinar o ponto deste evento no tempo. Se um observador se encontra na origem com um relógio, então o ponto no tempo em que ele percebe o evento não é o ponto no tempo em que o evento ocorreu. Isso se deve ao fato de que a luz demanda certo tempo para ir da posição do evento ao observador na origem. Visto que observadores em diferentes posições devem realizar diferentes correções desse tipo, seria mais simples imaginar observadores em cada ponto do referencial de tal modo que o ponto no tempo de um evento arbitrário possa ser mensurado localmente. Mas, desse jeito, um novo problema surge: devemos sincronizar os relógios, para que estes exibam o mesmo tempo e corram numa mesma taxa. [3, 6]

Matematicamente, determinamos quatro coordenadas (ct, x, y, z) para cada evento. (A coordenada temporal t foi multiplicada pela velocidade da luz, c , para que todas as coordenadas possuam mesma dimensão.) Esta coordenação torna possível a descrição de um evento como sendo um ponto P no chamado *diagrama de Minkowski*. Neste tipo de diagrama, plotamos a coordenada ct ao longo do eixo vertical e uma das coordenadas espaciais ao longo do eixo horizontal. [3]

De modo a observar o movimento de partículas, podemos imaginar que cada partícula está equipada com uma lanterna que pisca numa frequência constante. Os pulsos luminosos de uma partícula representam uma sucessão de eventos. Se plotarmos estes resultados em um diagrama de Minkowski, teremos uma série de pontos

que descrevem uma curva no limite contínuo. Esta curva é chamada de *linha de universo* da partícula. A linha de universo de uma partícula livre, por exemplo, é uma reta. [3]



(Figura 4. Representação de linhas de universo num diagrama de Minkowski, delimitadas pelo cone de luz. Fonte: Referência bibliográfica [3])

Já uma partícula sob a ação de uma força terá uma linha de universo curvada, conforme sua velocidade vai se alterando com o tempo. Como a velocidade de qualquer partícula material é menor que a velocidade da luz, então a tangente da linha de universo dessas partículas, num diagrama de Minkowski, sempre será menor que 45° em relação ao eixo temporal. [3, 6]

Um pulso de luz provoca uma frente luminosa que move-se avante, à velocidade da luz. Se esta frente é apresentada num diagrama de Minkowski, o resultado é um cone de luz. Um importante resultado é que *a linha de universo de qualquer partícula num ponto está dentro do cone de luz de um pulso luminoso emanado daquele ponto*. Esta é uma consequência imediata do princípio restrito da relatividade, e também é válido localmente na presença de um campo gravitacional. [1, 3]

1.5.2 Transformações de Lorentz

Suponhamos K e K' , dois observadores em movimento relativo. Podemos declarar que este movimento ocorre ao longo da direção \hat{x} do sistema de coordenadas cartesianas. Imaginemos que K' distancia-se do observador K no sentido positivo do eixo x . Nestas condições, K registra o movimento de K' como sendo $x = vt$, enquanto que K' irá registrar o movimento de K como $x' = -vt'$. [9]

Agora, consideremos um pulso luminoso se movendo no mesmo sentido de K' . Nossos dois observadores irão determinar o movimento deste elemento como

$$K : x = ct \quad \text{e} \quad K' : x' = ct'.$$

Uma transformação linear entre seus sistemas de coordenadas é consistente com tais observações se esta apresentar a forma

$$x' - ct' = \Lambda(x - ct), \quad (56)$$

para algum Λ , dependente apenas da velocidade relativa, v . Caso o pulso luminoso estivesse viajando no sentido contrário ao anterior, os observadores teriam registrado o movimento deste conforme

$$K : -x = ct \quad \text{e} \quad K' : -x' = ct'$$

e a transformação linear entre seus sistemas de coordenadas deve, pelo princípio restrito da relatividade, assumir a forma

$$-x - ct = \Lambda(-x' - ct'), \quad (57)$$

para o mesmo Λ . Com algumas passagens podemos mostrar que as duas relações entre os sistemas de coordenadas dos observadores são equivalentes à

$$x' = \frac{1}{2}(\Lambda + \Lambda^{-1})x - \frac{1}{2}(\Lambda - \Lambda^{-1})ct, \quad (58)$$

$$ct' = \frac{1}{2} (\Lambda + \Lambda^{-1}) ct - \frac{1}{2} (\Lambda - \Lambda^{-1}) x . \quad (59)$$

Utilizando as observações de K acerca da posição de K' , determinamos Λ como sendo $\left(\frac{c+v}{c-v}\right)^{1/2}$ e então reescrevemos as transformações de Lorentz em sua forma padrão

$$x' = \gamma (x - \beta ct) , \quad (60)$$

$$ct' = \gamma (ct - \beta x) , \quad (61)$$

onde adotamos os termos $\beta = v/c$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, sendo γ conhecido como *fator de Lorentz*. A transformação das coordenadas transversais é a identidade, i.e. $y' = y$ e $z' = z$. [9]

Das transformações de Lorentz seguem os conceitos básicos de contração do espaço e de dilatação do tempo. Tudo o que precisamos fazer é considerar como um observador em movimento percebe nossas régua ou relógios. [9] Por exemplo, se estivermos segurando um relógio e um tempo T passa, o observador em movimento K' irá, de acordo com a transformação de Lorentz, registrar um tempo

$$ct' = \gamma (ct - \beta x) = \gamma cT$$

$$\therefore \boxed{t' = \gamma T} . \quad (62)$$

Ou seja, da perspectiva deste observador, o tempo que passou foi maior; relógios em movimento correm devagar. Conhecemos este fenômeno como *dilatação do tempo*. [9] Da mesma maneira, se segurarmos uma régua de comprimento L com uma das extremidades na origem, esticada sobre a direção positiva de \hat{x} , então um observador em movimento, K' , irá medir seu comprimento conforme: uma das extremidades da régua se encontra na origem, $x' = 0$. Entretanto, para o observador K , as extremidades desta se encontram em $x = 0$ e $x = L$. No mesmo instante, $t' = 0$, da perspectiva de K' , a outra extremidade se encontra em

$$x' = \gamma (L - \beta ct) .$$

Para o instante $t' = 0$, temos que $ct = \beta L$, portanto,

$$x' = \gamma (L - \beta^2 L) = \gamma (1 - \beta^2) L .$$

É fácil perceber que

$$\gamma (1 - \beta^2) = \gamma^{-1} ,$$

portanto, isso implica diretamente em

$$\boxed{x' = \gamma^{-1} L} . \quad (63)$$

O observador K' registra o comprimento da nossa régua modificado por um fator γ^{-1} . Este é o fenômeno que denominamos *contração do espaço*. [9]

1.5.3 Espaço-tempo de Minkowski

Conforme discutido na última seção, as medidas de tempo ou distância dependem do observador e como este se move relativamente aos outros sistemas de referência. Entretanto, existe uma certa combinação destas medidas que não se altera diante os movimentos relativos e, portanto, não dependem do observador em questão. Estas quantidades são conhecidas como *tempo próprio*, ou *comprimento próprio*; o tempo decorrido, ou a distância percorrida, no referencial de repouso do objeto sendo observado. [1, 6] Averiguando a derivação das transformações de Lorentz na seção 1.5.2, podemos notar que

$$(x' - ct')(x' + ct') = (x - ct)(x + ct) , \quad (64)$$

e assim, inferir que a quantidade $-(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2$ é a mesma para todos os observadores. Este é conhecido como o *intervalo invariante*, o qual desempenha um papel fundamental na elucidação e compreensão da natureza

do espaço e do tempo [1, 6, 3, 9]. É a *métrica* da relatividade restrita. Discutiremos mais sobre isso após a apresentação de algumas notações.

Iremos escrever x^1 , x^2 e x^3 ao invés de x , y e z . Além disso, em vez de adotarmos a coordenada temporal pela representação ct , escreveremos x^0 , mas continuaremos nos referindo à esta como “tempo”. Notemos que os índices estão sobrescritos; na terminologia, são chamados *contravariantes*. Podemos utilizar x^i , com índice em letra minúscula do alfabeto latino (i, j, k, \dots), como um símbolo genérico para qualquer componente espacial. Sendo assim, escreveremos x^μ , com índice em letra minúscula do alfabeto grego (μ, ν, σ, \dots), como um símbolo genérico tanto para um ponto no espaço-tempo de Minkowski como para um quadrivetor. [1]

De maneira geral, escrevemos o intervalo conforme

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (65)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ representa as componentes da *métrica de Minkowski*.

Por uma questão de conveniência, esta última pode ser apresentada como a matriz 4×4

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deve ficar claro que, apesar das aparências iniciais, a geometria do espaço-tempo não é a geometria euclidiana quadridimensional. Em particular, dois pontos podem estar separados por distâncias cujo quadrado é positivo, negativo ou zero. Quando $(ds)^2 > 0$, dizemos que os eventos possuem separação do *tipo-espaço*. Quando temos $(ds)^2 < 0$, a separação entre os pontos é do *tipo-tempo*. Para o último caso, $(ds)^2 = 0$, dizemos que a separação é do *tipo-luz*. [1, 6, 3, 9]

Partículas com massa de repouso não nula movem-se ao longo de linhas de universo do tipo-tempo, que se encontram sempre dentro dos cones de luz. Desse modo, a velocidade destas sempre será menor que a velocidade da luz em qualquer ponto. Este é o conceito que iremos adotar futuramente, com um pouco mais de sofisticação, para descrever as órbitas de partículas ao redor de um buraco negro de Schwarzschild. [3, 2, 9]

1.6 Relatividade Geral

Como extensão ao estudo da teoria da relatividade de Einstein, torna-se fundamental a abordagem da relatividade geral. Conhecer a teoria através de uma visão mais analítica ajuda no desenvolvimento de futuros resultados; por exemplo, na determinação das órbitas de partículas ao redor de buracos negros.

Antes de iniciarmos qualquer consideração acerca da matemática envolvida, precisamos compreender a relatividade geral de maneira qualitativa, através de seus postulados e daquilo que pode ser inferido a partir destes. Sendo assim, procederemos com reflexões sobre o Princípio da Equivalência.

O Princípio da Equivalência nos diz como um sistema físico arbitrário responde à presença de um campo gravitacional externo [2]. Este princípio se baseia na correspondência entre a massa gravitacional e a massa inercial, verificada por Galileu, Newton e muitos outros pesquisadores. Ponderando sobre isso, Einstein considerou, como consequência de tal resultado, que nenhum campo gravitacional externo, homogêneo e estático, pode ser detectado localmente em um elevador em queda livre, uma vez que seus observadores, os instrumentos e o próprio elevador responderiam ao campo com a mesma aceleração. [9]

Um contexto importante a considerar, diante este princípio, é o de relógios em um campo gravitacional. Consideremos o seguinte experimento mental: Dois observadores, A e B , estão dentro de um foguete na presença de um campo gravitacional uniforme, no qual corpos caem com aceleração g [2]. O observador A se encontra no topo do foguete, à uma altura h da base, enquanto B se encontra, justamente, na base desta nave. A então emite pulsos luminosos em intervalos iguais, $\Delta\tau_A$, de acordo com um relógio posicionado na mesma altura. Em que intervalo $\Delta\tau_B$ o observador B recebe estes sinais, conforme a marcação de um relógio posicionado na base? O princípio da equivalência implica que o observador B recebe o sinal numa taxa mais rápida do que eles são emitidos [2].

Para verificar isso, vamos supor que o foguete esteja acelerando ao longo do eixo z . A posição do observador B , adotando $z_B(0) = 0$, é dada por

$$z_B(t) = \frac{1}{2}gt^2. \quad (66)$$

Sobre a posição de A , fica claro que

$$z_A(t) = h + \frac{1}{2}gt^2. \quad (67)$$

Agora, consideremos que dois pulsos são emitidos por A , um primeiro em $t = 0$, e outro após $\Delta\tau_A$ segundos. O primeiro pulso é recebido por B no instante t_1 , enquanto o segundo é recebido em $t = t_1 + \Delta\tau_B$. A distância percorrida pelo primeiro pulso é dada por

$$z_A(0) - z_B(t_1) = ct_1. \quad (68)$$

Para o segundo pulso, a distância é

$$z_A(\Delta\tau_A) - z_B(t_1 + \Delta\tau_B) = c(t_1 + \Delta\tau_B - \Delta\tau_A). \quad (69)$$

Utilizando as equações para as posições dos observadores, assumindo que os termos quadráticos de $\Delta\tau_A$ e $\Delta\tau_B$ são muito pequenos, escrevemos as Eqs.(68) e (69) conforme

$$h - \frac{1}{2}g(t_1)^2 = ct_1, \quad (70)$$

$$h - \frac{1}{2}g(t_1)^2 - g t_1 \Delta\tau_B = c(t_1 + \Delta\tau_B - \Delta\tau_A). \quad (71)$$

Subtraindo a Eq.(71) da Eq.(70), obtemos

$$g t_1 \Delta\tau_B = c(\Delta\tau_A - \Delta\tau_B). \quad (72)$$

Resolvendo a Eq.(70), conseguimos determinar t_1 . Adotando algumas simplificações neste resultado, finalmente encontramos que $t_1 = h/c$. Assim, a Eq.(72) pode ser apresentada de acordo com

$$\Delta\tau_A = \left(1 + \frac{gh}{c^2}\right) \Delta\tau_B. \quad (73)$$

Portanto, podemos concluir que o intervalo no qual os pulsos são emitidos é maior do que o intervalo no qual são recebidos. Em outras palavras, isso significa que a frequência é maior em B do que em A . Sendo assim, se a frequência luminosa percebida pelo observador A é menor, então a luz sofre um desvio para comprimentos de onda maiores, e portanto, desvia para o vermelho [2]. Este fenômeno é conhecido como *redshift gravitacional*.

1.6.1 Métrica

O primeiro conceito que devemos abordar para iniciarmos os estudos em relatividade geral se trata daquilo que iremos definir como a métrica do espaço-tempo [1, 2, 9]. Para entendermos melhor de onde vem essa ideia, consideremos uma base do espaço, dada pelos vetores $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$. Sabemos que o diferencial do vetor posição, $d\mathbf{r}$, pode ser escrito como

$$d\mathbf{r} = \sum_{\mu=0}^3 dx^\mu \mathbf{e}_\mu. \quad (74)$$

Através da Eq.(74), podemos determinar o elemento infinitesimal de comprimento, ds , conforme

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \left(\sum_{\mu=0}^3 dx^\mu \mathbf{e}_\mu \right) \cdot \left(\sum_{\nu=0}^3 dx^\nu \mathbf{e}_\nu \right) \\ &= \sum_{\mu,\nu=0}^3 (\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu) dx^\mu dx^\nu. \end{aligned} \quad (75)$$

Portanto, o elemento diferencial ds depende do produto escalar entre os vetores da base, logo, diante tal correlação, é natural definir uma nova quantidade. Neste caso, iremos definir

$$g_{\mu\nu} \equiv \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu, \quad (76)$$

onde $g_{\mu\nu}$ são as componentes de uma matriz simétrica, \mathbf{g} , nomeada *métrica* [1, 2, 9]. Assim, o elemento infinitesimal de comprimento, em termos dos componentes da métrica, pode ser escrito

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (77)$$

Em relatividade geral, existe uma convenção, conhecida como notação de Einstein, adotada como uma forma de simplificar a representação das equações através da omissão dos símbolos de somatória. A regra é: para cada índice repetido, que aparece uma vez em cima e outra embaixo, subentende-se uma soma em relação à este. [1, 2, 9, 3, 6] Portanto, a equação (77) pode ser apresentada, conforme convencionado por Einstein, da seguinte maneira

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (78)$$

Assim como discutido na seção de relatividade restrita, valem as terminologias de distância infinitesimal entre pontos vizinhos: quando $(ds)^2 > 0$, há uma separação *tipo-espaço*, e quando $(ds)^2 < 0$, a separação entre os pontos é *tipo-tempo*. Caso $(ds)^2 = 0$, a separação é *tipo-luz*. [1, 2, 3, 6]

1.6.2 Noções básicas de análise vetorial

Uma maneira de definir vetores no espaço-tempo curvo é separar os conceitos de magnitude e direção, definindo direção *localmente*, por meio de pequenos vetores. Vetores maiores podem ser construídos algebricamente, através da multiplicação por escalares e por regras de soma de vetores no espaço-tempo sem curvatura. Rigorosamente falando, o que fazemos é definir vetores num espaço tangente. [2]

Sendo assim, vetores são definidos em um ponto e ali eles obedecem todas as regras usuais da álgebra vetorial no espaço euclidiano. A associação de um vetor para cada ponto no espaço-tempo, de maneira suave, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x)$, é chamado *campo vetorial*. Entretanto, para o contexto da relatividade geral, vetores definidos em diferentes pontos estão em diferentes espaços tangentes, portanto, não podemos somar vetores de pontos distintos. Com isso, devemos abandonar a ideia dos vetores deslocamento, exceto para deslocamentos entre pontos infinitesimalmente separados, uma vez que este representa uma quantidade local. [2]

Vamos revisar algumas das ferramentas de álgebra vetorial que se aplicam aos espaços-tempo curvos. Para cada ponto, x^μ , determinamos uma base de quatro vetores, $\mathbf{e}_\mu(x)$, em termos dos quais qualquer outro vetor pode expresso como uma combinação linear,

$$\mathbf{u}(x) = u^\mu(x) \mathbf{e}_\mu(x). \quad (79)$$

Os termos $u^\mu(x)$ são chamados de componentes do vetor \mathbf{u} na base \mathbf{e}_μ .

Podemos introduzir a ideia de produto escalar, já utilizado na seção anterior, assim como no espaço euclidiano. Dados dois vetores num mesmo ponto, \mathbf{u} e \mathbf{v} , o produto escalar entre eles pode ser calculado conforme

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (u^\mu \mathbf{e}_\mu) \cdot (v^\nu \mathbf{e}_\nu) \\ &= (\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu) u^\mu v^\nu \end{aligned} \quad (80)$$

Utilizando a definição das componentes da métrica, apresentada na Eq.(76), escrevemos o produto escalar entre dois vetores como

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu. \quad (81)$$

1.6.3 Geodésicas

Partículas movem-se em linhas de universo tipo-tempo, as quais podem ser parametrizadas por quatro funções $x^\mu(\tau)$ da distância τ ao longo delas, assim como na relatividade restrita. É importante perceber que iremos considerar apenas partículas-teste que estão sob influência da curvatura do espaço-tempo [6, 2, 9]. Ou seja, as partículas estão livres de qualquer outra influência externa, e.g. forças elétricas.

O princípio geral para o movimento de partículas livres num espaço-tempo curvo afirma que a linha de universo entre dois pontos com separação tipo-tempo minimiza o tempo próprio entre eles. [6, 2, 9]

Contemplando esta descrição, vemos que tal princípio é muito parecido com aquele utilizado no formalismo lagrangiano para desenvolver as equações de Lagrange. Sendo assim, aplicaremos os conceitos desenvolvidos nesse formalismo mecânico no contexto da relatividade geral.

Como a partícula está livre, a função lagrangiana para tal sistema é, simplesmente,

$$L = \frac{1}{2}mv^2. \quad (82)$$

Considerando que o elemento diferencial de comprimento, ds , pode ser determinado através da Eq.(78), podemos escrever

$$v^2 = \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}, \quad (83)$$

onde τ é o tempo próprio da partícula. Aplicando a relação anterior à função lagrangiana, obtemos-na numa forma mais adequada ao contexto,

$$L = \frac{m}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (84)$$

Agora, para encontrar as equações diferenciais que determinam a parametrização das linhas de universo da partícula em termos do tempo próprio desta, precisamos aplicar a função (84) às equações de Lagrange,

$$\frac{\partial L}{\partial x^\lambda} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial (dx^\lambda/d\tau)} \right) = 0. \quad (85)$$

Realizando este procedimento, encontramos a seguinte expressão

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\tau^2} - \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} \right) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (86)$$

Apresentando aqui os *coeficientes de conexão afim*,

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right), \quad (87)$$

podemos denotar a Eq.(86) conforme

$$\boxed{\frac{d^2 x^\sigma}{d\tau^2} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0}. \quad (88)$$

A Eq.(88), em destaque, é a famosa **equação da geodésica**. Da forma com a qual foi apresentada nesta seção, a equação diferencial representa apenas linhas de universo tipo-tempo, entretanto, qualquer seja a forma que possa assumir, as equações da geodésica, em relatividade geral, são as equações de movimento para partículas livres. [1, 6, 2, 9]

1.6.4 Métrica de Schwarzschild

Na relatividade geral, os espaços-tempo curvos mais simples são aqueles que possuem alta simetria, e dentre estes temos aquele associado à geometria do espaço vazio fora de uma fonte de curvatura esfericamente simétrica,

e.g. uma estrela esférica ou um buraco negro sem rotação [2]. Esta é a chamada *geometria de Schwarzschild*, cujo elemento de comprimento, num sistema de coordenadas particularmente adequado, é dado por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) (c dt)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) . \quad (89)$$

A métrica $g_{\mu\nu}$ correspondente ao elemento de linha descrito acima é chamada *métrica de Schwarzschild*. [1, 3, 2, 6, 9]

Agora que a métrica foi introduzida, devemos interpretá-la com um pouco mais de cautela, averiguando as importantes propriedades que carrega.

A geometria de uma superfície bidimensional, dentro do espaço quadridimensional descrito na Eq.(89), com r e t constantes pode ser representada pelo elemento de comprimento

$$d\Sigma^2 = r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) .$$

Esta é a exata descrição da geometria de uma esfera de raio r no espaço tridimensional euclidiano. Portanto, a geometria de Schwarzschild possui as mesmas simetrias de uma esfera em relação às variações nos ângulos θ e ϕ . [2]

Além disso, algo interessante ocorre quando o raio r assume determinados valores. Por exemplo, quando $r = 0$, temos uma singularidade real da métrica. Ademais, existe outra singularidade no elemento de arco apresentado, que ocorre quando

$$1 - \frac{2GM}{c^2 r} = 0 .$$

Esta é conhecida como uma singularidade de coordenada, uma vez que pode ser eliminada através de uma mudança de coordenadas. Desta condição, extraímos a seguinte expressão

$$r = \frac{2GM}{c^2} . \quad (90)$$

Ou seja, quando o raio r assume os valores $r = 0$ ou $r = 2GM/c^2$, encontramos uma singularidade na métrica que descreve a geometria ao redor de uma distribuição esfericamente simétrica de massa. Esta última, que advém da condição dada pela expressão (90), define aquilo que iremos chamar de *raio de Schwarzschild*, sendo um fator de escala característico para a curvatura na geometria em que estamos trabalhando. [2]

Os resultados da análise gráfica das geodésicas na geometria de Schwarzschild serão apresentados na seção 2.4.

2 Resultados

2.1 Viabilidade da acreção

Inserindo a conservação de momento angular à Eq.(5), resulta em

$$\Delta E = \frac{GMm_1}{2} \left[\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) + \left(\frac{\sqrt{r} - \sqrt{r_1}}{\sqrt{r_2} - \sqrt{r}} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right) \right].$$

Como sabemos que

$$\frac{GMm_1}{2} > 0,$$

é necessário avaliar o conteúdo dos colchetes para determinar se a variação de energia, ΔE , é positiva ou negativa. Através de um trabalho algébrico relativamente extenso, é possível demonstrar que o termo entre colchetes é, de fato, negativo. Portanto, isso significa demonstrar que, no contexto do problema apresentado, temos $\Delta E < 0$. Deste resultado, conclui-se que o fenômeno de acreção é energeticamente viável diante considerações físicas adequadas; no caso, a conservação de momento angular do sistema.

2.2 Estrutura do disco de acreção newtoniano

2.2.1 Soluções analíticas

Como dito no final do segmento 1.3, apresentaremos aqui apenas as expressões finais das funções que determinam o comportamento das diversas características físicas que constituem a estrutura geral do disco de acreção.

Para a região **a**), recapitulando, temos a seguinte relação entre as pressões envolvidas: $P_{\text{radiação}} \gg P_{\text{gás}}$. Além disso, em relação à opacidade, sabe-se que $\sigma_T \gg \sigma_{ff}$. Sendo assim, uma vez desenvolvidas as soluções para esta porção do disco, obtemos

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{3}{8\pi} \frac{\sigma_T}{c} \dot{M} \left[1 - \left(\frac{6GM}{c^2 r} \right)^{1/2} \right] \\ \varepsilon &= 2\sqrt{G} \frac{c}{\sigma_T} \alpha^{-1} \dot{M}^{1/2} r^{-3/2} \\ u_0 &= \frac{64\pi}{9} \frac{c^2}{\sigma_T^2 \sqrt{G}} \alpha^{-1} \dot{M}^{-1} M^{-1/2} r^{3/2} \left[1 - \left(\frac{6GM}{c^2 r} \right)^{1/2} \right]^{-1} \\ v_r &= \frac{9}{128\pi^2} \frac{\sigma_T^2}{c^2} \sqrt{G} \alpha \dot{M}^2 M^{1/2} r^{-5/2} \left[1 - \left(\frac{6GM}{c^2 r} \right)^{1/2} \right] \\ n &= \frac{256\pi^2}{27m_p} \frac{c^3}{\sigma_T^3 \sqrt{G}} \alpha^{-1} \dot{M}^{-2} M^{-1/2} r^{3/2} \left[1 - \left(\frac{6GM}{c^2 r} \right)^{1/2} \right]^{-2} \\ T &= G^{1/8} \left(\frac{2c}{\sigma_T b} \right)^{1/4} \alpha^{-1/4} M^{1/8} r^{-3/8} \\ \tau^* &= \left\{ G^{-31/32} \sqrt{0.11 \cdot \frac{256\pi^2}{27m_p} \frac{c^3}{\sigma_T^2}} \left(\frac{64\pi}{9} \frac{c^2}{\sigma_T^2} \right) \left(\frac{2c}{b\sigma_T} \right)^{-7/16} \right\} \alpha^{-17/16} \dot{M}^{-2} M^{-31/32} r^{93/32} \left[1 - \left(\frac{6GM}{c^2 r} \right)^{1/2} \right]^{-2} \end{aligned}$$

Para a região **b**), onde $P_{gas} \gg P_{rad}$ e $\sigma_T \gg \sigma_{ff}$, as soluções encontradas são

$$\begin{aligned}
T &= \left[\left(\frac{9m_p G^{3/2} \sigma_T}{64\pi^2 kb} \frac{\sigma_T}{c} \right)^{1/5} \right] \alpha^{-1/5} \dot{M}^{2/5} M^{3/10} r^{-9/10} \left[1 - \left(\frac{6GM}{c^2 r} \right)^{1/2} \right]^{2/5} \\
u_0 &= \left[\frac{m_p \sqrt{G}}{2\pi k} \left(\frac{64\pi^2 kbc}{9m_p G^{3/2} \sigma_T} \right)^{1/5} \right] \alpha^{-4/5} \dot{M}^{3/5} M^{1/5} r^{-3/5} \left[1 - \left(\frac{6GM}{c^2 r} \right)^{1/2} \right]^{3/5} \\
z_0 &= \left[\sqrt{\frac{k}{m_p G}} \left(\frac{9m_p G^{3/2} \sigma_T}{64\pi^2 kbc} \right)^{1/10} \right] \alpha^{-1/10} \dot{M}^{1/5} M^{-17/20} r^{21/20} \left[1 - \left(\frac{6GM}{c^2 r} \right)^{1/2} \right]^{1/5} \\
n &= \left[\frac{G}{4\pi k} \sqrt{\frac{m_p}{k}} \left(\frac{64\pi^2 kbc}{9m_p G^{3/2} \sigma_T} \right)^{3/10} \right] \alpha^{-7/10} \dot{M}^{2/5} M^{21/20} r^{-33/20} \left[1 - \left(\frac{6GM}{c^2 r} \right)^{1/2} \right]^{2/5} \\
\tau^* &= \left[\frac{m_p G}{2\pi k} \left(\frac{m_p}{k} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{0.11\sigma_T}{4\pi k}} \left(\frac{64\pi^2 kbc}{9m_p G^{3/2} \sigma_T} \right)^{7/10} \right] \alpha^{-4/5} \dot{M}^{1/10} M^{1/5} r^{3/20} \left[1 - \left(\frac{6GM}{c^2 r} \right)^{1/2} \right]^{1/10} \\
v_r &= \left[\frac{k}{\sqrt{G} m_p} \left(\frac{9m_p G^{3/2} \sigma_T}{64\pi^2 kbc} \right)^{1/5} \right] \alpha^{4/5} \dot{M}^{2/5} M^{-1/5} r^{-2/5} \left[1 - \left(\frac{6GM}{c^2 r} \right)^{1/2} \right]^{-3/5}
\end{aligned}$$

Para a região **c**), onde $P_{gas} \gg P_{rad}$ e $\sigma_T \ll \sigma_{ff}$, obtiveram-se as seguintes expressões

$$\begin{aligned}
u_0 &= \left[\frac{m_p \sqrt{G}}{2\pi k} \left(\frac{256\pi^3 c}{0.99G^{5/2}} \sqrt{\frac{k^5}{m_p^3}} \right)^{1/10} \right] \alpha^{-4/5} \dot{M}^{7/10} M^{1/4} r^{-3/4} \left[1 - \left(\frac{6GM}{c^2 r} \right)^{1/2} \right]^{7/10} \\
T &= \left[\frac{0.99G^{5/2}}{256\pi^3 c} \sqrt{\frac{m_p^3}{k^5}} \right]^{1/10} \alpha^{-1/5} \dot{M}^{3/10} M^{1/4} r^{-3/4} \left[1 - \left(\frac{6GM}{c^2 r} \right)^{1/2} \right]^{3/10} \\
z_0 &= \left[\sqrt{\frac{k}{Gm_p}} \left(\frac{0.99G^{5/2}}{256\pi^3 c} \sqrt{\frac{m_p^3}{k^5}} \right)^{1/20} \right] \alpha^{-1/10} \dot{M}^{3/20} M^{-3/8} r^{9/8} \left[1 - \left(\frac{6GM}{c^2 r} \right)^{1/2} \right]^{3/20} \\
n &= \left[\frac{G}{4\pi m_p} \left(\frac{m_p}{k} \right)^{3/2} \left(\frac{256\pi^3 c}{0.99G^{5/2}} \sqrt{\frac{k^5}{m_p^3}} \right)^{3/20} \right] \alpha^{-7/10} \dot{M}^{11/20} M^{5/8} r^{-15/8} \left[1 - \left(\frac{6GM}{c^2 r} \right)^{1/2} \right]^{11/20} \\
\tau &= \left[\frac{0.11G^{3/2}}{8\pi^2 k} \left(\frac{m_p}{k} \right)^{3/2} \left(\frac{256\pi^3 c}{0.99G^{5/2}} \sqrt{\frac{k^5}{m_p^3}} \right)^{3/5} \right] \alpha^{-4/5} \dot{M}^{1/5} \left[1 - \left(\frac{6GM}{c^2 r} \right)^{1/2} \right]^{1/5} \\
v_r &= \left[\frac{k}{m_p \sqrt{G}} \left(\frac{0.99G^{5/2}}{256\pi^3 c} \sqrt{\frac{m_p^3}{k^5}} \right)^{1/10} \right] \alpha^{4/5} \dot{M}^{3/10} M^{-1/4} r^{-1/4} \left[1 - \left(\frac{6GM}{c^2 r} \right)^{1/2} \right]^{-7/10}
\end{aligned}$$

2.2.2 Estimativas de magnitude

Agora, iremos realizar uma análise quantitativa acerca dessas soluções para averiguar as ordens de grandeza com as quais estamos lidando.

Primeiramente, se quisermos avaliar essas informações de maneira correta, devemos definir um intervalo coerente de magnitudes para a taxa de acreção do gás e um valor fixo para a massa do buraco negro. Para isso, adotamos um buraco negro estelar, cuja massa M é da ordem de $\sim 10M_{\odot}$. Já para a taxa de acreção, utilizando dados contidos em Shakura & Sunyaev (1973), realizaremos as aproximações com um valor dentro do intervalo que vai de $\dot{M} = 1 \cdot 10^{-12} \left[\frac{M_{\odot}}{\text{ano}} \right]$, representando um fluxo de matéria do regime subcrítico, até $\dot{M}_{\text{cr}} = 3 \cdot 10^{-7} \left[\frac{M_{\odot}}{\text{ano}} \right]$, o qual representa o fluxo crítico para um buraco negro de massa $M = 10M_{\odot}$. Fluxo crítico aqui refere-se ao valor máximo de fluxo na acreção que produz a maior luminosidade emitida pelo disco; ou seja, trata-se da taxa de acreção associada ao limite de Eddington.

Em relação à opacidade σ_T do gás para as regiões **a)** e **b)** do disco, este possui um valor numérico igual à $0.4 \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{g}} \right]$, pois estamos assumindo que a matéria em acreção é formada apenas por gás hidrogênio.

Além disso, precisamos escolher o valor do parâmetro de viscosidade α que determina o estresse viscoso, o qual promove todo o fenômeno de acreção dentro do disco. Shakura & Sunyaev apontam em seu artigo que, se o valor de α estiver dentro do vasto intervalo

$$10^{-15} \left(\frac{\dot{M}}{\dot{M}_{\text{cr}}} \right)^2 < \alpha < 1, \quad (91)$$

então a estrutura do disco, essencialmente, não muda.

Em suma, para a análise da ordem de magnitude das características do disco, utilizaremos os seguintes parâmetros

$$M = 10M_{\odot}, \quad \dot{M} = 10^{-8} \left[\frac{M_{\odot}}{\text{ano}} \right], \quad \alpha = 0.5$$

Antes de iniciarmos os cálculos, precisamos definir os intervalos de r que definem cada uma das três diferentes regiões do disco. Sabemos, por exemplo, que a região mais interna acaba no que chamamos de *órbita circular marginalmente estável*, i.e. a distância mais próxima possível do buraco negro em que uma partícula pode realizar uma órbita circular estável. Para um buraco negro não rotacional, essa órbita é 3 vezes o raio de Schwarzschild, portanto, de acordo com nossas considerações, temos

$$r_0 = \frac{6GM}{c^2} \simeq 8.864 \cdot 10^6 \text{ [cm]} .$$

Utilizando as soluções apresentadas no segmento anterior, podemos determinar os raios que limitam duas regiões distintas do disco. Realizado este procedimento, aplicando os parâmetros aqui adotados, a borda que divide as regiões **a)** e **b)** se encontra no raio

$$r_{ab} = 8.787 \cdot 10^7 \text{ [cm]} .$$

A borda que separa as regiões **b)** e **c)** se encontra próximo ao raio

$$r_{bc} = 5.716 \cdot 10^9 \text{ [cm]} .$$

Conhecendo agora os intervalos em que estão definidas as 3 regiões do disco, podemos escolher um raio arbitrário entre estes para analisar a ordem de grandeza das propriedades que solucionamos em cada uma destas regiões. Sendo assim, as escolhas são

$$r_a = 4.836 \cdot 10^7 \text{ [cm]} , \quad r_b = 2.902 \cdot 10^9 \text{ [cm]} , \quad r_c = 5 \cdot 10^{10} \text{ [cm]} .$$

Definidas todas essas condições, podemos finalmente partir à análise.

Para a região **a**), mais interna, a uma distância $r_a = 4.836 \cdot 10^7$ [cm] do buraco negro, temos

$$\begin{aligned}
 z_0 &\approx 5.764 \cdot 10^5 \text{ [cm]} \\
 \varepsilon &\approx 3.259 \cdot 10^{13} \left[\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3} \right] \\
 u_0 &\approx 6.388 \cdot 10^3 \left[\frac{\text{g}}{\text{cm}^2} \right] \\
 v_r &\approx 3.267 \cdot 10^5 \left[\frac{\text{cm}}{\text{s}} \right] \\
 n &\approx 3.312 \cdot 10^{21} \left[\frac{\text{partículas}}{\text{cm}^3} \right] \\
 T &\approx 4.307 \cdot 10^6 \text{ [K]} \\
 \tau^* &\approx 3.018 \cdot 10^{-3}
 \end{aligned}$$

Para a região **b**), intermediária, a uma distância $r_b = 2.902 \cdot 10^9$ [cm] do buraco negro, temos

$$\begin{aligned}
 z_0 &\approx 2.237 \cdot 10^7 \text{ [cm]} \\
 u_0 &\approx 1.824 \cdot 10^3 \left[\frac{\text{g}}{\text{cm}^2} \right] \\
 v_r &\approx 1.897 \cdot 10^4 \left[\frac{\text{cm}}{\text{s}} \right] \\
 n &\approx 2.418 \cdot 10^{19} \left[\frac{\text{partículas}}{\text{cm}^3} \right] \\
 T &\approx 3.071 \cdot 10^5 \text{ [K]} \\
 \tau^* &\approx 29.27
 \end{aligned}$$

Para a região **c**), mais externa, a uma distância $r_c = 5 \cdot 10^{10}$ [cm] do buraco negro, temos

$$\begin{aligned}
 z_0 &\approx 5.167 \cdot 10^8 \text{ [cm]} \\
 u_0 &\approx 2.369 \cdot 10^2 \left[\frac{\text{g}}{\text{cm}^2} \right] \\
 v_r &\approx 8.824 \cdot 10^3 \left[\frac{\text{cm}}{\text{s}} \right] \\
 n &\approx 1.375 \cdot 10^{17} \left[\frac{\text{partículas}}{\text{cm}^3} \right] \\
 T &\approx 3.438 \cdot 10^4 \text{ [K]} \\
 \tau &\approx 473.93
 \end{aligned}$$

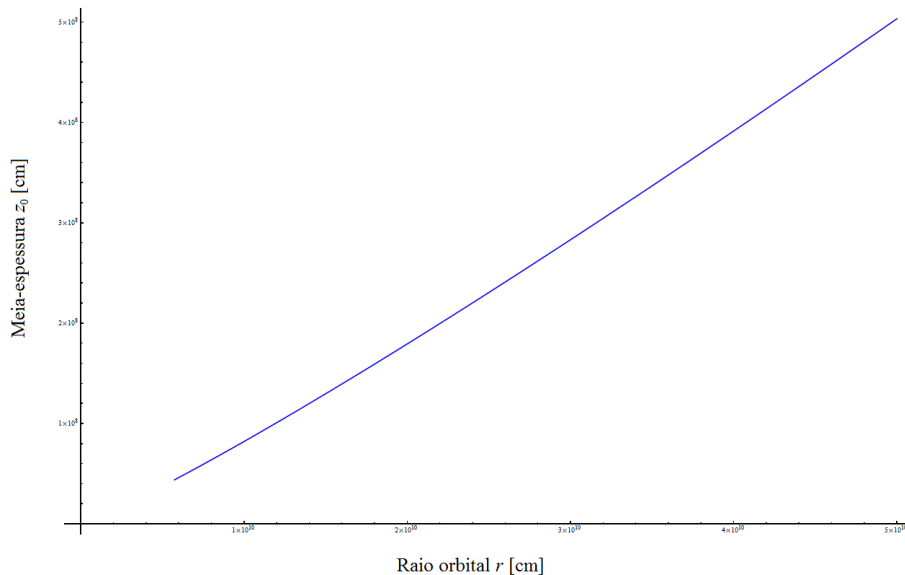
A partir destes dados, é possível verificar informações compatíveis com aquilo que esperávamos conferir após o desenvolvimento do modelo. Por exemplo, vemos que, conforme nos afastamos do objeto central, a temperatura no disco tende a diminuir. E isso é exatamente o que ocorre.

2.2.3 Análise gráfica das soluções

Dentro do âmbito de estudo das chamadas *hard sciences*, há diversas maneiras de apresentarmos nossos resultados e, a partir destes dados, extrair informações importantes sobre os fenômenos considerados e inferir novas hipóteses mais sólidas. Dentro do desenvolvimento neste projeto, temos soluções analíticas ininteligíveis, e por esse motivo, foram realizadas as estimativas no segmento anterior para que pudéssemos obter alguma intuição acerca do modelo elaborado. Entretanto, a melhor forma de compreender como tais soluções reproduzem a estrutura do objeto em questão é plotando as funções em relação ao raio orbital r .

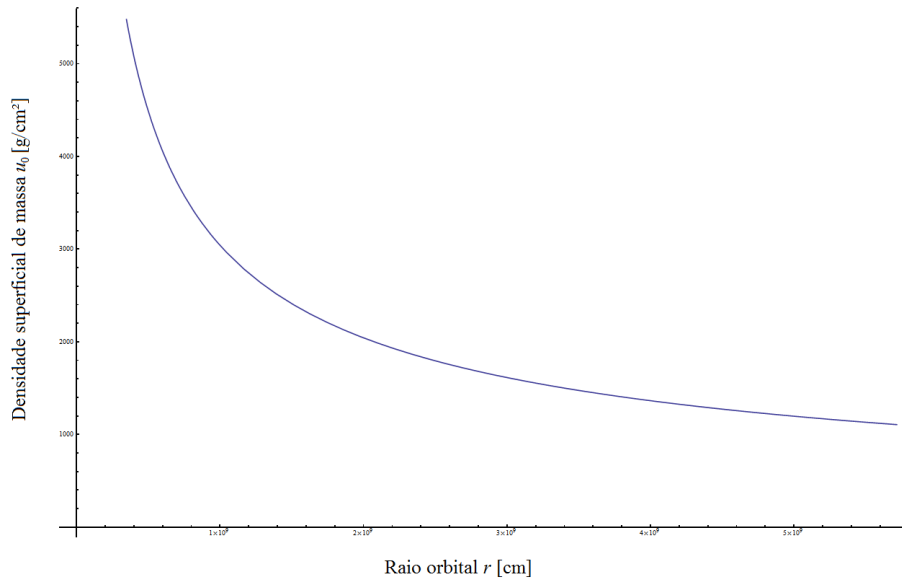
O software utilizado para essa tarefa foi o *Wolfram Mathematica 9*, com auxílio da ferramenta que permite inserir uma função definida por partes no kernel do programa, sendo a mais produtiva deste procedimento, apesar dos outros instrumentos utilizados no software também possuírem ampla importância.

Utilizando os valores discutidos anteriormente, que definem a separação entre as regiões do disco, indicamos os intervalos entre as partes da função para cada característica do disco e assim pudemos plotar os gráficos 1 a 7.



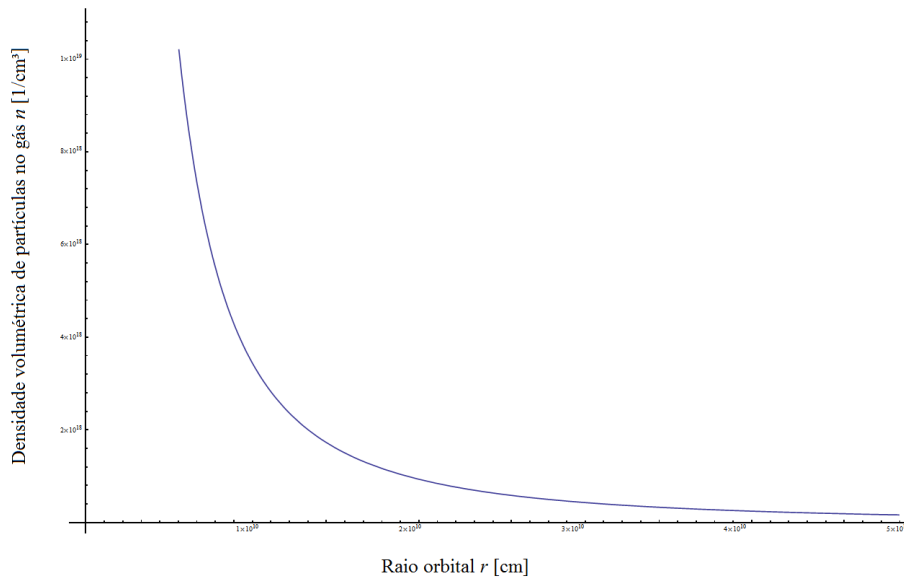
(Gráfico 1. Meia-espessura z_0 do disco em função do raio orbital r .)

No Gráfico 1, vemos que a espessura total do disco, $2z_0$, cresce linearmente de acordo com o distanciamento do objeto central. Ou seja, o disco assume um caráter mais espesso nas bordas externas e vai afinando esse aspecto conforme se aproxima do buraco negro.



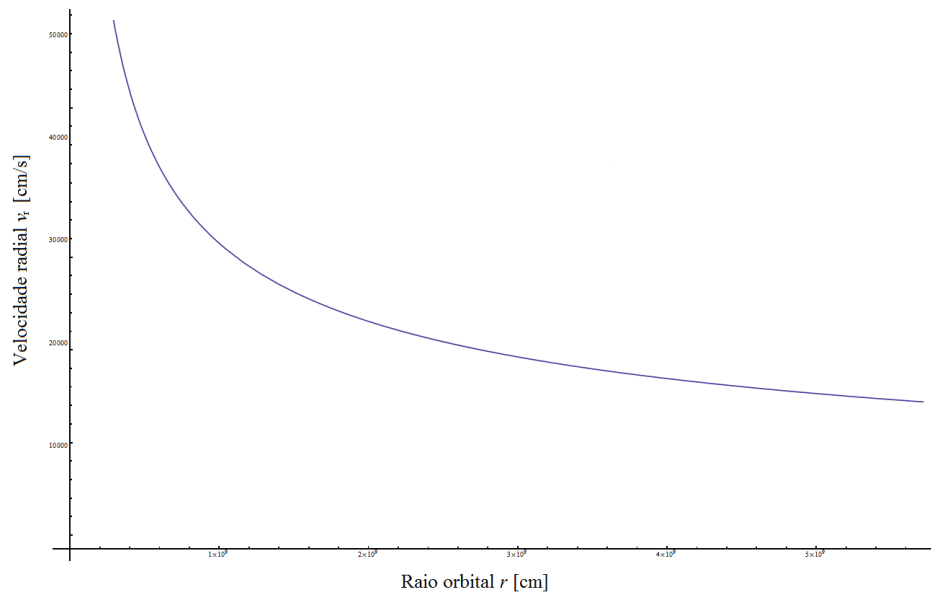
(Gráfico 2. Densidade superficial de matéria u_0 do disco em função do raio orbital r .)

O disco apresenta uma maior concentração de massa por unidade de área quanto mais próximo do buraco negro, conforme observamos no Gráfico 2. Sendo assim, é superficialmente menos denso nas camadas exteriores.



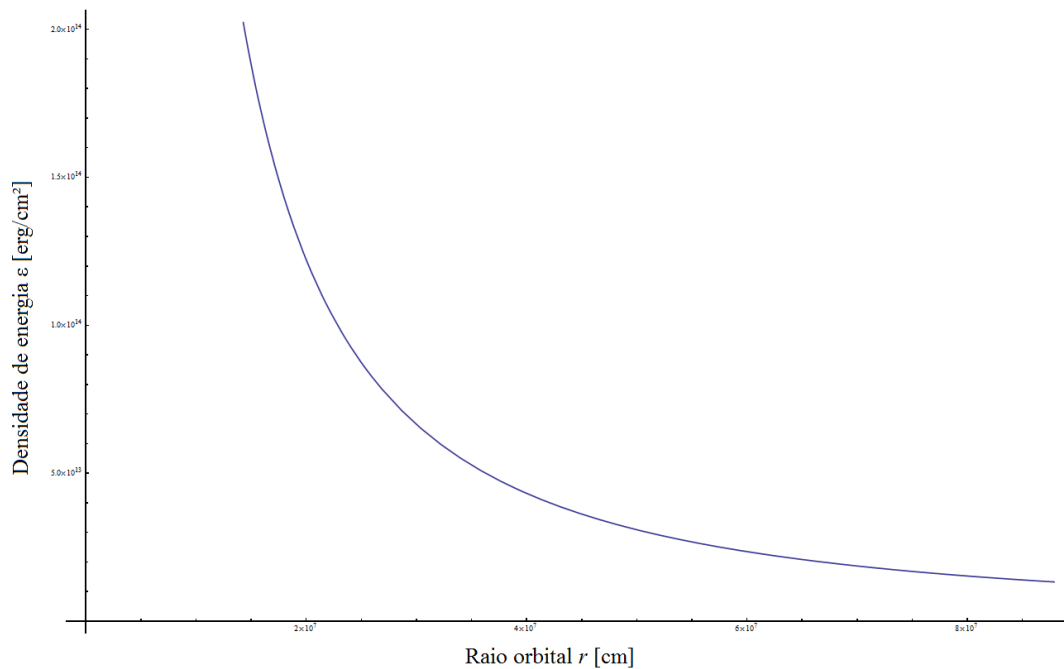
(Gráfico 3. Densidade volumétrica de partículas n em função do raio orbital r .)

Considerando que a densidade superficial de massa u_0 cresce à medida que nos aproximamos do objeto central, e a meia-espessura do disco diminui nessa faixa, então é natural esperarmos que a densidade de partículas do gás por unidade de volume do disco também aumente conforme nos aproximamos do buraco negro. Este raciocínio indutivo mostra-se correto no Gráfico 3, construído apenas com ajuda das soluções analíticas apresentadas, portanto, demonstrando um excelente grau de confiabilidade nos resultados.



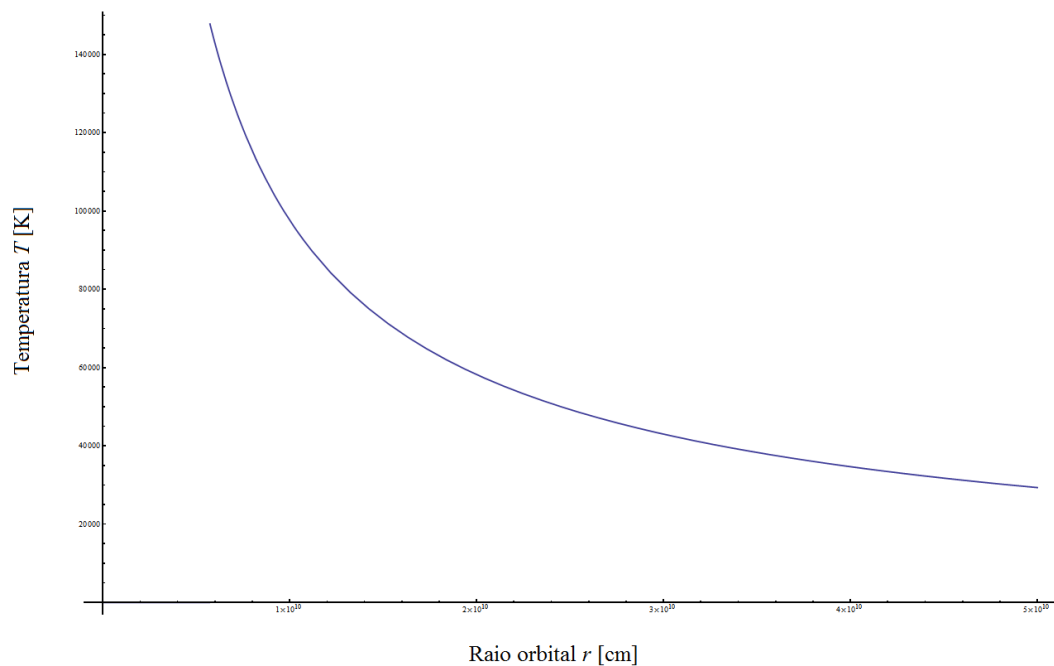
(Gráfico 4. Velocidade radial do gás v_r em função do raio orbital r .)

No Gráfico 4, vemos que a componente radial da velocidade dos elementos gasosos aumenta conforme observamos as regiões do disco mais próximas ao buraco negro, indicando que a matéria em acreção no disco move-se cada vez mais rápido em direção ao corpo central quanto mais próxima dele.



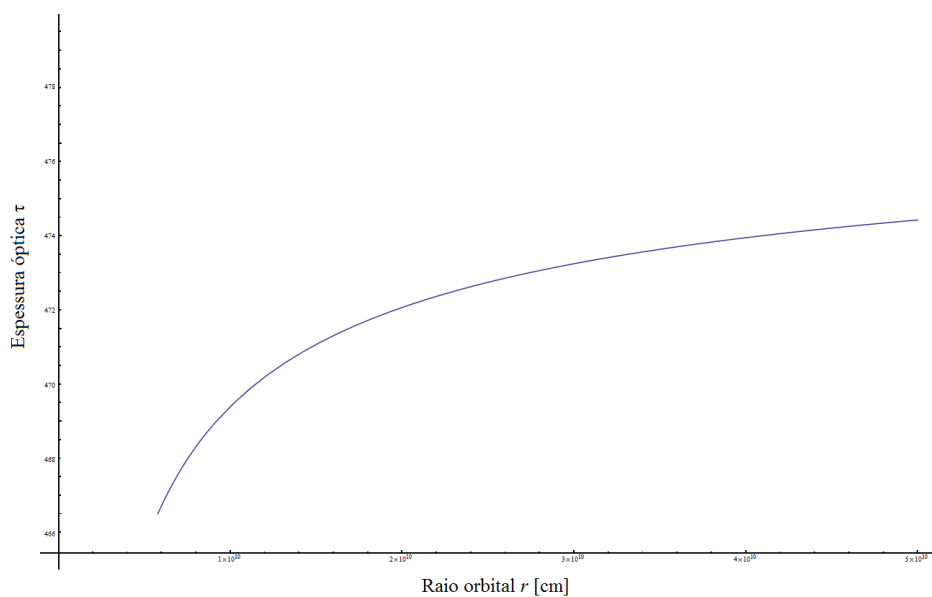
(Gráfico 5. Densidade de energia ϵ em função do raio orbital r .)

O disco possui uma quantidade de energia por unidade de área muito maior em regiões próximas ao buraco negro do que em relação às regiões mais afastadas. O Gráfico 5 nos indica que o disco emite muito mais radiação através de suas camadas internas, e são estas, portanto, que emitem maior parte da luminosidade observada no fenômeno de acreção.



(Gráfico 6. Temperatura T no interior do disco em função do raio orbital r .)

Visto que a densidade de energia no disco diminui com o distanciamento em relação ao corpo central que orbita, poderíamos inferir que a temperatura do mesmo se comportaria de modo análogo, e é exatamente isso que observamos no Gráfico 6.



(Gráfico 7. Espessura óptica τ em função do raio orbital r .)

Pelo Gráfico 7, vemos que a espessura óptica do disco aumenta conforme nos afastamos do buraco negro, ou seja, o disco torna-se mais opaco nas regiões externas, estabelecendo condições menos eficientes à emissão de radiação nestas camadas. Esta emissão se dá na forma de raios-X [7, 8]. Próximo ao buraco negro, a espessura

óptica é muito menor, portanto, o processo da emissão de luminosidade do disco é favorecido, tornando estas camadas mais visíveis.

2.3 Leis de Kepler

O estudo do formalismo lagrangiano é relevante, pois esta generalização permite uma análise profunda do movimento de sistemas mecânicos através de ferramentas matemáticas bem estabelecidas, além de facilitar o desenvolvimento analítico de muitos sistemas relativamente complicados, como o de um pêndulo duplo, por exemplo. No contexto do projeto, este formalismo mecânico foi proposto com a finalidade de entender significativamente a gravitação universal.

Consideremos um caso semelhante ao do problema da força central, porém simplificado, para desenvolver as leis de Kepler. Iremos adotar uma configuração mais voltada ao projeto, uma partícula de massa m que orbita um buraco negro de massa M . Como neste caso, é nítido que $M \gg m$, então podemos considerar que o corpo central está parado. Além disso, é também conveniente colocar a origem do sistema de coordenadas no corpo massivo.

Em primeira instância, é necessário construir a lagrangiana do sistema. Sabemos que a energia cinética deste conjunto é dado unicamente pela partícula m . Em coordenadas polares, temos

$$T = \frac{1}{2}m \left[\dot{r}^2 + r^2 (\dot{\theta})^2 \right].$$

Para a energia potencial V , numa abordagem dentro da gravitação clássica, será dada unicamente por

$$V = -\frac{GMm}{r}.$$

Com isso, a função lagrangiana para tal sistema será

$$L = \frac{1}{2}m \left[\dot{r}^2 + r^2 (\dot{\theta})^2 \right] + \frac{GMm}{r}. \quad (92)$$

Agora, podemos aplicar a função (92) à equação de Lagrange e determinar as equações de movimento para a órbita da partícula em torno do buraco negro.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \implies \boxed{\ddot{r} - r (\dot{\theta})^2 + \frac{GM}{r^2} = 0}. \quad (93)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \implies \boxed{\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = 0}. \quad (94)$$

2.3.1 Segunda Lei de Kepler

À partir da Eq.(94), podemos demonstrar a segunda lei de Kepler. É interessante notar que esta equação de movimento representa a conservação de momento angular do sistema em questão.

Em coordenadas polares, podemos escrever o elemento de área dA conforme

$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta.$$

Sendo assim, temos que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt} \equiv \frac{1}{2}r^2 \dot{\theta}.$$

Aplicando a relação imediatamente anterior à Eq.(94), obtemos

$$\frac{d}{dt} \left(2 \frac{dA}{dt} \right) = 0,$$

o que será satisfeito se, e somente se,

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \text{constante}}. \quad (95)$$

Ou seja, para que o momento angular do sistema seja conservado, é necessário que o corpo em órbita delimite áreas iguais em intervalos iguais de tempo. De modo simplificado, a relação (95) afirma que o vetor posição da partícula em relação ao corpo central varre áreas iguais em tempos iguais. Temos então demonstrado a segunda lei de Kepler, também conhecida como “lei das áreas”.

2.3.2 Primeira Lei de Kepler

A derivação da primeira lei de Kepler não é tão óbvia quanto a da segunda. Esta prova requer algumas substituições nada triviais. Entretanto, é possível resumir os principais artifícios por detrás dessa demonstração: utilizaremos, de maneira implícita, a conservação de energia e de momento angular do sistema.

Antes de utilizarmos da outra equação de movimento encontrada, é necessário que saibamos algumas relações. Por exemplo, ao derivarmos r^{-1} em relação ao tempo, obtemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \dot{r}.$$

Sendo assim, podemos escrever a derivada de r em relação ao tempo, conforme

$$\dot{r} = -r^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right).$$

Além disso, pela Eq.(94), vemos que $r^2 \dot{\theta} = \text{constante}$, portanto, convém atribuir algum símbolo que denote tal quantidade. Definimos arbitrariamente $r^2 \dot{\theta} \equiv l$. Com este dado, podemos escrever \dot{r} do seguinte modo

$$\dot{r} = -\frac{l}{\dot{\theta}} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) = -l \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right).$$

Derivando a equação acima em relação ao tempo, temos

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= -l \frac{d}{dt} \left[\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right] = -l \dot{\theta} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) \\ \therefore \ddot{r} &= -\frac{l^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right). \end{aligned}$$

Essa relação será de grande utilidade para simplificarmos a componente radial da equação de movimento. Aplicando a igualdade demonstrada anteriormente à Eq.(93),

$$\frac{l^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + r (\dot{\theta})^2 = \frac{GM}{r^2}. \quad (96)$$

Com um pouco mais de manipulação algébrica, recordando que $r^2 \dot{\theta} \equiv l$, reescrevemos a Eq.(96) conforme

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{GM}{l^2}. \quad (97)$$

A solução geral desta equação diferencial ordinária assume a forma

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{l^2} [1 + e \cos(\theta + \phi)],$$

onde e e ϕ são duas constantes de integração. Se escolhermos θ como sendo zero quando o raio orbital r é mínimo, então a constante e será positiva e $\phi = 0$. Realizadas estas considerações, a equação que descreverá a trajetória da massa m é

$$r(\theta) = \frac{l^2/GM}{1 + e \cos \theta}. \quad (98)$$

Como o numerador dessa equação é uma constante, podemos simplesmente escrever

$$p \equiv \frac{l^2}{GM},$$

e assim, apresentar a solução da equação de movimento (97) da seguinte maneira

$$\boxed{r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}}. \quad (99)$$

Em particular, quando

$$\begin{aligned} e = 0 & \quad \text{a curva é uma circunferência;} \\ e < 1 & \quad \text{a curva é uma elipse;} \\ e = 1 & \quad \text{a curva é uma parábola;} \\ e > 1 & \quad \text{a curva é uma hipérbole.} \end{aligned}$$

Vemos que a constante e é compatível com a *excentricidade* das seções cônicas, portanto, as órbitas na gravitação universal podem assumir um perfil qualquer dentre estas quatro curvas. O fator que determinará o aspecto da órbita é a energia total do sistema. Temos demonstrado aqui a primeira lei de Kepler, também conhecida como “lei das órbitas elípticas”.

2.3.3 Terceira Lei de Kepler

Uma vez que conhecemos os resultados fornecidos pela duas leis anteriores, é possível definir uma fórmula que correlaciona propriedades geométricas da órbita com o período de movimento. É algo compreensível, pois significa que a partícula em órbita irá varrer a área total da elipse uma vez que completar uma volta, após um intervalo de tempo $\Delta t = \tau$, onde τ representa o período orbital.

Sabemos que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \equiv \frac{1}{2} l.$$

Para calcular o período orbital, integramos esta equação em relação ao tempo, com um intervalo equivalente ao período de uma órbita completa

$$\int dA = \int_0^\tau \frac{l}{2} dt \implies A_{\text{órbita}} = \frac{l}{2} \tau.$$

Considerando uma órbita elíptica, conforme apresentado pela primeira lei, temos que

$$A_{\text{órbita}} = \pi ab,$$

onde a é o semi-eixo maior e b é o semi-eixo menor.

Além disso, sabendo que a excentricidade e de uma elipse pode ser escrita como

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}},$$

então é possível descrever a área desta órbita apenas em função do semi-eixo maior, a . Uma vez que $b = a\sqrt{1 - e^2}$, temos

$$A_{\text{órbita}} = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2},$$

portanto,

$$\pi a^2 \sqrt{1 - e^2} = \frac{l}{2} \tau. \quad (100)$$

Elevando os dois lados da Eq.(100) ao quadrado,

$$\pi^2 a^4 (1 - e^2) = \frac{l^2}{4} \tau^2. \quad (101)$$

Durante a demonstração da primeira lei, assumimos que quando $\theta = 0$, r assume o valor mínimo, r_0 . Sendo assim, através da equação das secções cônicas, adotando $r(0) = r_0$, obtemos a relação

$$r_0 = \frac{p}{1 + e}.$$

Além disso, é possível inferir a relação

$$r_0 = a - e,$$

uma vez que o buraco negro se encontra na origem do sistema de coordenadas. Incorporando ambas as igualdades, temos que

$$1 + e = \frac{p}{a - e}.$$

Retornando à Eq.(101), podemos escrevê-la conforme

$$\pi^2 a^4 \left(\frac{1 - e}{a - e} \right) p = \frac{l^2}{4} \tau^2. \quad (102)$$

Sabendo que $p \equiv l^2/GM$, e considerando a aproximação

$$\frac{1 - e}{a - e} \approx \frac{1}{a},$$

visto que a excentricidade de órbitas quase circulares são próximas de zero, temos

$$\boxed{\tau^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3}. \quad (103)$$

Temos demonstrado a terceira lei de Kepler, também conhecida como a “lei dos períodos”.

A aproximação adotada no último passo antes de apresentarmos a Eq.(103) é aceitável, pois a lei em questão fora desenvolvida com a análise de dados do próprio sistema solar. Quando verificamos a excentricidade das órbitas da maior parte dos planetas no sistema solar observamos que estas, de fato, assumem valores próximos de zero. Historicamente, uma vez que a lei se consagrou diante dados de órbitas quase circulares, então é natural que possamos realizar essa aproximação.

2.4 Geodésicas tipo-tempo na métrica de Schwarzschild

Explicitamente, a métrica $g_{\mu\nu}(x)$ associada à geometria de Schwarzschild pode ser escrita conforme

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (104)$$

Uma vez que temos conhecimento da métrica de um determinado espaço-tempo, é fácil construir os coeficientes de conexão afim, dados pela Eq.(87) em termos dos componentes da métrica. Realizando esse longo processo, apresento abaixo apenas os coeficientes de conexão afim não-nulos da métrica de Schwarzschild.

$$\begin{aligned} \Gamma^r_{tt} &= -\frac{GM(2GM - c^2 r)}{c^4 r^3} & \Gamma^r_{rr} &= \frac{GM}{r(2GM - c^2 r)} & \Gamma^r_{\theta\theta} &= \frac{2GM}{c^2} - r \\ \Gamma^r_{\phi\phi} &= \left(\frac{2GM}{c^2 r} - 1\right) r \sin^2 \theta & \Gamma^t_{tr} &= -\frac{GM}{r(2GM - c^2 r)} & \Gamma^\theta_{\theta r} &= \frac{1}{r} \\ \Gamma^\theta_{\phi\phi} &= -\sin \theta \cos \theta & \Gamma^\phi_{\phi r} &= \frac{1}{r} & \Gamma^\phi_{\phi\theta} &= \cot \theta \end{aligned}$$

Deve ficar claro que não estão explícitos os coeficientes simétricos aos apresentados anteriormente, e.g., sendo $\Gamma_{\phi r}^{\phi} = \Gamma_{r\phi}^{\phi}$, é conveniente indicar apenas um destes. Tendo determinado tais coeficientes, podemos escrever as equações das geodésicas tipo-tempo para cada uma das coordenadas de Schwarzschild. Realizando todo o procedimento, encontramos as seguintes equações de movimento

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} - \frac{1}{r \left(1 - \frac{c^2 r}{2GM}\right)} \frac{dr}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = 0 \quad ; \quad \frac{d^2 \phi}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} + 2 \cot \theta \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} = 0$$

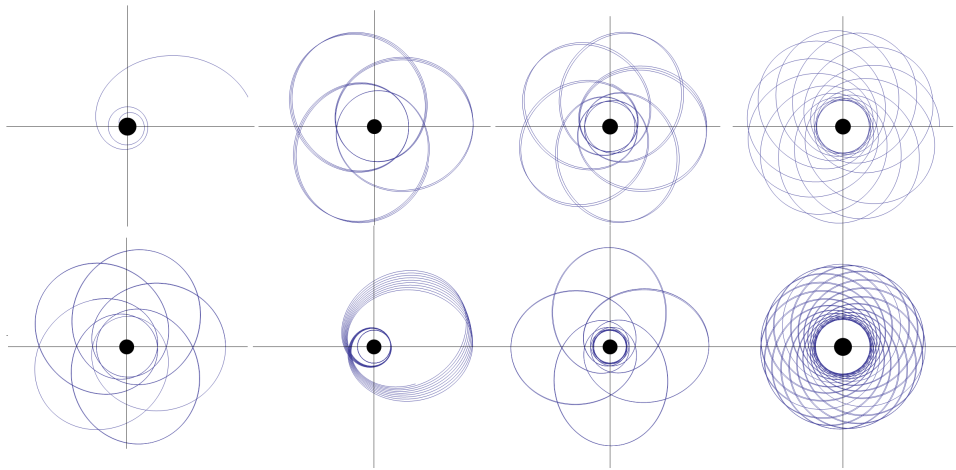
$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} - \left(\frac{2G^2 M^2}{c^4 r^3} - \frac{GM}{c^2 r^2}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{r \left(2 - \frac{c^2 r}{GM}\right)} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{2GM}{c^2} - r\right) \left[\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2\right] = 0.$$

Utilizando as funções `NDSolve` e `ParametricPlot` do software *Wolfram Mathematica 9*, em conjunto com algumas outras ferramentas de desenvolvimento para facilitar a manipulação das condições iniciais, é possível resolver numericamente as equações anteriores e assim obter uma representação visual das geodésicas tipo-tempo na métrica de Schwarzschild, ou seja, um gráfico que representa as órbitas de partículas ao redor de uma distribuição esfericamente simétrica de matéria, como, por exemplo, um buraco negro. Entretanto, como as equações gerais são muito complexas, faremos isso para um caso mais específico: órbitas limitadas ao plano equatorial. Nas coordenadas que estamos utilizando, uma órbita nestas considerações é aquela que se encontra sempre em $\theta = \pi/2$. Além disso, ao aplicar tal condição às equações diferenciais, concluímos que tais órbitas devem ser planares. As equações das geodésicas, portanto, se reduzem a

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} - \frac{1}{r \left(1 - \frac{c^2 r}{2GM}\right)} \frac{dr}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2 \phi}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} = 0$$

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} - \left(\frac{2G^2 M^2}{c^4 r^3} - \frac{GM}{c^2 r^2}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{r \left(2 - \frac{c^2 r}{GM}\right)} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{2GM}{c^2} - r\right) \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = 0.$$

Plotando as soluções numéricas deste conjunto de equações, obtemos os seguintes gráficos para diferentes condições iniciais



(Gráfico 8. Soluções numéricas para as equações das geodésicas tipo-tempo na métrica de Schwarzschild, reduzidas ao movimento no plano equatorial, i.e. $\theta = \pi/2$, para condições iniciais distintas.)

A partir do Gráfico 8, podemos extrair diversas informações sobre os tipos de órbitas e as distintas características que elas possuem, entretanto, essa discussão não será realizada no momento. Deixaremos esta tarefa para ser desenvolvida na próxima etapa do projeto.

3 Discussão

Os avanços promovidos pelo estudo dos tópicos apresentados neste relatório caminham em direção à conclusão dos objetivos finais do projeto, uma vez que já apresentamos os conceitos básicos da estrutura de um disco de acreção, através de um modelo simplificado, e proporcionamos o entendimento de elementos teóricos fundamentais para a sofisticação deste. Por exemplo, através da investigação do formalismo lagrangiano, fora possível averiguar com detalhe as equações de movimento da gravitação universal, e assim, derivar as leis de Kepler.

Uma contemplação mais aprofundada da Teoria da Relatividade de Einstein também se sucedeu, proporcionando, além de artifícios conceituais e ferramentas matemáticas, um raciocínio dedutivo mais objetivo e rebuscado dentro do âmbito da Física e do contexto deste projeto de pesquisa.

Além disso, através de certos conceitos do formalismo lagrangiano, nos foi permitida uma reprodução analítica elegantemente simples para a equação da geodésica, resultado este importantíssimo para que possamos visualizar as trajetórias orbitais das partículas do gás ao redor do buraco negro dentro do regime relativístico e, eventualmente, aplicar as devidas correções ao modelo estrutural do disco de acreção newtoniano aqui apresentado.

Por fim, é válido concluir que os resultados obtidos até o momento se desenvolveram dentro do prazo estipulado e irão perpetuar sua significância ao longo dos próximos meses de execução da pesquisa; sustentando, portanto, a evolução do projeto.

4 Cronograma

O cronograma do projeto foi concluído conforme esperado até o momento atual, e esperamos manter essa taxa de produtividade até a elaboração do Relatório Final.

1. Revisão da literatura e conceitos básicos de relatividade geral. (01/08/2016 a 30/09/2016)
2. Estudo das equações da gravitação universal. (01/10/2016 a 30/11/2016)
3. Integração numérica das equações de movimento. Elaboração do relatório parcial. (01/12/2016 a 31/01/2017)
4. Implementação das correções relativísticas, visualização das órbitas. (01/02/2017 a 31/03/2017)
5. Estudo do modelo de disco de acreção fino. (01/04/2017 a 31/05/2017)
6. Cálculo das propriedades dos discos de acreção. Relatório Final. (01/06/2017 a 31/07/2017)

5 Bibliografia

- [1] Sean M. Carroll. *An Introduction to General Relativity: Spacetime and Geometry*. Addison-Wesley, San Francisco, 2004.
- [2] James B. Hartle. *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*. Addison-Wesley, San Francisco, 2003.
- [3] Oyvind Gron; Sigbjorn Hervik. *Einstein's General Theory of Relativity: With Modern Applications to Cosmology*. Springer Science+Business Media, LLC, 2007.
- [4] Juhan Frank; Andrew King; Derek Raine. *Accretion Power in Astrophysics*. Cambridge University Press, Cambridge, 3^a edição, 2002.
- [5] H. Goldstein; C. Poole; J. Safko. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, San Francisco, 2002.
- [6] Norbert Straumann. *General Relativity*. Springer Science+Business Media, Dordrecht, 2^a edição, 2013.
- [7] N. I. Shakura; R. A. Sunyaev. Black holes in binary systems. observational appearance. *Astron. & Astrophys.* 24, pages 337–355, 1973.

- [8] Stuart L. Shapiro; Saul A. Teukolsky. *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*. Wiley-VCH, Weinheim, 2004.
- [9] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, Inc., 1972.