# Órbitas no Sistema Solar - visualização e comparação de modelos

**Michel Klüger e Cecilia Chirenti**
Centro de Matemática, Computação e Cognição, Universidade Federal do ABC
Av. dos Estados, 5001, Santo André, SP
{michel.kluger,cecilia.chirenti}@ufabc.edu.br

**Resumo:** Neste trabalho modelamos computacionalmente a atração gravitacional, fazendo uma comparação dos modelos de gravitação de Newton e da relatividade geral de Einstein, através da integração das equações de movimento para os dois casos.

## Introdução:

No contexto da gravitação, temos dois modelos distintos baseados em princípios teóricos diferentes, que fornecem previsões desejadas e corretas para apropriação do mundo pelo homem.

Isaac Newton, ao formular a sua lei da gravitação universal, podia quantificar as forças de interação gravitacional entre corpos celestes. Em 1915, Albert Einstein muda com a relatividade geral o âmbito da questão, da força para o campo, um corpo com massa gera uma curvatura do espaço-tempo. Uma diferença marcante desses modelos é o intervalo de tempo para a ação da gravidade, para Newton é instantâneo($\Delta t = 0$) e para Einstein é transmitido com a velocidade da luz, e portanto $\Delta t = \frac{\Delta S}{c}$ que é pequeno mas não nulo. E é transmitida coincidentemente com o encurvar do espaço.

Segundo a gravitação universal de Newton, um corpo exerce sobre um outro uma força que é proporcional ao inverso do quadrado da distância, e a aceleração é dada pela formula:

$$\vec{a} = -\frac{GM}{r^2}\,. \qquad (1)$$

Para Einstein um corpo que possui uma massa curva o espaço ao seu redor:

$$\kappa \;= 16\cdot G\pi c^{-2}\rho\,. \qquad (2)$$

Com correções relativísticas, a equação da aceleração fica:

$$\vec{a}_{rel} = \frac{GM}{r^2}\left(1+\frac{12k^2}{c^2r^2}\right) \qquad (3)$$

Uma consideração importante é que nessa configuração a costante de kepler $K$ é expressa por $\frac{rv}{2}$.

Os resultados apresentados a seguir foram obtidos com os programas Orbit e RelativisticOrbit.

## Verficação da primeira lei de kepler

A elipse obedece à equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, e da figura 1 temos $A = 1.13\times10^{11}/m$ e $B = 5.0\times10^{10}/m$ para a órbita de mercúrio.

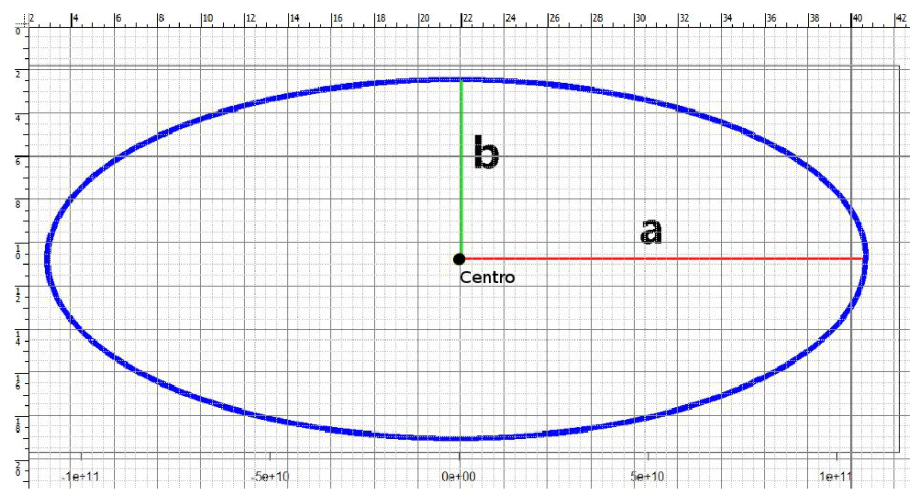


**Figura 1:** *Órbita de mercurio plotada sobre escala milimetrada. (Apesar da excentricidade parecer grande na escala utilizada, ela vale 0.206.)*

## Tipos de órbitas

A energia total $E_t$ é a soma das energias cinética e potencial:

$$E_t = \frac{mv^2}{2} - \frac{MGm}{r}\,. \qquad (4)$$

Fixando $r = R$ para uma dada posição inicial, encontramos um valor de $v_0$ para o qual a energia total é nula $E_t = 0$. Para esse valor de $v_0$ obtemos uma órbita parabólica, acima desse valor a órbita é hiperbólica ($E_t > 0$), abaixo dele a órbita é elíptica ($E_t < 0$). Os tipos de órbita podem ser vistos na figura 2.

Tomando $R = 46\times10^9\ m$ da órbita de mercúrio, obtemos como velocidade inicial para um órbita parabólica $v_0 = 76157.73105\ m/s$.

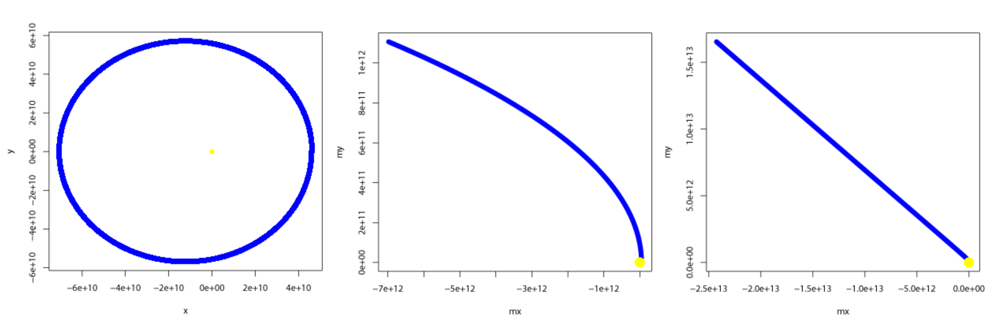

**Figura 2:** *Da esquerda para a direita: órbita elíptica, parabólica e hiperbólica.*

## Conservação de energia

Conforme visto na seção anterior, a energia total das órbitas é conservada. A figura 3 mostra as energias potencial, cinética e total ao longo de uma órbita.

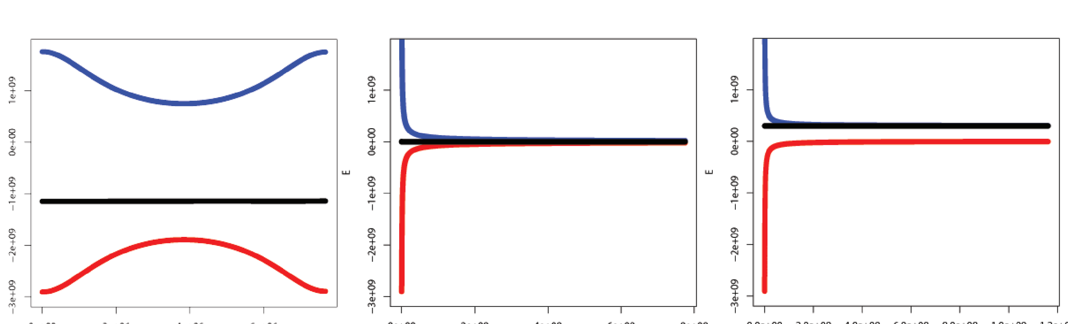

**Figura 3:** *Vermelho: energia potencial gravitacional, azul: energia cinética e preto: energia total. Da esquerda para a direita: órbita elíptica, parabólica e hiperbólica*

## Lei dos Periodos

Segundo a terceira lei de Kepler, o quadrado do periodo de um corpo orbitante é proporcional ao cubo do eixo maior de sua órbita:

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} = \frac{4\pi^2}{MG}\,. \qquad (5)$$

Da figura 4 e dos dados gerados temos $T_1 = 7.6\times10^6\ s$ para mercúrio e $T_2 = 5.19\times10^9\ s$ para netuno. Todos os resultados estão entre 2.9e-19 e 3.1e-19, mostrando que conseguimos demonstrar a terceira lei de Kepler com precisão de aproximadamente 5%.

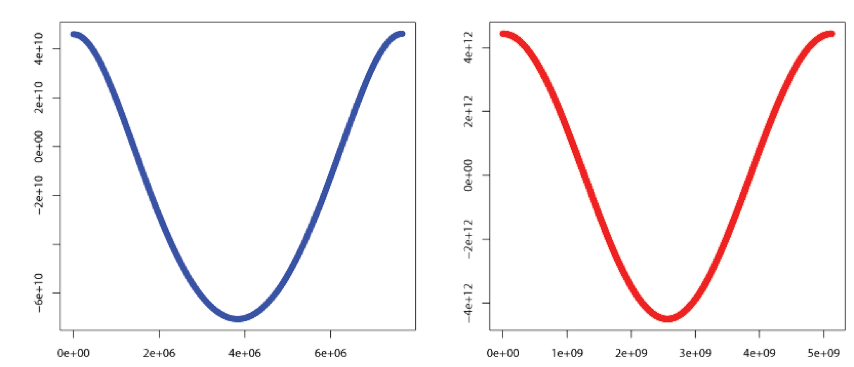

**Figura 4:** *Azul: período de mercurio, vermelho: período de netuno.*

## RelativisticOrbit

O programa RelativisticOrbit, diferentemente do Orbit, não foi traduzido para C++. Apenas para poder comparar os modelos, rodamos o programa direto de seu ambiente nativo o **triana** (Java). Devido às correções relativisticas, a órbita não é mais fechada, observamos a precessão do periélio e o sistema perde energia via emissão de ondas gravitacionais, como pode ser visto na figura 5.

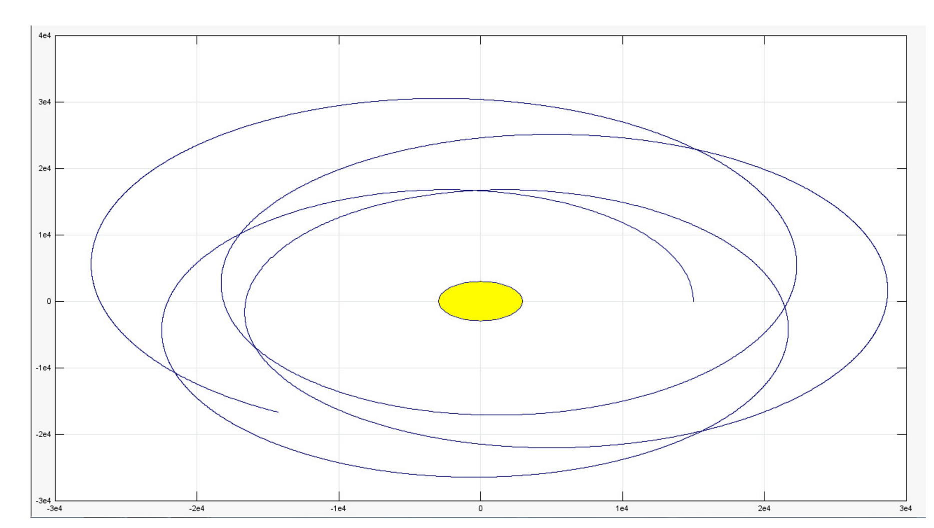

**Figura 5:** *Órbita de mercurio com correções relatívisticas.*

## Conclusão

Concluimos que órbitas obtidas dentro da teoria de Newton podem ser hiperbólicas, parabólicas ou elípticas. As órbitas mantém a sua energia total constante, por se tratar de um sistema fechado. Verificamos que as órbitas planetárias são elípticas, conforme enunciado na primeira lei de Kepler, e também foi possível verificar numericamente a terceira lei de Kepler. As órbitas relativísticas não são fechadas e não conservam energia.

**ENCONTRO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA**
27 a 30 de Setembro de 2011
**IV Simpósio** de Iniciação Científica Universidade Federal do ABC
**6º Congresso** de Iniciação Científica Universidade Municipal de São Caetano do Sul
Apoio: UFABC CNPq Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico