

**Título: Visão Geométrica Da Teoria Da Relatividade Especial**

**PIBIC-AF: Rafael Fidelis**

**Orientadora: Prof. Dra. Cecilia Chirenti**

**Centro de Matemática, Computação e Cognição.**

**Universidade Federal do ABC**

**2013**

---

**Prof. Dra. Cecilia Chirenti**

---

**Rafael Fidelis**

## **Resumo**

Nesse trabalho será apresentado um estudo do Espaço-Tempo baseado na geometria especial descrita pela Teoria da Relatividade, introduzindo as ferramentas matemáticas utilizadas para descrever fisicamente essa nova geometria, suas consequências, efeitos físicos e resolvendo alguns problemas que melhor ilustram esses efeitos.

## **Abstract**

In this report we present a study of Space-Time based on the special geometry described by the Special Theory of Relativity introducing the mathematical tools used to describe this new geometry, its consequences in physical effects and solving some problems that best illustrate these effects.

## SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	4
2 METODOLOGIA.....	6
2.1 Espaço-Tempo .....	6
Figura 1 – Diagrama de Espaço-Tempo <sup>4</sup> .....	7
Figura 2 – Hipérbole de pontos equidistantes da origem.....	9
2.2 Transformadas De Lorentz .....	10
Figura 3 – Projeção dos eixos de um referencial inercial sobre outro.....	13
1.3 Mecânica Relativística.....	13
3 RESULTADOS .....	17
3.1 Dilatação Temporal e Contração Espacial.....	17
3.2 Velocidades, Ângulos e Estrelas.....	19
4 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	28
5 CRONOGRAMA .....	29
Parte I.....	29
6 REFERÊNCIAS .....	30
7 ANEXOS .....	32
7.1 Graficos de distribuição .....	32
7.2 Simulação de distribuição de estrelas .....	32

## 1 INTRODUÇÃO

As Leis da Mecânica Clássica de Newton consideravam o universo como sendo formado por três dimensões de espaço e um tempo absoluto, medido da mesma forma por todos os referenciais<sup>1</sup>. Essas leis da forma que até então estavam formuladas eram compatíveis com o princípio clássico da relatividade desenvolvido na antiguidade por Galileu.

Galileu afirmava que as leis e fenômenos físicos deveriam ser os mesmos em qualquer referencial inercial e ele mesmo chegou a propor um conjunto de transformações envolvendo translações ou rotações simples da origem do espaço, translações na origem do tempo ou transformações devido a uma velocidade relativa entre esses diferentes referenciais, formando um grupo de transformações de 10 parâmetros chamado de Transformações de Galileu<sup>1,2</sup>, sendo assim se fosse possível definir um referencial inercial seria possível definir todos os demais referenciais<sup>2</sup>.

Transformadas de Galileu<sup>3</sup> entre referenciais com velocidade relativa:

$$\begin{cases} x' = x - Vt \\ t' = t \end{cases} \quad (1.1)$$

Essas transformações foram suficientes até o século XIX quando Maxwell unificou as leis do eletromagnetismo e formulou as famosas Equações de Maxwell que previam, de certa forma, uma velocidade constante para a luz, independente do referencial. Esse resultado era desconcertante, pois entrava em um conflito direto com o princípio da relatividade proposto por Galileu e conseqüentemente com as leis clássicas da mecânica reinantes da época. Maxwell, a fim de obter uma explicação para essa aparente incompatibilidade, propôs a existência do éter<sup>2,3</sup>, uma espécie de referencial absoluto que age como meio de propagação das ondas eletromagnéticas previsto pela sua teoria,

entretanto apesar dessa ideia ter tomado força durante o século, diversos experimentos que tentaram identificar a nossa velocidade relativa em relação ao éter “falharam”. O mais conhecido, o experimento de Michelson-Morley<sup>1,3,4</sup>, provou de forma definitiva que o Eter não possui nem uma propriedade mensurável e que as ondas eletromagnéticas se propagam com a mesma velocidade em qualquer referencial inercial.

Diante desses resultados FitzGerald e Lorentz, de maneira independente, propuseram que ele poderiam ser explicados se o comprimento dos corpos que se movem através do éter mudassem. Lorentz ao realizar um trabalho puramente matemático sobre as Equações de Maxwell chegou a propor um conjunto de transformadas, chamadas de Transformadas de Lorentz que mantinham as equações do eletromagnetismo constante, mas foi somente em 1905 que Einstein ao publicar a sua Teoria da Relatividade Especial forneceu uma explicação detalhada sobre esse paradigma. Einstein reconhecia que as ideias de espaço, tempo e as leis da mecânica como até então estavam formuladas eram suspeitas, ele rejeitou a ideia de que espaço e tempo eram entidades independentes e através de alguns simples postulados unificou-os no que hoje é chamado de Espaço-Tempo<sup>1,2,3,4</sup>.

## 2 METODOLOGIA

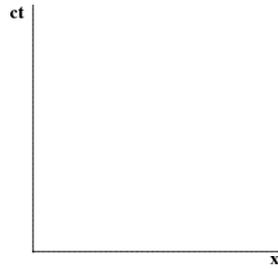
Para auxiliar no desenvolvimento de sua teoria Einstein formulou dois postulados:

- Princípio da Constância da Velocidade da Luz: A velocidade da luz deve ser a mesma medida em qualquer referencial inercial e independente do movimento do observador ou da fonte.
- Princípio da Relatividade: As Leis físicas devem ser constante em qualquer referencial inercial, dessa forma não deve haver qualquer tipo de referencial privilegiado<sup>1,2,3,4,5</sup>.

Com esses postulados Einstein unificou tempo e espaço, dessa forma a teoria da relatividade especial é uma teoria física que consiste em descrever a geometria do Espaço-Tempo plano e seus efeitos mecânicos no nosso universo<sup>5</sup>, entretanto como uma teoria de caráter geométrico sua descrição matemática se torna de suprema importância para melhor compreendê-la e trabalhá-la para resolver problemas reais, por esse motivo a metodologia desse trabalho consiste em expor essas ferramentas matemáticas fundamentais.

### 2.1 Espaço-Tempo

A melhor maneira de compreender a teoria da relatividade é entender o espaço e o tempo como dimensões de um mesmo espaço geométrico, chamado de Espaço-Tempo, dessa forma ela se transforma em uma teoria de caráter puramente geométrico que consiste em descrever as propriedades desse espaço. Uma maneira útil de visualizar essa ideia é desenhar um diagrama de Espaço-Tempo<sup>1</sup>, construído com uma dimensão de tempo e uma de espaço como mostrado na figura a seguir.



**Figura 1** – Diagrama de Espaço-Tempo<sup>4</sup>.

O uso do diagrama de espaço-tempo é muito similar ao uso de sistemas de coordenadas x-y. Por convenção se utiliza o termo  $ct$  no eixo y, onde  $c$  é a velocidade da luz<sup>1,4</sup>, para que ambos os eixos tenham a mesma dimensão física<sup>4</sup>.

É importante realçar que não podemos esperar que o Espaço-Tempo possua uma geometria similar ao espaço euclidiano, já que um corpo não pode se mover livremente para trás e para frente no tempo como ele faz no espaço, para tanto precisamos buscar ferramentas para nos auxiliar a descrever essas condições<sup>1,2,4</sup>.

Na geometria diferencial o melhor método de descrever as características de um espaço é buscar por seu elemento de linha<sup>6</sup>, uma equação que descreve as distâncias infinitesimais entre seus pontos<sup>6</sup>, para isso podemos utilizar o primeiro postulado de Einstein considerando a equação que descreve o movimento da luz no Espaço-Tempo<sup>1,2,4,5</sup>

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = c^2,$$

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = c^2 dt^2, \tag{2.1}$$

o segundo postulado garante que a luz deve ter a mesma velocidade em qualquer referencial inercial, desse modo a quantidade  $dx^2 - c^2 dt^2$ <sup>2,5</sup>, que podemos chamar de  $ds$ , ser constante em todos os referenciais levando à nossa próxima equação

$$ds^2 = dx^2 - c^2 dt^2 = dx'^2 - c^2 dt'^2. \quad (2.2)$$

Para compreender o significado físico de  $ds$  podemos imaginar um determinado referencial onde dois eventos ocorrem simultaneamente, portanto  $dt = 0$ , assim podemos definir  $ds$  como a *distancia própria*<sup>1</sup> que separa esses dois eventos em um referencial onde eles ocorrem simultaneamente.

A equação 2.2 é o nosso elemento de linha, e já nela podemos observar que nossa intuição natural de que o tempo possui características distintas do espaço estava correta e na equação isso é mostrado pelo elemento  $-c^2 dt'^2$ .

Podemos sofisticar nossos cálculos introduzindo mais alguns conceitos de geometria diferencial, podemos definir as dimensões do nosso espaço utilizando a notação de índices na forma<sup>1,2,7</sup>.

$$\begin{cases} x^0 = ct \\ x^1 = x \\ x^2 = y \\ x^3 = z \end{cases}$$

em seguida podemos reescrever o elemento de linha, com auxílio da notação de Einstein onde índices repetidos são somados<sup>1,2,5,8,9</sup>

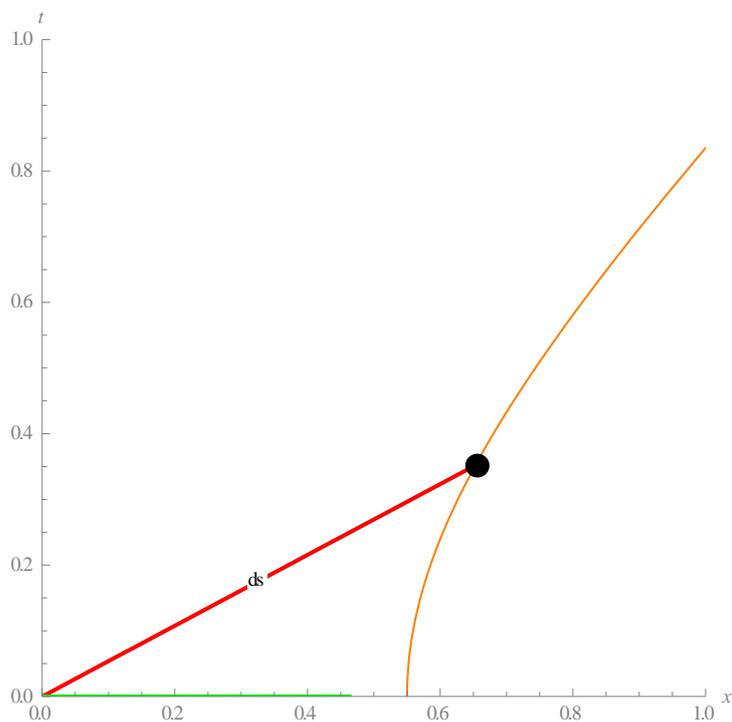
$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.3)$$

o elemento  $\eta_{\mu\nu}$  é conhecido como a pseudo-métrica<sup>9</sup> (mais pra frente referida somente como métrica) desse Espaço-Tempo. Na Relatividade Geral ela representa um tipo

singular de Espaço-Tempo, plano onde não há curvatura e conseqüentemente gravidade e é chamado de Espaço de Minkowsky. Esse espaço é o principal foco de estudo da Teoria da Relatividade Especial, que justamente leva esse nome pelo fato desse espaço ser um caso *especial* na Teoria da Relatividade Geral<sup>5</sup>.

Uma forma simples e interessante de observar o efeito dessa nova geometria no digrama de Espaço-Tempo é representar o lugar geométrico de pontos de possuem a mesma distância da origem, no espaço euclidiano já sabemos que esse lugar é chamado de círculo, no caso do espaço-tempo, essa região é chamada de hipérbole<sup>10</sup>.



**Figura 2** – Hipérbole de pontos equidistantes da origem.

A equação 2.2 também pode ser modificada assumindo um referencial onde não há movimento, isto é, em que o objeto está em repouso, assim podemos imaginar uma mudança temporal própria somente, esse  $dt$  é chamado de *tempo próprio* e denotado por  $d\tau$ <sup>1,3,4,5</sup>.

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2 c^{-2} \quad (2.5)$$

## 2.2 Transformadas De Lorentz

Detalhado alguns aspectos da geometria desse Espaço-Tempo podemos avançar para o próximo passo que é descobrir as transformadas que conectam as coordenadas de diferentes referenciais, para isso devemos assumir que essa transformada deve ser linear da seguinte forma<sup>1,2,5</sup>,

$$x^{\mu'} = \Lambda_{\mu}^{\mu'} x^{\mu} \quad , \quad (2.6)$$

em seguida, baseado no segundo postulado de Einstein, também devemos garantir que essas transformadas preservem as leis da física, por assim dizer, a quantidade  $ds$  atendendo a seguinte condição<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} &= \eta_{\mu'\nu'} x^{\mu'} x^{\nu'} \\ \eta_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} &= \eta_{\mu'\nu'} \Lambda_{\mu}^{\mu'} x^{\mu} \Lambda_{\nu}^{\nu'} x^{\nu} \\ \eta_{\mu\nu} &= \eta_{\mu'\nu'} \Lambda_{\mu}^{\mu'} \Lambda_{\nu}^{\nu'} . \end{aligned} \quad (2.7)$$

Podemos simplificar nossos cálculos sem perda de generalidade utilizando apenas duas dimensões, a dimensão espacial de direção do movimento, e o tempo.

$$\Lambda_{\mu}^{\mu'} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Executando a equação 2.7 obtemos os seguintes resultados

$$a^2 - b^2 = 1$$

$$d^2 - c^2 = 1$$

os únicos valores que atendem a essas condições são

$$\Lambda_{\mu}^{\mu'} = \begin{bmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

a transformada completa com quatro dimensões pode ser obtida se aceitarmos que como não há movimento da direção  $y$  e  $z$ , não podemos assumir alterações nessas dimensões, sendo assim<sup>1,5</sup>

$$\Lambda_{\mu}^{\mu'} = \begin{bmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta & 0 & 0 \\ \sinh \theta & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Agora se torna interessante escrever essas transformadas explicitamente em função da velocidade relativa entre os referenciais e para isso podemos utilizar a seguinte relação

$$v = \frac{dx^1}{dx^0} = \tanh \theta, \quad (2.11)$$

e com o auxílio da teoria das funções trigonométricas hiperbólicas<sup>11,12</sup>

$$\theta(v) = \operatorname{arctanh} v = \frac{\ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right)}{2}, \quad (2.12)$$

$$\cosh(\theta(v)) = \frac{e^{\theta(v)} + e^{-\theta(v)}}{2} \Rightarrow \cosh(v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \gamma \quad (2.13)$$

$$\sinh \varphi = \cosh \varphi \tanh \varphi = \gamma v \quad (2.14)$$

De posse desse resultado podemos reescrever as transformações lineares explicitamente em  $v$ :

$$\Lambda_{\mu}^{\mu'} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma v & 0 & 0 \\ \gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Como visto anteriormente,  $\Lambda_{\mu}^{\mu'}$  é chamado de Transformadas de Lorentz<sup>1,2,3,4,5,7</sup> e são usadas na teoria da relatividade para substituir as antigas transformadas de Galileu.

Com essas novas transformadas podemos imaginar como os novos eixos de um referencial são reproduzidos em outros, para isso podemos plotar as funções de pontos em que  $x'$  e  $t'$  serão 0 da seguinte forma

$$0 = x' = \gamma(x - tv),$$

$$0 = t' = \gamma(t - xv),$$

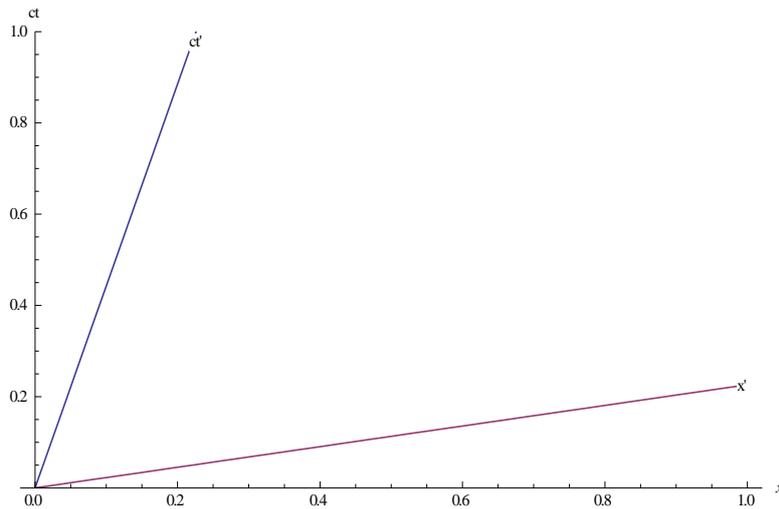
como  $\gamma$  nunca é zero os ponto em que  $x'$  é zero estarão sobre a reta

$$t = \frac{x}{v}, \quad (2.14)$$

e os que  $t'$  são 0 sobre a reta

$$t = vx, \quad (2.15)$$

como mostra a figura abaixo:



**Figura 3** – Projeção dos eixos de um referencial inercial sobre outro.

É possível observar que os novos eixos do referencial não se relacionam exatamente por uma rotação de eixos, mas sim uma compressão<sup>3,4</sup>.

### 1.3 Mecânica Relativística

O segundo postulado de Einstein requer que as equações físicas tenham a mesma forma em qualquer referencial, sejam equações covariantes, e a construção de equações covariantes leva ao estudo de tensores<sup>2,8,9</sup>. O mais simples dos tensores é um escalar, no nosso contexto a quantidade  $ds$  pode ser definida como um escalar, ou tensor de ordem 0, já que é invariante em qualquer referencial, o tensor de ordem 1, chamado de vetor que possui no Espaço-Tempo quatro componentes  $x^\mu$ . Daqui para frente podemos identificar os componentes de um quadri-vetor por índices com letras gregas e vetores tridimensionais por letras romanas<sup>5,6,8,9,10</sup>.

Uma ferramenta útil ao se trabalhar com quadri-vetores é definir o produto interno entre eles com o auxílio da métrica<sup>1,5,8,9</sup>

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu. \quad (2.16)$$

A partir de agora podemos entender o movimento de um corpo como um caminho sobre o Espaço-Tempo e descreve-lo de forma paramétrica<sup>1,5,8,9</sup>

$$x^\mu = x^\mu(\lambda)$$

De forma similar podemos chamar a derivada desse quadri-vetor de quadri-velocidade<sup>1,2,5</sup>

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \quad (2.17)$$

Podemos estudar a natureza dessa quadri-velocidade juntando conceitos desenvolvidos previamente imaginando como ela se comporta ao ser transformada de um referencial em que um objeto está arbitrariamente em repouso (referencial “ ‘ ”) pra um em que ele está se movendo

$$x^{\mu'}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda$$

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{d\left(\Lambda^\mu_{\mu'} x^{\mu'}\right)}{d\lambda}$$

$$v^\mu = \begin{bmatrix} \cosh \theta \\ \sinh \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma \\ \gamma v \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

De imediato segue<sup>1</sup>

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = -1 \quad (2.19)$$

Estas equações levam naturalmente a ideia de um quadri-momento<sup>1,2</sup>

$$p^\mu = m v^\mu \quad (2.20)$$

$$p^\mu = \begin{bmatrix} m \\ mv \end{bmatrix} \gamma \quad (2.21)$$

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = -m^2 \quad (2.22)$$

Para compreender a relação do quadri-momento com o momento que conhecemos podemos realizar a expansão de seus termos<sup>1</sup>

$$p^0 = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} = m + \frac{1}{2}mv^2 + \dots = E$$

$$p^i = \frac{mv^i}{\sqrt{1-v^2}} = mv^i + \dots = \vec{p}$$

como é possível observar o significado das componente 0 se identifica com o nosso conceito de energia e os demais componentes com o que conhecemos como momento<sup>1</sup>

$$p^\mu = \begin{bmatrix} E \\ p^i \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Trabalhando com esses conceitos podemos definir a seguinte relação<sup>1</sup>

$$-m^2 = \eta_{\mu\nu} p^\nu p^\mu = -E^2 + p^2$$

$$E^2 = m^2 + p^2 \quad (2.24)$$

A equação 2.24 foi construída utilizando unidades em  $c = 1$ , dessa forma a aparente falta de coerência nas dimensões pode ser corrigida introduzindo  $c$  através de uma análise dimensional onde a equação se transforma em<sup>1</sup>

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2 \quad (2.25)$$

Imaginando um referencial onde um corpo encontra-se em repouso portanto<sup>1</sup>

$$p = 0$$

Temos

$$E = mc^2 \quad (2.26)$$

A equação que relaciona massa e energia, uma das equações mais conhecidas da física<sup>1</sup>.

### 3 RESULTADOS

Utilizando os conceitos descritos na sessão anterior podemos iniciar uma análise dos fenômenos e consequências físicas dessa nova teoria, para isso nessa sessão serão expostos alguns problemas interessantes que melhor demonstram os efeitos dessa nova geometria.

#### 3.1 Dilatação Temporal e Contração Espacial

A dilatação do tempo e contração espacial são os fenômenos mais conhecidos previstos pela Teoria da Relatividade Especial e têm origem no fato de que vivemos dentro do Espaço-Tempo. Nossa percepção de tempo e espaço esta diretamente relacionada com o referencial em que estamos, sendo assim, indivíduos ou instrumentos em diferentes referenciais obterão diferentes resultados para suas medições. Isso pode ser mostrado de forma clara utilizando a equação de linha do espaço de Minkowski, equação 2.2

$$dx'^2 - dt'^2 = dx^2 - dt^2,$$

Escolhendo arbitrariamente um referencial em que o instrumento de medida está em repouso ( referencial linha), não há variação espacial, sendo assim

$$dx' = 0$$

Portanto<sup>3</sup>

$$dt'^2 = dt^2 - dx^2$$

$$dt' = dt \sqrt{1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = dt \sqrt{1 - v^2} = dt \gamma^{-1}$$

$$dt = \gamma dt' \tag{3.1}$$

Como  $\gamma$  possui valores cada vez maiores quanto mais a velocidade relativa entre os referenciais se aproxima de 1, que é velocidade da luz no nosso sistema de medida, maior será o intervalo de tempo medido no referencial de quem observa o movimento comparado com o intervalo de tempo medido por quem realiza o movimento, conseqüentemente podemos considerar que o tempo pra quem se move passa mais devagar<sup>3,4</sup>.

A contração espacial é uma consequência natural derivada da nossa habilidade de medir comprimento de objetos em movimentos, deduzida da seguinte forma:

Definindo o comprimento de um objeto como<sup>4</sup>

$$L = x_f - x_i, \quad (3.2)$$

onde  $x_f$  e  $x_i$  indicam as posições espaciais das extremidades do objeto que se está querendo medir. Utilizando as transformadas de Lorentz para relacionar as posições espaciais das extremidades obtemos<sup>4</sup>

$$L_0 = x'_f - x'_i = -t \sinh \theta + x_f \cosh \theta + t \sinh \theta - x_i \cosh \theta = (x_f - x_i) \cosh \theta$$

$$L_0 = \gamma L \quad (3.3)$$

De forma similar a equação de dilatação do tempo, na equação 3.3 podemos observar que quanto maior a velocidade relativa entre os referenciais menor será o comprimento medido do objeto por quem observa o mesmo se mover, dando a impressão que o objeto está se contraindo.

Um problema muito interessante que pode nos ajudar a entender que esses conceitos podem ser estendidos a qualquer tipo de situação, se tivermos uma boa compreensão das ferramentas geométricas, é imaginar dois discos girando sobre o mesmo eixo com

velocidades angulares opostas, mas de mesma magnitude ( $\omega$ ), e nas extremidades de cada disco existe um relógio, assim, facilmente poderíamos induzir que como esse relógios possuem uma certa velocidades relativas entre eles, eles devem marcar diferentes intervalos de tempo, entretanto uma análise mais detalhada da situação nos mostra que isso na realidade não ocorre<sup>7</sup>. Para realizar esse estudo podemos adequar nosso elemento de linha à geometria do problema escrevendo-o em coordenadas polares fazendo uso de nossos conhecimentos geométricos da seguinte forma<sup>7</sup>

$$ds = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -dt^2 + dr^2 + rd\phi^2. \quad (3.4)$$

Vimos que em todos os referenciais a quantidade  $ds$  é invariante, sendo assim a equação 3.4 deve valer tanto para o referencial do relógio quanto para o referencial de quem observa o movimento, no referencial do relógio como não há variação de nenhuma das outras coordenadas além do tempo podemos assumir<sup>7</sup>

$$ds = -dt = -d\tau, \quad (3.5)$$

$d\tau$  é utilizado para facilitar a identificação do que é o *tempo próprio*<sup>1,3,4</sup>, tempo medido pelo relógio. Como sabemos  $ds$  deve ser conservada em ambos os referenciais e de forma similar<sup>7</sup> a 3.1

$$d\tau = \left(1 - r^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} dt = (1 - r^2\omega^2)^{\frac{1}{2}} dt. \quad (3.5)$$

Como podemos ver a variação temporal depende de  $\omega^2$ , portanto ela é independente do sentido da rotação e ambos os relógio registrarão o mesmo intervalo de tempo.

### 3.2 Velocidades, Ângulos e Estrelas

Um dos estudos mais interessantes de se fazer com a Teoria da Relatividade Especial é analisar como ela altera a visão do mundo a nossa volta. Vários problemas demonstram

isso de forma clara, um deles é estudar a composição de velocidades em diferentes referenciais, para isso podemos descrever o movimento de uma partícula no Espaço-Tempo em um determinado referencial de forma paramétrica<sup>2,5</sup>

$$x^{\mu'}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 \\ v' \end{bmatrix} \lambda, \quad (3.6)$$

então descrever o movimento dessa mesma partícula em um segundo referencial com uma velocidade relativa ao primeiro utilizando as transformadas de Lorentz

$$x^\mu = \Lambda_{\mu'}^\mu x^{\mu'} = \begin{bmatrix} \cosh \theta + v' \sinh \theta \\ \sinh \theta + v' \cosh \theta \end{bmatrix} \lambda,$$

Sendo  $\beta$  a velocidade relativa entre os primeiro e o segundo referencial a lei de composição da velocidade pode ser derivada

$$v = \frac{dx^1}{dx^0} = \frac{dx^1}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dx^0} = \frac{\sinh \theta + v' \cosh \theta}{\cosh \theta + v' \sinh \theta} = \frac{\gamma\beta + v'\gamma}{\gamma + v'\gamma\beta} = \frac{\beta + v'}{1 + v'\beta}, \quad (3.7)$$

Essa lei relaciona a velocidade medida em diferentes referencial e substitui a antiga lei de composições de velocidade de Newton, com ela podemos comprovar que a velocidade da luz é conservada em todos os referenciais independente da velocidade relativa entre eles.

$$v' = c = 1,$$

$$v = \frac{\beta + 1}{1 + \beta} = 1,$$

Outro problema interessante de se resolver é compreender como ângulos físicos se transformam em diferentes referenciais, podemos imaginar um projétil que descreve uma trajetória em duas dimensões<sup>2,3,7</sup> espaciais

$$x^{\mu'} = \begin{bmatrix} 1 \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix} \lambda$$

o ângulo físico entre o projétil e o eixo x pode ser definido como<sup>7</sup>

$$\tan \phi' = \frac{x^{2'}}{x^{1'}} = \frac{v_y}{v_x} \quad (3.8)$$

de forma similar o ângulo medido no segundo referencial pode ser deduzido aplicando as Transformada de Lorentz<sup>7</sup>

$$x^\mu = \Lambda_{\mu'}^\mu x^{\mu'} = \begin{bmatrix} \cosh \theta + v_x \sinh \theta \\ \sinh \theta + v_x \cosh \theta \\ v_y \end{bmatrix} \lambda$$

$$\tan \phi = \frac{x^2}{x^1} = \frac{v_y}{\sinh \theta + v_x \cosh \theta} = \frac{v_y}{v_x} \frac{\gamma^{-1}}{1 + \beta/v_x} = \frac{\gamma^{-1} \tan \phi'}{1 + \beta/v_x}. \quad (3.9)$$

No caso desse projétil ser um fóton devemos assumir que  $\mathbf{v}_x^2 + \mathbf{v}_y^2 = \mathbf{1}$ <sup>6</sup> deve valer em qualquer referencial, portando podemos dizer que<sup>6</sup>

$$v_x = \cos \phi' \quad (3.10)$$

Dessa forma a equação 3.7 pode ser utilizada para descrever a relação entre os ângulos em diferentes referenciais<sup>7</sup>

$$\cos \phi = \frac{\beta + \cos \phi'}{1 + \cos \phi' \beta} \quad (3.11)$$

A equação 3.11 pode nos auxiliar à resolver nosso próximo problema. Ele consiste em imaginar que em um referencial em repouso podemos observar uma distribuição uniforme de estrelas no céu e a partir disso deduzir como essa distribuição se altera para um observador que possui uma velocidade relativa a esse referencial<sup>7</sup>. Para solucionar esse problema podemos, sem dificuldade, fazer uso da teoria da probabilidade<sup>13</sup>,

primeiramente formulando uma função de distribuição de estrelas sobre uma casca esférica no referencial em repouso<sup>7</sup>

$$dn = P(\Omega')d\Omega', \quad (3.12)$$

$$P(\Omega') = \frac{N}{4\pi}, \quad (3.13)$$

$N$  representa o numero total de estrelas no céu e  $P(\Omega')$  é a função de distribuição homogênea de estrelas sobre essa casca em um ângulo sólido  $\Omega$ . Para facilitar nossos cálculos podemos aplicar uma transformação de coordenada descrevendo o ângulo sólido em função do ângulo de incidência da luz utilizando alguns argumentos geométricos

$$\Omega = \Omega(\phi)$$

$$d\Omega = 2\pi \sin \phi' d\phi' \quad (3.14)$$

$$dn = \frac{N}{2} \sin \phi' d\phi' = -\frac{N}{2} d(\cos \phi') \quad (3.15)$$

Já que o ângulo de visão representa o ângulo de incidência do raio de luz podemos usar a equação 3.11 para realizar uma transformação de referencial<sup>7</sup>

$$dn = -\frac{N}{2} \frac{d(\cos \phi')}{d(\cos \phi)} d(\cos \phi) = -\frac{N}{2} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta \cos \phi)^2} d(\cos \phi) = \frac{N}{4\pi} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta \cos \phi)^2} d\Omega, \quad (3.16)$$

Sendo assim a nova função de distribuição se transforma em<sup>7</sup>

$$P(\Omega) = \frac{N}{4\pi} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta \cos \phi)^2}, \quad (3.17)$$

Podemos agora testar algumas propriedades dessa nova função de distribuição primeiro aplicando a condição quando  $\beta \rightarrow 0$  onde

$$P(\Omega) = \frac{N}{4\pi} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \phi)^2} = \frac{N}{4\pi} = P(\Omega')$$

Aqui observamos que a função se reduz a sua forma original<sup>6</sup>. É possível também realizar a contagem do numero total de estrelas no céu realizando a integral da função de distribuição<sup>7</sup>

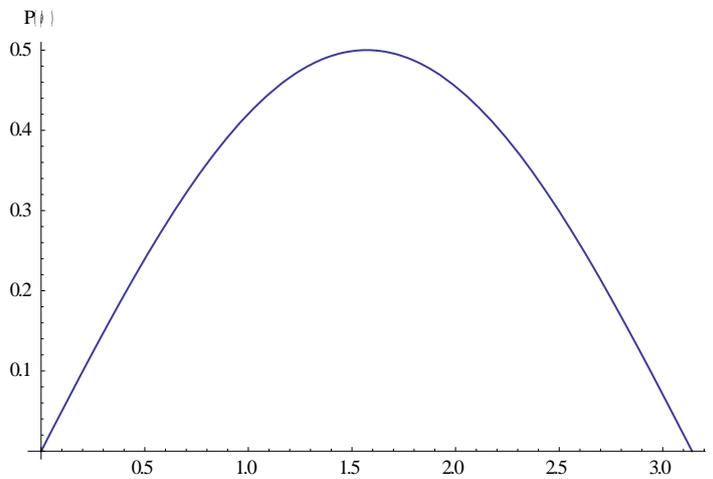
$$n = \int_1^{-1} -\frac{N}{2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \phi)^2} d(\cos \phi) = N$$

Concluimos, assim como era esperado, que o numero total de estrelas no céu não se altera<sup>6</sup>.

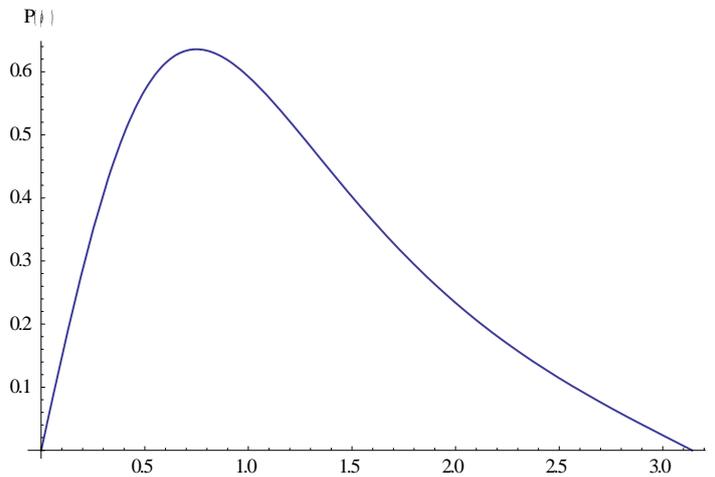
Se desejarmos compreender melhor o que realmente está acontecendo com a distribuição de estrelas podemos desenhar um gráfico da função de distribuição em função do ângulo para diferentes valores de  $\beta$  da seguinte forma

$$dn = -\frac{N}{2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \phi)^2} \frac{d(\cos \phi)}{d\phi} d\phi = \sin \phi \frac{N}{2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \phi)^2} d\phi$$

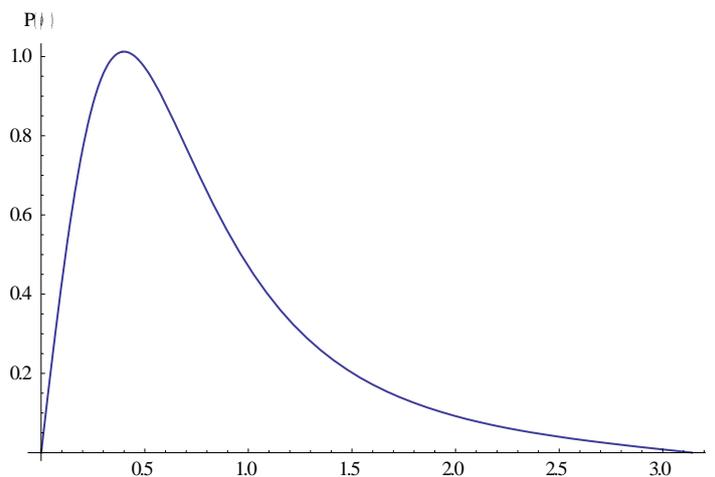
$$P(\phi) = \sin \phi \frac{N}{2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \phi)^2} \quad (3.18)$$



(a)



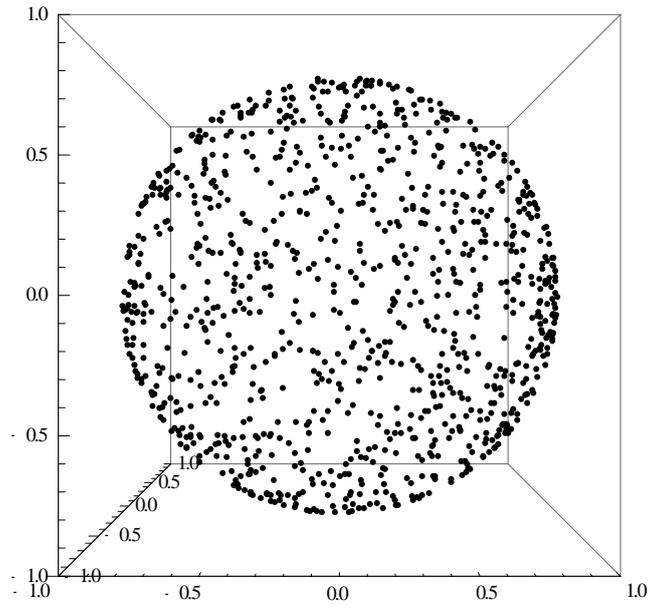
(b)



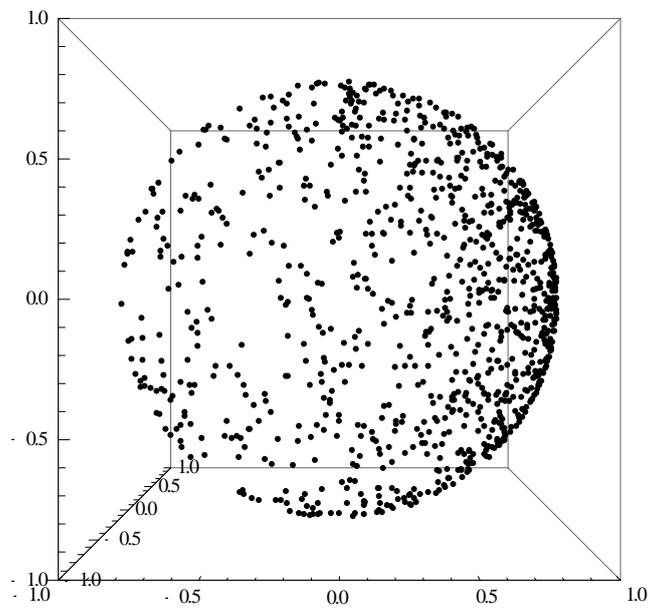
(c)

**Figura 4** – Grafico da função de distribuição de probabilidade em função de  $\phi$  para diferentes  $\beta$  (a)  $\beta = 0$  (b)  $\beta = 0.5$  (c)  $\beta = 0.8$

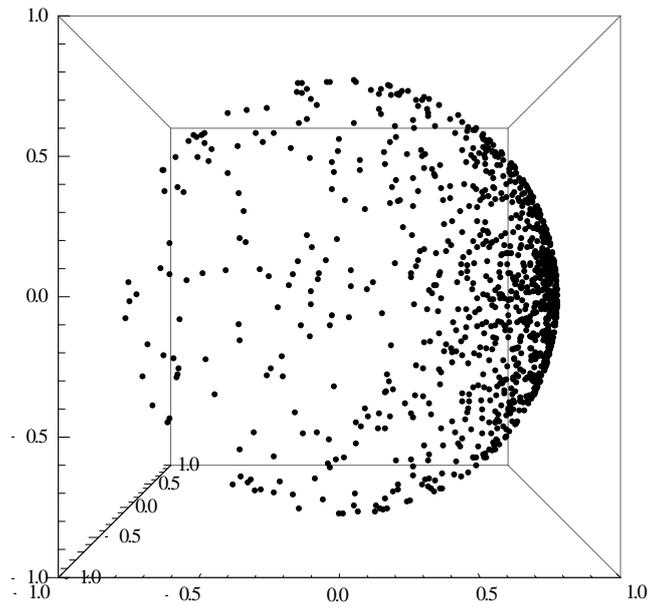
Como é possível observar a distribuição de estrelas no céu sofre um arraste para  $\phi \rightarrow 0$ , na prática isso nos mostra que as estrelas estarão se aproximando cada vez mais do nosso eixo x, o eixo de direção de movimento, podemos simular a distribuição randômica das estrelas baseado nessa função e plotar diferentes pontos sobre uma casca esférica e observar como eles se comportam, os resultados são mostrados a seguir:



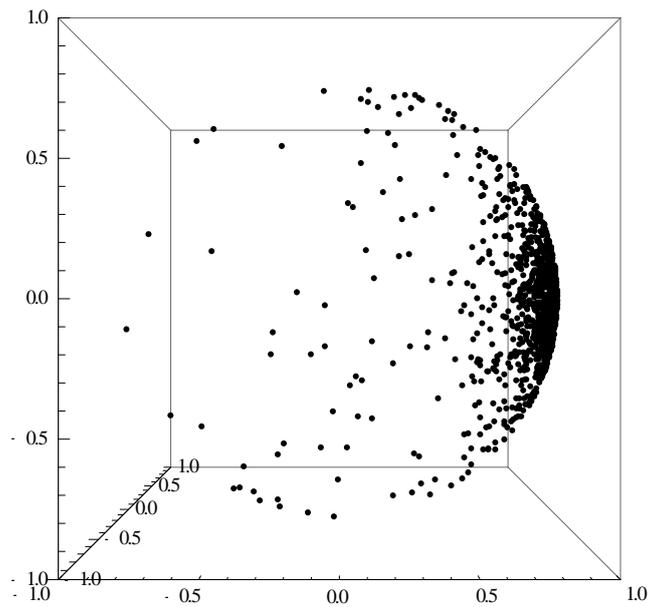
(a)



(b)



(c)



(d)

**Figura 5** – Simulação de distribuição de estrelas no céu estrelado baseado na função de distribuição de probabilidade  $P(\phi)$  para  $\beta =$  (a) 0 (b) 0.5 (c) 0.8 (d) 0.95

Esses resultados podem nos levar a ideia errônea de que possa haver qualquer espécie de referencial privilegiado, um referencial onde a distribuição de estrelas é homogênea, entretanto ele não representa nada mais do que o referencial em que as estrelas mais próximas apresentam a menor quantidade de movimento relativo, como por exemplo, o mesmo referencial de movimento de um braço da Via Láctea.

#### **4 CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Não nos resta dúvida de que todas as transformações físicas perceptíveis no nosso universo tem o Espaço-Tempo como ambiente de fundo, sendo assim, a Teoria da Relatividade se torna algo de extrema importância com ela podemos compreender como a natureza e geometria especial do Espaço-Tempo altera nossa percepção de tempo e espaço. Concluimos nesse trabalho que muitos efeitos que no começo nos parecem mágicos, como dilatação do tempo, contração do espaço, são meras consequências geométricas do Espaço-Tempo, pudemos relacionar que da mesma forma que tempo e espaço são partes de um mesmo espaço geométrico, energia e massa são partes formas da mesma coisa, também conseguimos concluir que com a devida interpretação dos conceitos da relatividade podemos aplica-la a diferentes problemas, fazendo uso de diferentes teorias, até mesmo a teoria da probabilidade.

## **5 CRONOGRAMA**

### **Parte I**

**01/08/2012 a 30/09/2012** Revisão da literatura: princípios físicos da relatividade restrita, quadrivetores, espaço-tempo de Minkovski, simultaneidade.

**01/10/2012 a 30/11/2012** Estudos avançados de Álgebra Linear: transformações Lineares

**01/12/2012 a 31/01/2013** Mudança de referencial na teoria de relatividade restrita: transformações de Lorentz, formulação matricial, visão geométrica.

**01/02/2013 a 31/03/2013** Visualização dos resultados. Elaboração do relatório parcial.

### **Parte II**

**01/04/2013 a 31/05/2013** Estudo detalhado da calculo vetorial e tensorial, notação de índices e base da geometria diferencial

**01/06/2013 a 31/07/2013** Aplicação dos conceitos de calculo vetorial e tensorial e geometria diferencial a Teoria da Relatividade Especial

**01/08/2013 a 23/08/2013** Elaboração do Relatório final.

## 6 REFERÊNCIAS

---

<sup>1</sup> Hartle, James B. Gravity: an introduction to Einstein's general relativity. San Francisco, EUA: Addison Wesley, c2003. Xxii.

<sup>2</sup> Zimmerman, Robert L. Mathematica® for Physics 2ª ed,

<sup>3</sup> Nussenzveig, H. Moyses. Curso de Física Básica vol. 4 Ótica, Relatividade, Física Quântica, Edgard Blücher, São Paulo (2002).

<sup>4</sup> Halliday, David; Resnick, Robert; KRANE, Kenneth. Física: 4. 5 ed. Rio de Janeiro: LTC, c2004. v. 4. Xii.

<sup>5</sup> Carroll, Sean M. An Introduction to General Relativity Spacetime and Geometry

<sup>6</sup> O'Neill, Barrett. Elementary differential geometry. 2.ed. Amsterdam: Elsevier, 2006. 503 p.

<sup>7</sup> Lightman, Alan P. Problem book in relativity and gravitation

<sup>8</sup> Marsden, Jerrold E. Vector Calculus 5ªed, W.H Freeman, 2012

<sup>9</sup> Arfken, George B, Mathematical Methods for Physicist 6ªed Academic Press, 2005

<sup>10</sup> C.A. Callioli, H.H. Domingues e R.C.F. Costa, Álgebra Linear e Aplicações, Atual Editora, São Paulo (1990), cap. 1-6.

<sup>11</sup> Weisstein, Eric W. "Hyperbolic Functions." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/HyperbolicFunctions.html>.

<sup>12</sup> Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (Eds.). "Hyperbolic Functions." in Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 9th printing.

<sup>13</sup> Durrett, Rick, Probability: Theory and Examples, Cambridge University Press, 2010

.

## 7 ANEXOS

Neste anexo consta o código fonte do Mathematica® utilizado para gerar os gráficos e simulações da parte 3.2 deste relatório

### 7.1 Gráficos de distribuição

```
Manipulate[ Plot[Sin[\[Phi]] (n/2) (1 - \[Beta]^2)/(1 - \[Beta] Cos[\[Phi]))^2, {\[Phi],0, \[Pi]}], {n}, {\[Beta], 0, 1}]
```

### 7.2 Simulação de distribuição de estrelas

```
d[\[Beta_] := ProbabilityDistribution[Sin[\[Phi]](1/2) (1 - \[Beta]^2)/(1 - \[Beta]Cos[\[Phi]))^2, {\[Phi], 0, \[Pi]}];
```

```
Spherical[w_] := Table[{w[[i, 1]] Cos[w[[i, 2]]] , w[[i, 1]] Sin[w[[i, 2]]] Sin[w[[i, 3]]], w[[i, 1]] Sin[w[[i, 2]]] Cos[w[[i, 3]]]}, {i, 1, Dimensions[w][[1]]};
```

```
Manipulate[{w = Table[{1, RandomVariate[d[\[Beta]]], RandomReal[{0, 2 \[Pi]}]}, {n}]; Graphics3D[Point[Spherical[w]], PlotRange -> 1, Axes -> True]],{\[Beta], 0, 1}, {{n, 100}, 0, 10^4}]
```