Bases Matemáticas
Claudia Correa

Lista 1

Exercício 1. Determine se as seguintes proposições são verdadeiras ou falsas:
(a) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x + 1 > 2$.
(b) Todas as letras da palavra "banana" são vogais.
(c) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x^2 < x$.
(d) Para todos $m, n \in \mathbb{N}$ pares, temos que $n + m$ é par.

Exercício 2. O que as seguintes proposições significam? Elas são verdadeiras ou falsas? O universo de discurso em todos os casos é o conjunto dos números naturais.
(a) $\forall x \exists y (2x - y = 0)$.
(b) $\exists y \forall x (2x - y = 0)$.
(c) $\exists y \exists z (y + z = 100)$.

Exercício 3. Negue as seguintes proposições:
(a) $3 > 4$ e 2 é par.
(b) Não é verdade que (3 é par ou que 5 é impar).
(c) 2 é um número par e $3k + 1$ é um número ímpar.
(d) 2 é número par e não é verdade que 3 é um número ímpar.
(e) Todo elemento do conjunto A é elemento do conjunto B.

Exercício 4. Nas seguintes proposições abertas o domínio de discurso é o conjunto dos números reais. Para essas proposições esboce na reta real o seu conjunto verdade.
(a) $x > 2$ e $x < 4$.
(b) $x > 2$ ou $x < 3$.
(c) $x > 2$ ou ($x < 5$ e $x > 3$).
(d) não é verdade que ($x > 2$ e $x < 4$).

Exercício 5. Determine o valor verdade das seguintes proposições:
(a) Se 2 é par, então 3 é ímpar.
(b) Se 2 não é par, então 3 é ímpar.
(c) Se 3 não é par, então 3 não é ímpar.

Exercício 6. Para os pares de proposições p e q diga se p é condição necessária e\ou suficiente para q. Em todos os exemplos considere x um número natural.

(a) p= "x é maior que 2", q ="x é maior que 3".
(b) p="x é maior que 2", q ="x é maior ou igual a 2".
(c) p="x é maior que 0 e x é menor que 2", q ="x é menor que 2".
(d) p="x é maior que 0 e x é menor que 2", q ="$x = 1$".
(e) p="M é uma matriz com determinante diferente de 0", q ="M é uma matriz invertível".

Exercício 7. Transcreva as seguintes proposições para a forma simbólica e determine suas negações.

(a) Existe um número real x tal que $x^2 = 2$.
(b) Existe um úmero inteiro x tal que x^2 é par ou x^2 é ímpar.
(c) Para cada número real x, existe um número real y tal que $x + y = 0$.
(d) Todo número natural é divisível por 2, 3, 5 ou 7.
(e) Para todo número racional x, x é menor que $1/x$.
(f) Se a e b são dois números primos, então ab é primo.
(g) Para todos números reais a e b, existe um número real c que é menor que b e maior que a.

Exercício 8. Para todas as afirmações a seguir n denota um número natural. Determine o conjunto verdade das seguintes proposições abertas:

(a) $n^2 < 12$
(b) $3n + 1 < 25$
(c) $3n + 1 < 25$ e $n + 1 > 4$
(d) $n < 5$ ou $n > 3$
(e) n é primo e não é verdade que $n > 17$

Exercício 9. Demonstre as seguintes afirmações:

(a) Sejam a e b números inteiros. Se a divide b e a divide c, então a divide $b + c$.
(b) Sejam a, b e c números inteiros. Se a não divide bc, então a não divide b.
(c) Se a e b são números inteiros cujo produto é par, então pelo menos um dos dois deve ser par.
(d) Se a e b são números inteiros cujo produto é ímpar, então ambos têm que ser ímpares.
(e) Sejam a, b, c números inteiros com $c \neq 0$. Vale que a divide b se e somente se ac divide bc.

Exercício 10. Considere o conjunto universo $\mathbb{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e os seguintes subconjuntos de $\mathbb{U}$:

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3, 4\} \\ B &= \{x \in \mathbb{U} : (x-2)^2(x-3) = 0\} \\ D &= \{x \in \mathbb{U} : x \text{ é par}\} \end{aligned}$$

Determine:

(a) $A \cup B$
(b) $A \cap (B \cup D)$
(c) $D \cup A^C$
(d) $(A \cup D)^C$
(e) $A^C \cap D^C$
(f) $\wp(B)$

Exercício 11. Dado um conjunto $\mathbb{U}$, sejam A e B subconjuntos quaisquer de $\mathbb{U}$. Tomando-se o complementar relativamente a $\mathbb{U}$, mostre que:

(a) $A \subset B^C$ se e somente se $A \cap B = \emptyset$
(b) $A^C \cap B = B \setminus A$
(c) $A \cup B^C = (B \setminus A)^C$

Exercício 12. Sejam A, B, C e D conjuntos. Mostre as seguintes afirmações:

(a) $\wp(A \cap B) = \wp(A) \cap \wp(B)$
(b) Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.
(c) Se $A \subset B$ e $C \subset D$, então $A \cup C \subset B \cup D$.
(d) $A \subset B$ se e somente se $A \cup B = B$.
(e) Se $\wp(A) = \wp(B)$, então $A = B$.
(f) Se $A \cap B = A \cap C$ e $A \cup B = A \cup C$, então $B = C$.
(g) $A \setminus B \subset B$ se e somente se $A \setminus B = \emptyset$.

Exercício 13. Sejam A, B e C conjuntos não vazios tais que $B \setminus C$ é não vazio. Mostre que $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

Respostas de alguns exercícios

Exercício 1

(a) Falsa
(b) Falsa
(c) Falsa
(d) Verdadeira

Exercício 2 (a) Para todo número natural x, existe um número natural y tal que $2x - y = 0$. A proposição é verdadeira.

Exercício 3

(a) $3 \leq 4$ ou 2 é ímpar.
(d) 2 é número ímpar ou 3 é número ímpar.

Exercício 5

(a) Verdadeira
(b) Verdadeira
(c) Falsa

Exercício 6

(a) p é condição necessária e não é condição suficiente para q.
(b) p é condição suficiente e não é condição necessária para q.

Exercício 7

(a) Forma simbólica "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$". Negação "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 2$".
(e) Forma simbólica "$\forall x \in \mathbb{Q}, x < 1/x$". Negação "$\exists x \in \mathbb{Q} : x \geq 1/x$".

Exercício 8 (a) $\{0, 1, 2, 3\}$

Exercício 10

(a) $\{1, 2, 3, 4\}$
(c) $\{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$
(f) $\{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$