Bases Matemáticas

Lista 2

Exercício 1. Sejam a, b números reais tais que $a \neq 0$ e $a + \frac{1}{a} = b$. Determine $a^2 + \frac{1}{a^2}$ em função de b.

Exercício 2. Determine todos os números reais x que satisfazem:

(a) $|x-3| = 8$
(b) $|x-1| \cdot |x+1| = 0$
(c) $|x-1| \cdot |x+2| = 3$

Exercício 3. Determine todos os números reais x que satisfazem:

(a) $4 - x < 3 - 2x$
(b) $5 - x^2 < 8$
(c) $5 - x^2 < -2$
(d) $(x-1)(x-3) > 0$
(e) $x^2 - 2x + 2 > 0$
(f) $x^2 - x + 10 > 16$
(g) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x} > 0$
(h) $\dfrac{x-1}{x+1} > 0$
(i) $|x-3| < 8$
(j) $|x+4| < 2$
(k) $|x-1| + |x-2| > 1$
(l) $|x-1| + |x+1| < 2$
(m) $|x-1| + |x+1| < 1$

Exercício 4. Determine todos os números reais x que satisfazem:

(a) $\dfrac{x}{x-2} + \dfrac{4}{x-1} = 5$
(b) $\dfrac{2}{x^2-1} - \dfrac{x}{x-1} = 1$
(c) $|x| = -x + 2$
(d) $|-x+2| = 2x + 1$
(e) $|x+1| + |x-2| = 1$
(f) $\left|5x - x^2 - 6\right| = x^2 - 5x + 6$
(g) $|x-1| - 2|x-2| + 3|x-3| = 4$
(h) $\left|x^2 - 2\right| + 2x + 1 \geq 0$

(i) $\dfrac{9}{|x-5|-3} \geq |x-2|$
(j) $\sqrt{x+1} = 8 - \sqrt{3x+1}$
(k) $1 + \sqrt{3x+5} = x$
(l) $\sqrt{4x-3} + \sqrt{5x-1} = \sqrt{15x+4}$
(m) $\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$

Exercício 5. Determine a imagem da função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por
$$f(n) = (-1)^n n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exercício 6. Considerando a função f do exercício anterior, determine a imagem da função $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por
$$g(n) = f(n) + f(n+1), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exercício 7. Determine $f^{-1}[\{0\}]$, $f^{-1}[\{1\}]$ e $f^{-1}[\{2\}]$, para cada uma das seguintes funções f
(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 3n + 1$.
(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - |(x+2)^2 - 1|$.
(c) $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.

Exercício 8. Determine o domínio máximo D das seguintes funções
(a) $f : D \subset \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = \frac{1}{n(n+4)(3n+1)}$
(b) $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(x+4)(3x+1)}$
(c) $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
(d) $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(x^2-4)}}$

Exercício 9. Determine se cada uma das funções abaixo é injetora ou sobrejetora. Nos casos em que a função for bijetora, determine sua inversa.
(a) Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $f : A \to A$ dada por:
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \text{ é ímpar} \\ \frac{x}{2}, & \text{se } x \text{ é par} \end{cases}$$
(b) Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $f : A \to A$ dada por:
$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \neq 7 \\ 1, & \text{se } x = 7. \end{cases}$$
(c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 3n + 1$.
(d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = n - |n|$.

(e) $f:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

(f) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

(g) $f: [0,+\infty[\to [0,+\infty[$, $f(x) = \sqrt{x}$.

Exercício 10. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -x^2 + 2x$.

(a) Determine $f^{-1}[\{0\}]$.

(b) Mostre que $Imf =]-\infty, 1]$.

(c) Determine $f\big[\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}\big]$.

(d) Mostre que $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -(x-1)$, para todo $x \neq 1$.

Exercício 11. Seja A um conjunto (não vazio) com n elementos e seja B um conjunto qualquer. Mostre cada uma das seguintes afirmações:

(a) Se existe uma função injetora $f : A \to B$, então B possui *pelo menos* n elementos.

(b) Se existe uma função sobrejetora $f : A \to B$, então B possui *no máximo* n elementos.

Conclua que dois conjuntos finitos possuem o mesmo número de elementos se, e somente se, existe uma função bijetora entre eles.

Respostas de alguns exercícios

Exercício 1 $a^2 + \frac{1}{a^2} = b^2 - 2$

Exercício 2

(a) $\{11, -5\}$

(b) $\{-1, 1\}$

(c) $\left\{\frac{-1+\sqrt{21}}{2}, \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right\}$

Exercício 3

(a) $\{x \in \mathbb{R} : x < -1\}$

(b) $\mathbb{R}$

(c) $\{x \in \mathbb{R} : x < -\sqrt{7} \text{ ou } x > \sqrt{7}\}$

(d) $\{x \in \mathbb{R} : x < 1 \text{ ou } x > 3\}$

(e) $\mathbb{R}$

(f) $\{x \in \mathbb{R} : x < -2 \text{ ou } x > 3\}$

(g) $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$

(h) $\{x \in \mathbb{R} : x < -1 \text{ ou } x > 1\}$

(i) $\{x \in \mathbb{R} : -5 < x < 11\}$

(j) $\{x \in \mathbb{R} : -6 < x < -2\}$
(k) $\{x \in \mathbb{R} : x < 1 \text{ ou } x > 2\}$
(l) $\emptyset$
(m) $\emptyset$

Exercício 4
(a) $\{3, 3/2\}$
(b) $\{-3/2\}$
(c) $\{1\}$
(d) $\{1/3\}$
(e) $\emptyset$
(f) $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 2 \text{ ou } x \geq 3\}$
(g) $\{5\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2\}$
(h) $\{x \in \mathbb{R} : x \leq -1 - \sqrt{2} \text{ ou } x \geq -1\}$
(i) $\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 8 < x \leq 5 + 3\sqrt{2}\}$
(j) $\{8\}$
(k) $\left\{\frac{5+\sqrt{41}}{2}\right\}$
(l) $\left\{\frac{43+3\sqrt{269}}{22}\right\}$
(m) $\{30\}$

Exercício 5 $Imf = \{2n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{-(2n+1) : n \in \mathbb{N}\}$

Exercício 6 $Img = \{-1, 1\}$

Exercício 7
(a) $f^{-1}[\{0\}] = \emptyset$, $f^{-1}[\{1\}] = \{0\}$ e $f^{-1}[\{2\}] = \emptyset$
(b) $f^{-1}[\{0\}] = \emptyset$, $f^{-1}[\{1\}] = \emptyset$ e $f^{-1}[\{2\}] = \emptyset$
(c) $f^{-1}[\{0\}] = \emptyset$, $f^{-1}[\{1\}] = \{0\}$ e $f^{-1}[\{2\}] = \emptyset$

Exercício 8
(a) $D = \mathbb{N} \setminus \{0\}$
(b) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, -4, -1/3\}$
(c) $D =]-\infty, -1[\bigcup]1, +\infty[$
(d) $D =]-2, 0[\bigcup]2, +\infty[$

Exercício 9
(a) f não é sobrejetora e f não é injetora.
(b) f é bijetora e sua inversa $f^{-1} : A \to A$ é dada por

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y - 1, & \text{se } y \neq 1 \\ 7, & \text{se } y = 1. \end{cases}$$

(c) f é injetora e f não é sobrejetora.

(d) f não é injetora e f não é sobrejetora.

(e) f é injetora e f não é sobrejetora.

(f) f não é injetora e f não é sobrejetora.

(g) f é bijetora e sua inversa $f^{-1} : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ é dada por $f^{-1}(y) = y^2$, para todo $y \in [0,+\infty[$.

Exercício 10

(a) $f^{-1}[\{0\}] = \{0,2\}$

(c) $f\big[\{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}\big] =]-\infty, 0]$