

Bases Matemáticas

Lista 3

Exercício 1. Esboce os gráficos das funções abaixo e determine se elas são monótonas.

- (a) $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$
- (b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 2x$
- (c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2|x|$
- (d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x - 1| + 2$
- (e) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x - 1)^3$
- (f) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+1}{x}$
- (g) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x + 3$
- (h) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x \leq -1 \\ -x + 1, & \text{se } x > -1 \end{cases}$

Exercício 2. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x - 1| + |x - 2|$.

- (a) Mostre que $f(x) = \begin{cases} -2x + 3, & \text{se } x \leq 1 \\ 1, & \text{se } 1 < x < 2 \\ 2x - 3, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$
- (b) Esboce o gráfico de f .

Exercício 3. Determine o domínio máximo D de f e a partir de seu gráfico, estude o sinal de $f(x)$.

- (a) $f(x) = (x - 1)(x + 2)$
- (b) $f(x) = \frac{x(2x-1)}{x+1}$
- (c) $f(x) = \frac{3x-1}{x^2+1}$
- (d) $f(x) = -x^2 - 2x - 1$

Exercício 4. Esboce o gráfico das funções abaixo. Determine em quais regiões essas funções são (estritamente) crescentes, (estritamente) decrescentes, negativas e positivas.

- (a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^{(x-\pi)}$
- (b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 5^{|x+2|}$
- (c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$

Exercício 5. Determine o domínio máximo D , esboce o gráfico e determine se as seguintes funções são monótonas.

- (a) $f(x) = \log_2(x + 1)$

(b) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}}(x^2)$

(c) $f(x) = \log_3(-x)$

Exercício 6. Resolva as seguintes equações:

(a) $10^x = 15$

(b) $10^{(x-3)} = 100$

(c) $2^{2x} + 2^x - 12 = 0$

(d) $\log_5(x - 7) = 2$

(e) $\log_6(x + 5) + \log_6(x) = 2$

(f) $\log_2(\sqrt{x+3}) = 1$

Exercício 7. Determine o domínio máximo D das seguintes funções:

(a) $\text{tg}(1 - x)$

(b) $\arccos\left(\frac{2x}{1+x}\right)$

(c) $\arcsen\left(\frac{x^2-2}{2x-1}\right)$

Exercício 8. Esboce os gráficos das seguintes funções:

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos(3x)$

(b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2 \text{sen}(3x + \pi)$

(c) $f :]-\pi/2, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \text{tg}(|x|)$

(d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \text{sen}(x) + x$

Exercício 9. Mostre que as seguintes igualdades valem para todo número real x :

(a) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$

(b) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

(c) $\cos(2x) = \cos^2(x) - \text{sen}^2(x)$

(d) $\text{sen}(2x) = 2 \text{sen}(x) \cos(x)$

(e) $\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x)$

(f) $\text{sen}^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x)$

Exercício 10. Calcule:

(a) $\arcsen\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(b) $\arctg(1) - \arctg(-1)$

(c) $\arcsen(\cos(2x))$, para $0 \leq x \leq \pi/2$

(d) $\arcsen(\cos(2x))$, para $-\pi/2 \leq x \leq 0$

Respostas de alguns exercícios

Para conferir se vocês esboçaram os gráficos corretamente, vocês podem usar o seguinte site:

www.wolframalpha.com

Exercício 1

- (a) f é monótona, pois é estritamente crescente.
- (b) f não é monótona.
- (c) f não é monótona.
- (d) f não é monótona.
- (e) f é monótona, pois é estritamente crescente.
- (f) f é monótona, pois é estritamente decrescente.
- (g) f é monótona, pois é estritamente decrescente.
- (h) f não é monótona.

Exercício 3

- (a) $D = \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ para $x \in D^+ =]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$ e $f(x) < 0$ para $x \in D \setminus D^+$.
- (b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f(x) \geq 0$, para $x \in D^+ :=]-1, 0] \cup [1/2, +\infty[$ e $f(x) < 0$ para $x \in D \setminus D^+$.
- (c) $D = \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ para $x \in D^+ := [1/3, +\infty[$ e $f(x) < 0$ para $x \in D \setminus D^+$.
- (d) $D = \mathbb{R}$, $f(-1) = 0$ e $f(x) < 0$, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Exercício 4

- (a) f é estritamente crescente e positiva em todo seu domínio.
- (b) f é positiva em todo seu domínio, f é estritamente decrescente em $] -\infty, -2]$ e f é estritamente crescente em $[-2, +\infty[$.
- (c) f é estritamente decrescente em todo seu domínio, $f(x) \geq 0$ para $x \leq \log_{1/3}(2)$ e $f(x) < 0$ para $x > \log_{1/3}(2)$.

Exercício 5

- (a) $D = \{x \in \mathbb{R} : x > -1\}$ e f é monótona, pois é estritamente crescente.
- (b) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e f não é monótona.
- (c) $D = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ e f é monótona, pois é estritamente decrescente.

Exercício 6

- (a) $x = \log_{10} 15$
- (b) $x = 5$
- (c) $x = \log_2(3)$

(d) $x = 32$

(e) $x = 4$

(f) $x = 1$

Exercício 7

(a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{\pi}{2} - k\pi + 1 : k \in \mathbb{Z}\}$

(b) $D = [-\frac{1}{3}, 1]$

(c) $D = [-3, 1 - \sqrt{2}] \cup [1, 1 + \sqrt{2}]$

Exercício 10

(a) $-\pi/3$

(b) $\pi/2$

(c) $-2x + \pi/2$

(d) $2x + \pi/2$