

Bases Matemáticas

Lista 4

Observação. Nos exercícios que dizem “Mostre que ...”, eu quero que vocês mostrem os resultados usando as propriedades e os teoremas sobre limites e funções contínuas vistos em aula.

Exercício 1. Calcule os seguintes limites:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 2} 7x^3 + x + 2$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 + x + 2)(x^3 + 2)$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 + 2x + 2}{x^3 + 2}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[4]{8x^3 + 4x + 4}$
- (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4 + x)^2 - 16}{x}$
- (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 81}{x - 3}$
- (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x^2}$

Exercício 2. Dê um exemplo de duas funções f e g e de um número real x_0 tais que $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ existe, mas $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ não existem.

Exercício 3. Seja C um número real e considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 5, & \text{se } x < 2 \\ 2x - C, & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

Determine C para que o limite $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ exista.

Exercício 4. Seja C um número real e considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x^3 - Cx^2 - 9x + 9C}{(x - 2)(x - 3)}$.

- (a) Mostre que 2 é raiz do polinômio $x^3 - Cx^2 - 9x + 9C$ se, e somente se, $C = 2$.
- (b) Mostre que se $C = 2$, então o limite $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ existe.

(c) Mostre que se $C \neq 2$, então o limite $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ não existe.

Exercício 5. Mostre que $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 2^{\cos(1/x)} = 0$.

Exercício 6. Use o primeiro limite fundamental para calcular os seguintes limites:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(5x)}{x}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(5x)}{\text{sen}(4x)}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg}(5x)}{\text{sen}(3x)}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(5x) - \text{sen}(3x)}{x}$

Exercício 7. Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) + 1, & \text{se } x < 2\pi \\ ax^2 + 2\pi, & \text{se } x \geq 2\pi. \end{cases}$$

Determine o valor de a para que f seja contínua em 2π .

Exercício 8. Determine o valor do número real L para que a função dada seja contínua no ponto p dado.

- (a) $p = 2$ e $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2}, & \text{se } x \neq 2 \\ L, & \text{se } x = 2. \end{cases}$
- (b) $p = 3$ e $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}, & \text{se } x \neq 3 \\ L, & \text{se } x = 3. \end{cases}$

Exercício 9. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -x, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Mostre que f é contínua em 0.

Exercício 10. Calcule os seguintes limites laterais:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, onde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x < 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \\ 2x, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

- (b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$, onde $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $g(x) = \frac{|x|}{x}$.

Exercício 11. As função f e g do Exercício 10 são contínuas?

Exercício 12. Determine se as seguintes funções são contínuas:

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(3x)}{3x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 2, & \text{se } x = 0. \end{cases}$

(b) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(3x)}{3x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0. \end{cases}$

(c) $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $h(x) = \begin{cases} \sin(x), & \text{se } x < 0 \\ \cos(x), & \text{se } x > 0. \end{cases}$

Exercício 13. Mostre que os seguintes conjuntos admitem mínimo e máximo:

(a) $A = \left\{ \frac{x}{1+x^2} : -2 \leq x \leq 2 \right\}$.

(b) $B = \left\{ \frac{x^2+x}{1+x^2} : -1 \leq x \leq 1 \right\}$.

Exercício 14. Mostre que a equação $x^3 - 3x + 1 = 0$ tem pelo menos uma solução pertencente ao intervalo aberto $]1, 2[$.

Respostas de alguns exercícios

Exercício 1

- (a) 60
- (b) 928
- (c) $\frac{10}{3}$
- (d) $\sqrt[4]{4}$
- (e) 8

(f) 27

(g) $\frac{1}{6}$

Exercício 2 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e x_0 um número real tal que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ não existe e tome $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como $g(x) = -f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 3 $C = 3$.

Exercício 6

(a) 5

(b) $\frac{5}{4}$ (c) $\frac{5}{3}$

(d) 2

Exercício 7 $a = \frac{1 - \pi}{2\pi^2}$.

Exercício 8

(a) $L = 12$.(b) $L = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Exercício 10

(a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$.(b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1$.

Exercício 11 A função f não é contínua em 1, pois $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ não existe dado que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$. A função g é contínua, pois ela é contínua em todos os pontos de seu domínio (0 não pertence ao domínio de g).

Exercício 12

(a) f não é contínua em 0, pois $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$.(b) g é contínua.(c) h é contínua, pois ela é contínua em todos os pontos de seu domínio (0 não pertence ao domínio de h).