

## Bases Matemáticas

### Lista 2

**Exercício 1.** Prove que para todo inteiro positivo  $n$  vale:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}.$$

**Exercício 2.** Prove que  $2n+1 < 2^n$  para todo  $n > 3$ .

**Exercício 3.** Seja  $x$  um número real positivo. Demonstre que:

$$(1+x)^n > 1+nx, \text{ para todo } n \geq 2.$$

**Exercício 4.** Prove que para qualquer inteiro positivo  $n$  o número  $2^{2n} - 1$  é divisível por 3.

**Exercício 5.** Use indução para mostrar que um conjunto finito com  $n$  elementos possui  $2^n$  subconjuntos.

**Exercício 6.** Sejam  $a$  e  $r$  dois números reais. A sequência  $a_1 = a, a_2 = a+r, a_3 = a+2r, \dots, a_n = a+(n-1)r, \dots$  é denominada **progressão aritmética de razão  $r$** . Prove que a soma dos  $n$  primeiros termos dessa progressão aritmética é:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

**Exercício 7.** Seja  $n$  um número natural positivo.

- (a) Calcule a soma dos  $n$  primeiros números pares positivos.
- (b) Calcule a soma dos  $n$  primeiros números ímpares positivos.

**Exercício 8.** Sejam  $a$  e  $r$  dois números reais com  $r \neq 1$ . A sequência  $a_1 = a, a_2 = ra, a_3 = r^2a, \dots, a_n = r^{n-1}a, \dots$  é denominada **progressão geométrica de razão  $r$** . Prove que a soma dos  $n$  primeiros termos dessa progressão geométrica é:

$$S_n = \frac{r^n a - a}{r - 1}.$$

**Exercício 9.** Seja  $n$  um número natural positivo. Calcule a soma das  $n$  primeiras potências de 2.

**Exercício 10.** Sejam  $a, b$  números reais tais que  $a \neq 0$  e  $a + \frac{1}{a} = b$ . Determine  $a^2 + \frac{1}{a^2}$  em função de  $b$ .

**Exercício 11.** Determine todos os números reais  $x$  que satisfazem:

- (a)  $|x - 3| = 8$
- (b)  $|x - 1| \cdot |x + 1| = 0$
- (c)  $|x - 1| \cdot |x + 2| = 3$

**Exercício 12.** Determine todos os números reais  $x$  que satisfazem:

- (a)  $4 - x < 3 - 2x$
- (b)  $5 - x^2 < 8$
- (c)  $5 - x^2 < -2$
- (d)  $(x - 1)(x - 3) > 0$
- (e)  $x^2 - 2x + 2 > 0$
- (f)  $x^2 - x + 10 > 16$
- (g)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{1 - x} > 0$
- (h)  $\frac{x - 1}{x + 1} > 0$
- (i)  $|x - 3| < 8$
- (j)  $|x + 4| < 2$
- (k)  $|x - 1| + |x - 2| > 1$
- (l)  $|x - 1| + |x + 1| < 2$
- (m)  $|x - 1| + |x + 1| < 1$

**Exercício 13.** Determine todos os números reais  $x$  que satisfazem:

- (a)  $\frac{x}{x - 2} + \frac{4}{x - 1} = 5$
- (b)  $\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{x}{x - 1} = 1$
- (c)  $|x| = -x + 2$
- (d)  $|-x + 2| = 2x + 1$
- (e)  $|x + 1| + |x - 2| = 1$
- (f)  $|5x - x^2 - 6| = x^2 - 5x + 6$
- (g)  $|x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4$
- (h)  $|x^2 - 2| + 2x + 1 \geq 0$
- (i)  $\frac{9}{|x - 5| - 3} \geq |x - 2|$
- (j)  $\sqrt{x + 1} = 8 - \sqrt{3x + 1}$
- (k)  $1 + \sqrt{3x + 5} = x$

- (l)  $\sqrt{4x-3} + \sqrt{5x-1} = \sqrt{15x+4}$   
 (m)  $\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$

### Respostas de alguns exercícios

**Exercício 10**  $a^2 + \frac{1}{a^2} = b^2 - 2$

**Exercício 11**

- (a)  $\{11, -5\}$   
 (b)  $\{-1, 1\}$   
 (c)  $\left\{\frac{-1+\sqrt{21}}{2}, \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right\}$

**Exercício 12**

- (a)  $\{x \in \mathbb{R} : x < -1\}$   
 (b)  $\mathbb{R}$   
 (c)  $\{x \in \mathbb{R} : x < -\sqrt{7} \text{ ou } x > \sqrt{7}\}$   
 (d)  $\{x \in \mathbb{R} : x < 1 \text{ ou } x > 3\}$   
 (e)  $\mathbb{R}$   
 (f)  $\{x \in \mathbb{R} : x < -2 \text{ ou } x > 3\}$   
 (g)  $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$   
 (h)  $\{x \in \mathbb{R} : x < -1 \text{ ou } x > 1\}$   
 (i)  $\{x \in \mathbb{R} : -5 < x < 11\}$   
 (j)  $\{x \in \mathbb{R} : -6 < x < -2\}$   
 (k)  $\{x \in \mathbb{R} : x < 1 \text{ ou } x > 2\}$   
 (l)  $\emptyset$   
 (m)  $\emptyset$

**Exercício 13**

- (a)  $\{3, 3/2\}$   
 (b)  $\{-3/2\}$   
 (c)  $\{1\}$   
 (d)  $\{1/3\}$   
 (e)  $\emptyset$   
 (f)  $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 2 \text{ ou } x \geq 3\}$   
 (g)  $\{5\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2\}$   
 (h)  $\{x \in \mathbb{R} : x \leq -1 - \sqrt{2} \text{ ou } x \geq -1\}$   
 (i)  $\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 8 < x \leq 5 + 3\sqrt{2}\}$   
 (j)  $\{8\}$   
 (k)  $\left\{\frac{5+\sqrt{41}}{2}\right\}$

$$(l) \left\{ \frac{43+3\sqrt{269}}{22} \right\}$$

$$(m) \{30\}$$