

Funções de uma variável – Lista 1

Exercício 1. Usando a definição de derivada, calcule a derivada das seguintes funções nos pontos indicados:

- (a) $f(x) = x^2 + 1$, no ponto 1.
- (b) $f(x) = 3x^3 - x$, no ponto 2.
- (c) $f(x) = \sqrt{x}$, no ponto 4.
- (d) $f(x) = \frac{1}{x}$, no ponto -1 .

Exercício 2. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$. Mostre que f é derivável em todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e calcule sua derivada nesses pontos.

Exercício 3. Mostre as seguintes igualdades:

- (a) $\cos'(x) = -\operatorname{sen}(x)$
- (b) $\cotg'(x) = -\operatorname{cossec}^2(x)$
- (c) $\sec'(x) = \sec(x) \operatorname{tg}(x)$
- (d) $\operatorname{cossec}'(x) = -\operatorname{cossec}(x) \cotg(x)$

Exercício 4. Escreva a equação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto especificado. Esboce o gráfico de $f(x)$ e da reta tangente.

- (a) $y = x^3$ no ponto $x = 3$
- (b) $y = 2^x$ no ponto $x = 2$
- (c) $y = \frac{1}{x-1}$ no ponto $x = -1$
- (d) $y = \cos(x) + x^2$ no ponto $x = 0$
- (e) $y = \operatorname{sen}(x)$ no ponto $x = \pi$

Exercício 5. Encontre as derivadas das seguintes funções:

- (a) $f(x) = x^7 + 6x^6 + x^5 + 3x^3 + x^2 + \pi$
- (b) $f(x) = \frac{\pi}{x^2} + \frac{\ln(4)}{x} + \sqrt{5}x$
- (c) $f(x) = \frac{2}{5x-3} - \frac{1}{x}$
- (d) $f(x) = x^7 e^x$
- (e) $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$
- (f) $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x) + \cos(x)}{\operatorname{sen}(x) - \cos(x)}$

- (g) $f(x) = \operatorname{tg}(x) - \operatorname{cotg}(x)$
- (h) $f(x) = (x - 2) \operatorname{sen}(x) + x^2 \operatorname{tg}(x) + \operatorname{sen}(x) \cos(x)$
- (i) $f(x) = \frac{x^4}{\ln(x)}$
- (j) $f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{1 - \ln(x)}$

Exercício 6. Determine quantas retas tangentes à curva $y = \frac{x}{x+1}$ passam pelo ponto $(1, 2)$. Em quais pontos essas retas tangentes tocam a curva?

Exercício 7. Considere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$. Determine os pontos de tangência nos quais a reta tangente ao gráfico de f é horizontal.

Exercício 8. Calcule as seguintes derivadas:

- (a) $\operatorname{tg}(4x)$
- (b) $\operatorname{sen}(x^3 + 3x)$
- (c) $e^{\cos(x)}$
- (d) $e^{\operatorname{sen}(x^3)}$
- (e) $\frac{1}{1 + e^{x^3}}$
- (f) $\log_2(\operatorname{sen}(2x))$

Exercício 9. Considere a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \sqrt[3]{x}$. Mostre as seguintes afirmações:

- (a) g é derivável em todos os números reais não nulos e $g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- (b) g não é derivável em 0.

Dica. Recorde que g é a função inversa da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$.

Exercício 10. Prove as seguintes afirmações.

- (a) A função $\operatorname{arcsen} :]-1, 1[\rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ é derivável e vale que $\operatorname{arcsen}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$
- (b) A função $\operatorname{arccos} :]-1, 1[\rightarrow]0, \pi[$ é derivável e vale que $\operatorname{arccos}'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$

(c) A função $\operatorname{arcsec} : \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \rightarrow]0, \pi[\setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ é derivável e vale que

$$\operatorname{arcsec}'(y) = \begin{cases} \frac{1}{y\sqrt{y^2-1}}, & \text{se } y > 1 \\ \frac{-1}{y\sqrt{y^2-1}}, & \text{se } y < -1. \end{cases}$$

(d) A função $\operatorname{arccotg} : \mathbb{R} \rightarrow]0, \pi[$ é derivável e vale que

$$\operatorname{arccotg}'(y) = \frac{-1}{1+y^2}$$

(e) A função $\operatorname{arccossec} : \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \rightarrow]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\}$ é derivável e vale que

$$\operatorname{arccossec}'(y) = \begin{cases} \frac{-1}{y\sqrt{y^2-1}}, & \text{se } y > 1 \\ \frac{1}{y\sqrt{y^2-1}}, & \text{se } y < -1. \end{cases}$$

Exercício 11. Calcule a derivada das seguintes funções:

(a) x^x

(b) $\operatorname{sen}(x)^{\cos(x)}$