

Funções de uma variável – Lista 2

Exercício 1. Fixado um número natural positivo n , determine a derivada de ordem n de cada uma das seguintes funções:

- (a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$
- (b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sin(x)$
- (c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos(x)$
- (d) $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \ln(x)$

Exercício 2. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x|x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f é derivável, mas $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **não** é derivável.

Exercício 3. Determine os pontos críticos das seguintes funções:

- (a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 5x^2 + 4$
- (b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + \sin(x)$
- (c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |2x + 3|$
- (d) $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x \ln(x)$

Exercício 4. Determine os valores máximos e mínimos globais das seguintes funções:

- (a) $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = xe^{-x}$
- (b) $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$
- (c) $f : [0, \frac{\pi}{3}] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$
- (d) $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x - 3 \ln(x)$
- (e) $f : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x^4 - 4}{x^2 + 1}$

Exercício 5. Determine os valores máximos e mínimos globais da função $f : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x}, & \text{se } x \geq 0 \\ 1 - \sqrt{-x}, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Exercício 6. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x - 1|$. Mostre que não $c \in \mathbb{R}$ tal que $f'(c) = \frac{f(3) - f(0)}{3}$. Por que isso não contradiz o Teorema do valor médio?

Exercício 7. Mostre que o polinômio $2x^3 + 3x^2 + 6x + 1$ possui exatamente uma raiz real.

Exercício 8. Use o Teorema do valor médio para mostrar a seguinte desigualdade:

$$|\operatorname{sen}(a) - \operatorname{sen}(b)| \leq |a - b|,$$

para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercício 9. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x^5 + x^3 + 2x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f é estritamente crescente.

Exercício 10. Considere a função $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$, para todo $x \in]0, +\infty[$. Determine os intervalos em que f é crescente e os intervalos em que f é decrescente.

Exercício 11. Determine os intervalos em que as seguintes funções são crescentes e os intervalos em que elas são decrescentes:

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$

(b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x^2 - x}{1 + 3x^2}$

(c) $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

(d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2 - e^{-x}$

(e) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + \cos(x)$

(f) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \ln(x^4 + 27)$

Exercício 12. Determine (se existirem) os valores máximos e mínimos globais das seguintes funções:

(a) $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$

(b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^5 - 7x^2 + 2$

(c) $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \ln(x) - x$

(d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{9 + x^2}$.

Exercício 13. Determine (se existirem) os pontos de máximo e de mínimo locais das seguintes funções:

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 3$

(b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

(c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 e^{-5x}$