Geometria Analítica

Lista 2

Exercício 1. Sejam n um número natural positivo, $\overrightarrow{v_1}, ..., \overrightarrow{v_n}$ vetores distintos e α_i, β_i números reais, para $i = 1, ..., n$. Mostre que se $\{\overrightarrow{v_1}, ..., \overrightarrow{v_n}\}$ é LI, então a igualdade:

$$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{v_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{v_2} + ... + \alpha_n \cdot \overrightarrow{v_n} = \beta_1 \cdot \overrightarrow{v_1} + \beta_2 \cdot \overrightarrow{v_2} + ... + \beta_n \cdot \overrightarrow{v_n}$$

vale se, e somente se, $\alpha_i = \beta_i$, para todo $i = 1, ..., n$.

Exercício 2. Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores distintos. Mostre que se o conjunto $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ é LI, então o conjunto $\{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\}$ também é LI.

Exercício 3. Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores distintos. Mostre que se $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ é LI, então $\{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}, 3\overrightarrow{v}\}$ também é LI.

Exercício 4. Sejam B uma base de V^3 e $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores tais que $[\overrightarrow{u}]_B = (1, -1, 3)$, $[\overrightarrow{v}]_B = (2, 1, 3)$ e $[\overrightarrow{w}]_B = (-1, -1, 4)$. Determine as coordenadas na base B dos seguintes vetores:

(1) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$
(2) $\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v}$
(3) $\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v} - 3\overrightarrow{w}$

Exercício 5. Fixada base B de V^3, determine se os seguintes conjuntos são LI ou LD:

(1) $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$, onde $[\overrightarrow{u}]_B = (0, 1, 0)$ e $[\overrightarrow{v}]_B = (1, 0, 1)$
(2) $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$, onde $[\overrightarrow{u}]_B = (1, -3, 14)$ e $[\overrightarrow{v}]_B = (\frac{1}{14}, \frac{-3}{14}, 1)$
(3) $\{\overrightarrow{u}\}$, onde $[\overrightarrow{u}]_B = (1, 0, 1)$
(4) $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$, onde $[\overrightarrow{u}]_B = (1, 2, 1), [\overrightarrow{v}]_B = (1, -1, -7)$ e $[\overrightarrow{w}]_B = (4, 5, -4)$.

Exercício 6. Sejam $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ vetores distintos e suponha que $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ seja LI. Dado $\overrightarrow{z} \in V^3$, sabemos que existem únicos números reais α, β, γ tais que:

$$\overrightarrow{z} = \alpha \cdot \overrightarrow{u} + \beta \cdot \overrightarrow{v} + \gamma \cdot \overrightarrow{w}.$$

Mostre que o conjunto $\{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{z}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{z}, \overrightarrow{w} + \overrightarrow{z}\}$ é LI se, e somente se, $\alpha + \beta + \gamma + 1 \neq 0$.

Exercício 7. Seja $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores distintos. Mostre que se $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LI, então o conjunto:

$$\{\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}, 2\vec{u} + \vec{v} + 3\vec{w}, \vec{u} + 8\vec{v} + 3\vec{w}\}$$

é LD.

Exercício 8. Seja $B = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ uma base de V^3 e considere os vetores $\vec{u_1}, \vec{u_2}$ e $\vec{u_3}$ definidos como:

$$\vec{u_1} = \vec{v_1} + \vec{v_2} + \vec{v_3},$$
$$\vec{u_2} = \vec{v_1} + \vec{v_2} \quad \text{e}$$
$$\vec{u_3} = \vec{v_3}.$$

Decida se $C = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ é base de V^3.

Exercício 9. Sejam $B = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ uma base de V^3 e α, β, γ números reais. Mostre que $C = (\alpha\vec{v_1}, \beta\vec{v_2}, \gamma\vec{v_3})$ é base de V^3 se, e somente se, α, β e γ são não nulos.

Exercício 10. Sejam $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ e $F = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ bases de V^3 e $\vec{v}$ um vetor. Sabendo que as coordenadas (y_1, y_2, y_3) de $\vec{v}$ na base F se relacionam com as coordenadas (x_1, x_2, x_3) de $\vec{v}$ na base E da seguinte forma:

$$y_1 = 2x_1 - x_2 + x_3$$
$$y_2 = x_1 - 3x_3$$
$$y_3 = x_2 + 2x_3,$$

escreva:

(1) $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ e $\vec{e_3}$ como combinação linear de $\vec{f_1}, \vec{f_2}$ e $\vec{f_3}$.
(2) $\vec{f_1}, \vec{f_2}$ e $\vec{f_3}$ como combinação linear de $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ e $\vec{e_3}$.

Exercício 11. Seja $B = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ uma base de V^3.

(1) Mostre que $C = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ também é base de V^3, onde $[\vec{u}]_B = (1, 2, 1)$, $[\vec{v}]_B = (1, -1, -1)$ e $[\vec{w}]_B = (2, 1, 4)$.
(2) Determine as coordenadas na base B do vetor $\vec{a}$, sabendo que $[\vec{a}]_C = (-1, 1, 2)$.
(3) Determine as coordenadas na base C do vetor $\vec{b}$, sabendo que $[\vec{b}]_B = (1, -3, 2)$.

Exercício 12. Sejam $E = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ e $F = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3})$ bases de V^3 tais que:

$$\overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_3}$$
$$\overrightarrow{f_2} = 3\overrightarrow{e_1}$$
$$\overrightarrow{f_3} = 4\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2}.$$

Determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v}$ na base E, sabendo que $[\overrightarrow{v}]_F = (1, 2, -1)$.

Exercício 13. Mostre (usando vetores) que as diagonais de um paralelogramo têm a mesma medida se, e somente se, o paralelogramo é retângulo.

Exercício 14. Seja B uma base ortonormal de V^3. Determine o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, sabendo que $[\overrightarrow{u}]_B = (1, 10, 200)$ e $[\overrightarrow{v}]_B = (-10, 1, 0)$.

Exercício 15. Seja $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ uma base ortonormal de V^3. Mostre que dado $\overrightarrow{u} \in V^3$, vale que:

$$\overrightarrow{u} = (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{e_1})\overrightarrow{e_1} + (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{e_2})\overrightarrow{e_2} + (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{e_3})\overrightarrow{e_3}.$$

Exercício 16. Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores. Calcule $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|$, sabendo que $\|\overrightarrow{u}\| = 13$, $\|\overrightarrow{v}\| = 19$ e $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| = 24$.

Sugestão. Use o fato que para qualquer vetor $\overrightarrow{w}$ vale que $\|\overrightarrow{w}\|^2 = w \cdot w$.

Exercício 17. Suponha que os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ formem um ângulo de 60^0. Calcule $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|$ e $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|$, sabendo também que $\|\overrightarrow{u}\| = 8$ e $\|\overrightarrow{v}\| = 5$.

Exercício 18. Seja E uma base ortonormal de V^3 e considere $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores satisfazendo $[\overrightarrow{v}]_E = (1, -1, 0)$ e $[\overrightarrow{w}]_E = (1, 1, 0)$. Determine as possíveis coordenadas do vetor $\overrightarrow{u}$ na base E, sabendo que $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{2}$, $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$ são ortogonais e que o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ mede 45^0.

Exercício 19. Seja E uma base ortonormal de V^3. Determine as coordenadas na base E da projeção do vetor $\overrightarrow{w}$ na direção do vetor $\overrightarrow{v}$ nos seguintes casos:

(1) $[\overrightarrow{w}]_E = (1, -1, 2)$ e $[\overrightarrow{v}]_E = (3, -1, 1)$.
(2) $[\overrightarrow{w}]_E = (-1, 1, 1)$ e $[\overrightarrow{v}]_E = (-2, 1, 2)$.

Exercício 20. Sejam E uma base ortonormal de V^3 e A, B, C pontos de E^3 tais que $[\overrightarrow{AB}]_E = (1, 0, 1)$ e $[\overrightarrow{CB}]_E = (0, 1, 2)$.

(1) Mostre que o triângulo ABC é retângulo.
(2) Determine a projeção do vetor $\overrightarrow{AB}$ na direção do vetor $\overrightarrow{BC}$.

Respostas de alguns exercícios

Exercício 4.
(1) $[\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}]_B = (3, 0, 6)$
(2) $[\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v}]_B = (-3, -3, -3)$
(3) $[\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v} - 3\overrightarrow{w}]_B = (8, 4, -3)$.

Exercício 5.
(1) LI
(2) LD
(3) LI
(4) LD

Exercício 8. Não, pois o conjunto $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ é LD.

Exercício 10. (1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{e_1} &= 2\overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_2}\\ \overrightarrow{e_2} &= -\overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_3}\\ \overrightarrow{e_3} &= \overrightarrow{f_1} - 3\overrightarrow{f_2} + 2\overrightarrow{f_3}.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{f_1} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{e_1} - \frac{2}{9}\overrightarrow{e_2} + \frac{1}{9}\overrightarrow{e_3}\\ \overrightarrow{f_2} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{e_1} + \frac{4}{9}\overrightarrow{e_2} - \frac{2}{9}\overrightarrow{e_3}\\ \overrightarrow{f_3} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{e_1} + \frac{7}{9}\overrightarrow{e_2} + \frac{1}{9}\overrightarrow{e_3}.\end{aligned}$$

Exercício 11. (2) $[\overrightarrow{a}]_B = (4, -1, 6)$
(3) $[\overrightarrow{b}]_C = (-\frac{7}{4}, \frac{7}{12}, \frac{13}{12})$.

Exercício 12. $[\overrightarrow{v}]_E = (3, 3, -1)$.

Exercício 16. $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\| = 22$.

Exercício 17. $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| = \sqrt{129}$ e $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\| = 7$.

Exercício 18. $[\overrightarrow{u}]_E = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ ou $[\overrightarrow{u}]_E = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1)$.

Exercício 19. (1) $[proj_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{w}]_E = \frac{6}{11}(3, -1, 1)$
(2) $[proj_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{w}]_E = \frac{5}{9}(-2, 1, 2)$.

Exercício 20. $[proj_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{AB}]_E = \frac{2}{5}(0, 1, 2)$.