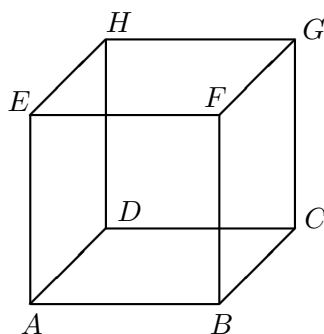


Geometria Analítica

Lista 1

Exercício 1. Na figura abaixo, representa-se um paralelepípedo ABCDEFGH. Sendo $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$, exprima $\overrightarrow{HB}$ e $\overrightarrow{DF}$ em função de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.



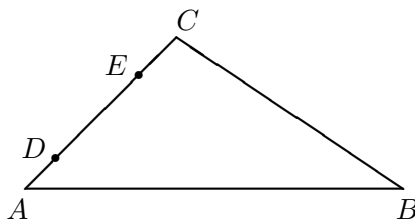
Exercício 2. Sejam A, B, C e D pontos de E^3 e sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores de V^3 tais que $\overrightarrow{AD} = 5 \cdot \vec{u}$, $\overrightarrow{BC} = 3 \cdot \vec{u}$ e $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

- (1) Faça uma figura na qual estejam representados adequadamente os pontos A, B, C e D e os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
- (2) Exprima $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{CA}$ em função de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Exercício 3. Considere no espaço euclidiano E^3 um triângulo ABC e sejam D e E pontos do segmento AC tais que

$$\|\overrightarrow{AD}\| = \frac{1}{5} \|\overrightarrow{AC}\| \quad \text{e} \quad \|\overrightarrow{AE}\| = \frac{3}{4} \|\overrightarrow{AC}\|,$$

como ilustrado na figura abaixo:



Determine os números reais α, β, γ e δ tais que:

$$\overrightarrow{BD} = \alpha \overrightarrow{BA} + \beta \overrightarrow{BC} \quad \text{e}$$

$$\overrightarrow{BE} = \gamma \overrightarrow{BA} + \delta \overrightarrow{BC}.$$

Exercício 4. Mostre que as diagonais de um paralelograma têm o mesmo ponto médio.

Exercício 5. Mostre que o segmento que liga os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem como medida a metade da medida desse lado.

Exercício 6. Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores de V^3 . Mostre que:

- (1) Se $\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$, então $\vec{v} = \vec{w}$.
- (2) Se $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} + \vec{v}$, então $\vec{u} = \vec{w}$.
- (3) Se $\vec{u} + \vec{v} = \vec{u}$, então $\vec{v} = \vec{0}$.
- (4) Se $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$, então $\vec{v} = -\vec{u}$.
- (5) O elemento oposto de $\vec{u}$ é $(-1) \cdot \vec{u}$.

As igualdades (1) e (2) são chamadas de *leis do cancelamento da adição*.

Exercício 7. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não nulos e sejam (A, B) um representante de $\vec{u}$ e (C, D) um representante de $\vec{v}$. Mostre que as retas AB e CD são paralelas se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}$.

Exercício 8. Sejam $\vec{v} \in V^3$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Mostre que:

- (1) Se $\alpha \cdot \vec{v} = \vec{0}$, então $\alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.
- (2) Se $\alpha \cdot \vec{v} = \beta \cdot \vec{v}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, então $\alpha = \beta$.

Exercício 9. Mostre que se $\vec{v} \neq \vec{0}$, então $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ é um vetor unitário que tem a mesma direção e o mesmo sentido que $\vec{v}$.

Respostas de alguns exercícios

Exercício 1. $\overrightarrow{HB} = \vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$ e $\overrightarrow{DF} = \vec{u} + \vec{w} - \vec{v}$.

Exercício 2 item (2). $\overrightarrow{CD} = 2\vec{u} - \vec{v}$, $\overrightarrow{BD} = 5\vec{u} - \vec{v}$ e $\overrightarrow{CA} = -3\vec{u} - \vec{v}$.

Exercício 3. $\alpha = \frac{4}{5}$, $\beta = \frac{1}{5}$, $\gamma = \frac{1}{4}$ e $\delta = \frac{3}{4}$.