

Geometria Analítica

Lista 2

Exercício 1. Sejam n um número natural positivo, $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ vetores distintos e α_i, β_i números reais, para $i = 1, \dots, n$. Mostre que se $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ é LI, então a igualdade:

$$\alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \vec{v}_n = \beta_1 \cdot \vec{v}_1 + \beta_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \beta_n \cdot \vec{v}_n$$

vale se, e somente se, $\alpha_i = \beta_i$, para todo $i = 1, \dots, n$.

Exercício 2. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores distintos. Mostre que se o conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LI, então o conjunto $\{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}\}$ também é LI.

Exercício 3. Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores distintos. Mostre que se $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LI, então $\{\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}, \vec{u} - \vec{v}, 3\vec{v}\}$ também é LI.

Exercício 4. Sejam B uma base de V^3 e $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores tais que $[\vec{u}]_B = (1, -1, 3)$, $[\vec{v}]_B = (2, 1, 3)$ e $[\vec{w}]_B = (-1, -1, 4)$. Determine as coordenadas na base B dos seguintes vetores:

- (1) $\vec{u} + \vec{v}$
- (2) $\vec{u} - 2\vec{v}$
- (3) $\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w}$

Exercício 5. Fixada base B de V^3 , determine se os seguintes conjuntos são LI ou LD:

- (1) $\{\vec{u}, \vec{v}\}$, onde $[\vec{u}]_B = (0, 1, 0)$ e $[\vec{v}]_B = (1, 0, 1)$
- (2) $\{\vec{u}, \vec{v}\}$, onde $[\vec{u}]_B = (1, -3, 14)$ e $[\vec{v}]_B = (\frac{1}{14}, \frac{-3}{14}, 1)$
- (3) $\{\vec{u}\}$, onde $[\vec{u}]_B = (1, 0, 1)$
- (4) $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, onde $[\vec{u}]_B = (1, 2, 1)$, $[\vec{v}]_B = (1, -1, -7)$ e $[\vec{w}]_B = (4, 5, -4)$.

Exercício 6. Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vetores distintos e suponha que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ seja LI. Dado $\vec{z} \in V^3$, sabemos que existem únicos números reais α, β, γ tais que:

$$\vec{z} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} + \gamma \cdot \vec{w}.$$

Mostre que o conjunto $\{\vec{u} + \vec{z}, \vec{v} + \vec{z}, \vec{w} + \vec{z}\}$ é LI se, e somente se, $\alpha + \beta + \gamma + 1 \neq 0$.

Exercício 7. Seja $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores distintos. Mostre que se $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LI, então o conjunto:

$$\{\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}, 2\vec{u} + \vec{v} + 3\vec{w}, \vec{u} + 8\vec{v} + 3\vec{w}\}$$

é LD.

Exercício 8. Seja $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ uma base de V^3 e considere os vetores $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ e $\vec{u}_3$ definidos como:

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3,$$

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \text{ e}$$

$$\vec{u}_3 = \vec{v}_3.$$

Decida se $C = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ é base de V^3 .

Exercício 9. Sejam $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ uma base de V^3 e α, β, γ números reais. Mostre que $C = (\alpha\vec{v}_1, \beta\vec{v}_2, \gamma\vec{v}_3)$ é base de V^3 se, e somente se, α, β e γ são não nulos.

Exercício 10. Sejam $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ bases de V^3 e $\vec{v}$ um vetor. Sabendo que as coordenadas (y_1, y_2, y_3) de $\vec{v}$ na base F se relacionam com as coordenadas (x_1, x_2, x_3) de $\vec{v}$ na base E da seguinte forma:

$$y_1 = 2x_1 - x_2 + x_3$$

$$y_2 = x_1 - 3x_3$$

$$y_3 = x_2 + 2x_3,$$

escreva:

- (1) $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$ como combinação linear de $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ e $\vec{f}_3$.
- (2) $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ e $\vec{f}_3$ como combinação linear de $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$.

Exercício 11. Seja $B = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ uma base de V^3 .

- (1) Mostre que $C = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ também é base de V^3 , onde $[\vec{u}]_B = (1, 2, 1)$, $[\vec{v}]_B = (1, -1, -1)$ e $[\vec{w}]_B = (2, 1, 4)$.
- (2) Determine as coordenadas na base B do vetor $\vec{a}$, sabendo que $[\vec{a}]_C = (-1, 1, 2)$.
- (3) Determine as coordenadas na base C do vetor $\vec{b}$, sabendo que $[\vec{b}]_B = (1, -3, 2)$.

Exercício 12. Sejam $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ bases de V^3 tais que:

$$\begin{aligned}\vec{f}_1 &= \vec{e}_1 - \vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 &= 3\vec{e}_1 \\ \vec{f}_3 &= 4\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2.\end{aligned}$$

Determine as coordenadas do vetor $\vec{v}$ na base E , sabendo que $[\vec{v}]_F = (1, 2, -1)$.

Exercício 13. Mostre (usando vetores) que as diagonais de um paralelogramo têm a mesma medida se, e somente se, o paralelogramo é retângulo.

Exercício 14. Seja B uma base ortonormal de V^3 . Determine o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sabendo que $[\vec{u}]_B = (1, 10, 200)$ e $[\vec{v}]_B = (-10, 1, 0)$.

Exercício 15. Seja $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal de V^3 . Mostre que dado $\vec{u} \in V^3$, vale que:

$$\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{u} \cdot \vec{e}_2)\vec{e}_2 + (\vec{u} \cdot \vec{e}_3)\vec{e}_3.$$

Exercício 16. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores. Calcule $\|\vec{u} - \vec{v}\|$, sabendo que $\|\vec{u}\| = 13$, $\|\vec{v}\| = 19$ e $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 24$.

Sugestão. Use o fato que para qualquer vetor $\vec{w}$ vale que $\|\vec{w}\|^2 = \vec{w} \cdot \vec{w}$.

Exercício 17. Suponha que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ formem um ângulo de 60° . Calcule $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ e $\|\vec{u} - \vec{v}\|$, sabendo também que $\|\vec{u}\| = 8$ e $\|\vec{v}\| = 5$.

Exercício 18. Seja E uma base ortonormal de V^3 e considere $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores satisfazendo $[\vec{v}]_E = (1, -1, 0)$ e $[\vec{w}]_E = (1, 1, 0)$. Determine as possíveis coordenadas do vetor $\vec{u}$ na base E , sabendo que $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$, $\vec{u}$ e $\vec{w}$ são ortogonais e que o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ mede 45° .

Exercício 19. Seja E uma base ortonormal de V^3 . Determine as coordenadas na base E da projeção do vetor $\vec{w}$ na direção do vetor $\vec{v}$ nos seguintes casos:

- (1) $[\vec{w}]_E = (1, -1, 2)$ e $[\vec{v}]_E = (3, -1, 1)$.
- (2) $[\vec{w}]_E = (-1, 1, 1)$ e $[\vec{v}]_E = (-2, 1, 2)$.

Exercício 20. Sejam E uma base ortonormal de V^3 e A, B, C pontos de E^3 tais que $[\vec{AB}]_E = (1, 0, 1)$ e $[\vec{CB}]_E = (0, 1, 2)$.

- (1) Mostre que o triângulo ABC é retângulo.
 (2) Determine a projeção do vetor $\overrightarrow{AB}$ na direção do vetor $\overrightarrow{BC}$.

Respostas de alguns exercícios

Exercício 4.

- (1) $[\vec{u} + \vec{v}]_B = (3, 0, 6)$
 (2) $[\vec{u} - 2\vec{v}]_B = (-3, -3, -3)$
 (3) $[\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w}]_B = (8, 4, -3)$.

Exercício 5.

- (1) LI
 (2) LD
 (3) LI
 (4) LD

Exercício 8. Não, pois o conjunto $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ é LD.

Exercício 10. (1)

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= 2\vec{f}_1 + \vec{f}_2 \\ \vec{e}_2 &= -\vec{f}_1 + \vec{f}_3 \\ \vec{e}_3 &= \vec{f}_1 - 3\vec{f}_2 + 2\vec{f}_3.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\vec{f}_1 &= \frac{1}{3}\vec{e}_1 - \frac{2}{9}\vec{e}_2 + \frac{1}{9}\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 &= \frac{1}{3}\vec{e}_1 + \frac{4}{9}\vec{e}_2 - \frac{2}{9}\vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 &= \frac{1}{3}\vec{e}_1 + \frac{7}{9}\vec{e}_2 + \frac{1}{9}\vec{e}_3.\end{aligned}$$

Exercício 11. (2) $[\vec{a}]_B = (4, -1, 6)$

(3) $[\vec{b}]_C = (-\frac{7}{4}, \frac{7}{12}, \frac{13}{12})$.

Exercício 12. $[\vec{v}]_E = (3, 3, -1)$.

Exercício 16. $\|\vec{u} - \vec{v}\| = 22$.

Exercício 17. $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{129}$ e $\|\vec{u} - \vec{v}\| = 7$.

Exercício 18. $[\vec{u}]_E = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ ou $[\vec{u}]_E = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1)$.

Exercício 19. (1) $[proj_{\vec{v}} \vec{w}]_E = \frac{6}{11}(3, -1, 1)$

(2) $[proj_{\vec{v}} \vec{w}]_E = \frac{5}{9}(-2, 1, 2)$.

Exercício 20. $[proj_{\vec{BC}} \vec{AB}]_E = \frac{2}{5}(0, 1, 2)$.