Topologia - Lista 2

Em sala de aula, vimos que se (X, d) é um espaço métrico, então d induz uma topologia em X dada por:

$$\tau_d = \{U \subset X : \text{ U é aberto com respeito a } d\}.$$

Definição 1. Sejam X um conjunto e d_1 e d_2 duas métricas em X. Dizemos que d_1 e d_2 são *equivalentes* se elas induzem a mesma topolgia em X. Ou seja, d_1 e d_2 são equivalentes se $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$.

Exercício 1. Sejam X um conjunto e d_1 e d_2 métricas em X.

(a) Mostre que d_1 e d_2 são equivalentes se, e somente se toda bola aberta segundo qualquer dessas métricas contém uma bola aberta de mesmo centro segundo a outra métrica.

(b) Mostre que se existem números reais $a, b > 0$ tais que:

$$ad_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq bd_1(x, y), \ \forall x, y \in X,$$

então d_1 e d_2 são equivalentes.

Observação 1. No item (b) do Exercício 1 não vale a volta. Ou seja, existem métricas equivalentes d_1 e d_2 tais que não existem números reais $a, b > 0$ satisfazendo:

$$ad_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq bd_1(x, y), \ \forall x, y \in X.$$

Se existem $a, b > 0$ tais que a desigualdade acima é satisfeita, então dizemos que d_1 e d_2 são *fortemente equivalentes*. No próximo exercício, veremos um exemplo de duas métrica equivalentes que não são fortemente equivalentes.

Exercício 2. Fixe um número natural $n \geq 1$ e denote por d a métrica euclidiana em $\mathbb{R}^n$.

(a) Mostre que a função $d' : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[$ definida como:

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{d(x, y) + 1}, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

é uma métrica em $\mathbb{R}^n$.

Sugestão. Para mostrar que d' satisfaz a desigualdade triangular, use o fato que a função $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \frac{t}{1+t}$, para todo $t \in [0, +\infty[$, é crescente.

(b) Mostre que d e d' não são fortemente equivalentes.

(c) Mostre que d e d' são equivalentes.

O objetivo do próximo exercício é mostrar que as métrica euclidiana, do máximo e da soma induzem a mesma topologia em $\mathbb{R}^n$

Exercício 3. Fixado $n \geq 1$, denote por d_{soma} a métrica da soma, por d a métrica euclidiana e por $d_{\max}$ a métrica do máximo em $\mathbb{R}^n$.

(a) Mostre que:

$$d_{\max}(x,y) \leq d(x,y) \leq \sqrt{n}\ d_{\max}(x,y) \quad \text{e}$$
$$d_{\max}(x,y) \leq d_{\text{soma}}(x,y) \leq n\ d_{\max}(x,y),$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(b) Use o item anterior para mostrar que:

$$\frac{1}{n}\ d_{\text{soma}}(x,y) \leq d(x,y) \leq \sqrt{n}\ d_{\text{soma}}(x,y),$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(c) Conclua que as métricas d, d_{soma} e $d_{\max}$ são fortemente equivalentes e portanto, equivalentes.

Exercício 4. Seja X um conjunto com mais de um ponto e considere X munido da topologia caótica. Mostre que $\{x\}$ não é fechado, para todo $x \in X$.

Exercício 5. Seja X um conjunto.

(a) Mostre que a seguinte coleção é uma topologia em X:

$$\tau = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X : X \setminus A \text{ é finito}\}.$$

Essa topologia é chamada de *topologia cofinita*.

(b) Mostre que a topologia cofinita coincide com a topologia discreta em X se, e somente se, X é finito.

(c) Mostre que se X é infinito e $x, y \in X$ com $x \neq y$, então não existem abertos disjuntos U e V de X tais que $x \in U$ e $y \in V$.

Exercício 6. Considere $\wp(\mathbb{R})$ munido da topologia *concorda num finito* discutida em sala de aula.

(a) Mostre que o seguinte subconjunto de $\wp(\mathbb{R})$ não é aberto e não é fechado:

$$\text{Fin}(\mathbb{R}) = \{A \in \wp(\mathbb{R}) :\ A \text{ é finito}\}.$$

(b) Fixados $A \in \wp(\mathbb{R})$ e $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$, mostre que o conjunto

$$U^A_{\{t1,\ldots,t_n\}} = \{B \in \wp(\mathbb{R}) :\ B \text{ está } \{t_1, \ldots, t_n\}\text{-próximo de } A\}$$

é fechado em $\wp(\mathbb{R})$. Portanto, temos que $U^A_{\{t1,\ldots,t_n\}}$ é um subconjunto clopen de $\wp(\mathbb{R})$, já que esse conjunto também é aberto.

Note que $\mathrm{Fin}(\mathbb{R})$ satisfaz uma condição bem mais forte que a de não ser aberto.

Definição 2. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. Dizemos que um ponto $x \in A$ é um *ponto interior* de A se A é vizinhança de x, ou seja, se existe um aberto U que contém x e está contido em A. O conjunto dos pontos interiores de A é denotado por $\mathrm{int}(A)$.

Note que um subconjunto A de um espaço topológico (X, τ) é aberto se, e somente se, $A = \mathrm{int}(A)$. Portanto, para que A não seja aberto é necessário e suficiente que exista um ponto $a \in A$ tal que a não é ponto interior de A. Ao provar que $\mathrm{Fin}(\mathbb{R})$ não é aberto no item (a) do Exercício 6, vocês devem ter percebido que nenhum ponto de $\mathrm{Fin}(\mathbb{R})$ é ponto interior de $\mathrm{Fin}(\mathbb{R})$.

Exercício 7. (a) Mostre que a reta de Sorgenfrey é first-countable.

(b) Mostre que se t e s são números reais com $t < s$, então o conjunto $[t, s[$ é um subconjunto clopen da reta de Sorgenfrey.

Exercício 8. Seja (X, τ) um espaço topológico e para cada $x \in X$ denote por $\mathcal{V}_x$ a coleção de todas as vizinhanças de x. Mostre que:

(a) $\mathcal{V}_x \neq \emptyset$, para todo $x \in X$.

(b) Se $A \in \mathcal{V}_x$, então $x \in A$.

(c) Se $A, B \in \mathcal{V}_x$, então $A \cap B \in \mathcal{V}_x$.

(d) Se $A \in \mathcal{V}_x$ e $A \subset B$, então $B \in \mathcal{V}_x$.

(e) Se $A \in \mathcal{V}_x$, então existe $B \in \mathcal{V}_x$ tal que $B \subset A$ e $B \in \mathcal{V}_y$, para todo $y \in B$.

(f) $U \in \tau$ se, e somente se, $U \in \mathcal{V}_x$, para todo $x \in U$.

Exercício 9. Seja X um conjunto não vazio e para cada $x \in X$, seja $\mathcal{V}_x$ uma coleção de subconjuntos de X satisfazendo as condições (a), (b), (c), (d) e (e) do Exercício 8, então:

$$\tau = \{U \subset X : U \in \mathcal{V}_x,\ \forall x \in U\}$$

é uma topologia em X e para cada $x \in X$, $\mathcal{V}_x$ é a coleção de todas as vizinhanças de x com respeito a τ.

Exercício 10. Sejam Y um conjunto e p um elemento que não pertence a Y. Para cada $y \in Y$, seja $\mathcal{S}_y = \{\{y\}\}$ e seja:

$$\mathcal{S}_p = \{A \cup \{p\} : A \subset Y \text{ e } Y \setminus A \text{ é finito}\}.$$

Denote por $X = Y \cup \{p\}$ e para cada $x \in X$, seja:

$$\mathcal{V}_x = \{A \subset X :\ \exists B \in \mathcal{S}_x \text{ com } B \subset A\}.$$

(a) Mostre que a coleção $\{\mathcal{V}_x : x \in X\}$ satisfaz as condições (a), (b), (c), (d) e (e) do Exercício 8 e portanto

$$\tau = \{U \subset X : U \in \mathcal{V}_x,\ \forall x \in U\}$$

é uma topologia em X e para cada $x \in X$ a coleção de todas as vizinhanças de x coincide com $\mathcal{V}_x$.

(b) Mostre que para cada $x \in X$, $\mathcal{S}_x$ é um sitema fundamental de vizinhanças de x, com respeito a τ.

(c) Descreva τ de uma forma mais concreta.

(d) Mostre que todos os pontos de Y são *pontos isolados* com respeito a τ, i.e., $\{y\}$ é aberto em (X, τ), para todo $y \in Y$.

(e) Mostre que o ponto p é isolado com respeito a τ se, e somente se, Y é finito.

(f) Mostre que o ponto p possui um sistema fundamental de vizinhanças enumerável com respeito a τ se, e somente se, Y é enumerável.

Sugestão. Para mostrar que se Y é enumerável, então p possui um sistema fundamental de vizinhanças enumerável, use o fato que da enumerabilidade de Y segue que existe apenas uma quantidade enumerável de subconjuntos finitos de Y.

(g) Mostre que se (X, τ) é metrizável, então Y é enumerável.