

Topologia - Lista 3

No Exercício 1, veremos que a topologia de subespaço goza de uma propriedade transitiva.

Exercício 1. Sejam (X, τ) um espaço topológico, Y um subconjunto de X e Z um subconjunto de Y . Mostre que a topologia de subespaço que Z herda de (Y, τ_Y) coincide com a topologia de subespaço que Z herda de (X, τ) , onde τ_Y denota a topologia de subespaço de Y herdada de (X, τ) .

Exercício 2. Sejam (X, τ) um espaço topológico, Y um subconjunto de X e denote por τ_Y a topologia de subespaço de Y . Mostre que:

- (a) Se $y \in Y$, então A é uma vizinhança de y com respeito a τ_Y se, e somente se, existe uma vizinhança B de y com respeito a τ tal que $A = B \cap Y$.
- (b) Se $y \in Y$ e $\mathcal{S}_y$ é um sistema fundamental de vizinhanças de y com respeito a τ , então:

$$\{B \cap Y : B \in \mathcal{S}_y\}$$

é um sistema fundamental de vizinhanças de y com respeito a τ_Y .

- (c) Se (X, τ) é first-countable, então (Y, τ_Y) também é first-countable.

Definição 1. Uma propriedade topológica é dita *hereditária* se todo subespaço de um espaço topológico que satisfaz essa propriedade também satisfaz a propriedade.

Por exemplo, no item (c) do Exercício 2, vocês mostraram que se um espaço topológico é first-countable, então todos os seus subespaços são first-countable. Portanto, ser first-countable é uma propriedade hereditária. Em sala de aula, vimos que todo subespaço de um espaço topológico metrizável é metrizável e portanto, ser metrizável é uma propriedade hereditária. O estudo de quais propriedades são hereditárias é muito importante em topologia e ao longo do curso, veremos muitos outros exemplos.

Exercício 3. Sejam (X, τ) um espaço topológico e Y um subespaço topológico de X .

- (a) Mostre que se Y é aberto em X e A é um subconjunto aberto de Y , então A é aberto em X .
- (b) Mostre que se Y é fechado em X e A é um subconjunto fechado de Y , então A é fechado em X .
- (c) Mostre que se Y não é aberto em X , então um subconjunto aberto de Y não é necessariamente aberto em X .

- (d) Mostre que se Y não é fechado em X , então um subconjunto fechado de Y não é necessariamente fechado em X .

Exercício 4. Seja $(X, \leq)$ um conjunto totalmente ordenado com mais de um ponto. Mostre que a seguinte coleção é base de uma topologia em X :

$$\mathcal{B} = \{]-\infty, y[: y \in X \} \cup \{]x, +\infty[: x \in X \} \cup \{]x, y[: x < y \}.$$

Como discutido em aula, a topologia gerada por essa base é chamada de *topologia da ordem*.

Definição 2. Considere o conjunto *double arrow* DA definido como:

$$DA = [0, 1] \times \{0, 1\}.$$

Ou seja, cada elemento de DA é da forma $(t, 0)$ ou $(t, 1)$, para algum $t \in [0, 1]$. A *ordem lexicográfica* em DA é a ordem total em DA definida da seguinte forma: dados $(t, i), (s, j) \in DA$, vale que $(t, i) \leq (s, j)$ se, e somente se uma das condições abaixo é satisfeita:

- $(t, i) = (s, j)$
- $t < s$
- $t = s, i = 0$ e $j = 1$.

Exercício 5. Mostre que a ordem lexicográfica é de fato uma ordem total em DA. Faça um desenho que represente DA munido da ordem lexicográfica. Mais precisamente, represente DA como o intervalo $[0, 1]$ com cada um de seus pontos duplicado.

Exercício 6. Considere DA munido da topologia da ordem proveniente da ordem lexicográfica. Mostre que:

- (a) Os pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$ são isolados em DA.
- (b) Se $t \in]0, 1[$, então os pontos $(t, 0)$ e $(t, 1)$ não são pontos isolados de DA.
- (c) Se $t, s \in [0, 1]$ com $t < s$, então $[(t, 1), (s, 0)]$ é um subconjunto clopen de DA.
- (d) DA é first-countable.
- (e) DA é separável.
- (f) DA não é second-countable.
- (g) DA não é metrizável.

Sugestão. Para mostrar o item (f), fixada uma base qualquer $\mathcal{B}$ da topologia de DA, construa uma função injetora $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathcal{B}$. Para construir φ , mostre que dado $t \in [0, 1]$, existe $U_t \in \mathcal{B}$ tal que $(t, 0) \in U_t$ e $U_t \subset [(0, 0), (t, 0)]$ e então defina $\varphi(t) = U_t$, para todo $t \in [0, 1]$.

Exercício 7. Mostre que todo subespaço de um espaço topológico second-countable é second-countable. Ou seja, ser second-countable é uma propriedade hereditária.

Observação 1. Nos Exercícios 2(c) e 7, vimos que as propriedades first-countable e second-countable são hereditárias. O mesmo não vale para separabilidade, ou seja, existem espaços topológicos separáveis com subespaços não separáveis (Exercício 8). No entanto, no Exercício 9, veremos que se um espaço métrico é separável, então todos os seus subespaços são separáveis.

Exercício 8. Considere a seguinte coleção de subconjuntos da reta real $\mathbb{R}$:

$$\tau = \{\emptyset\} \cup \{A \subset \mathbb{R} : 0 \in A\}.$$

Mostre que:

- (a) τ é uma topologia em $\mathbb{R}$.
- (b) $(\mathbb{R}, \tau)$ é separável.
- (c) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ munido da topologia de subespaço não é separável.

Exercício 9. Mostre que se (X, d) é um espaço métrico separável, então todos os seus subespaços são separáveis.

Dica. Use o Exercício 7.

Exercício 10. Sejam X um espaço topológico e $A \subset X$. Mostre que se X é separável e A é aberto em X , então A é separável.

Definição 3. Se (X, τ) é um espaço topológico, então uma *subbase* para τ é uma coleção $\mathcal{C} \subset \tau$ tal que a coleção de todas as intersecções finitas de elementos de $\mathcal{C}$ é uma base de τ . Em outras palavras, $\mathcal{C}$ é uma subbase de τ se a seguinte coleção é uma base de τ :

$$\left\{ \bigcap_{i=1}^n C_i : n \geq 1 \text{ e cada } C_i \in \mathcal{C} \right\}.$$

Exercício 11. Mostre que a seguinte coleção é uma subbase para a topologia usual de $\mathbb{R}$:

$$\{] - \infty, t[: t \in \mathbb{R} \} \cup \{]t, +\infty[: t \in \mathbb{R} \},$$

onde $] - \infty, t[= \{s \in \mathbb{R} : s < t\}$ e $]t, +\infty[= \{s \in \mathbb{R} : t < s\}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Exercício 12. Seja X um conjunto. Mostre que dada qualquer coleção $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X tal que $X = \bigcup \mathcal{C}$, existe uma topologia em X que tem $\mathcal{C}$ como uma subbase.