

Topologia - Lista 4

Exercício 1. Sejam X e Y espaços topológicos, $f : X \rightarrow Y$ uma função e $\mathcal{C}$ uma subbase da topologia de Y . Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) f é contínua.
- (ii) $f^{-1}[C]$ é aberto de X , para todo $C \in \mathcal{C}$.

Exercício 2. Considere o espaço double-arrow DA munido da topologia induzida pela ordem lexicográfica e o intervalo $[0, 1]$ munido da topologia usual. Mostre que:

- (a) A função $f :]0, 1[\rightarrow DA$ definida como $f(t) = (t, 0)$, para todo $t \in]0, 1[$ não é contínua em nenhum ponto de seu domínio.
- (b) A função $\pi_1 : DA \rightarrow [0, 1]$ definida como $\pi_1(t, i) = t$, para todo $(t, i) \in DA$, é contínua.

Exercício 3. Sejam X , Y e Z espaços topológicos, $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ funções e $x \in X$. Mostre que se f é contínua em x e g é contínua em $f(x)$, então $g \circ f$ é contínua em x . Conclua que a composta de funções contínuas é contínua.

Exercício 4. Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função. Mostre que:

- (a) Se f é um homeomorfismo, então X é metrizável se, e somente se, Y é metrizável. Conclua que metrizabilidade é uma propriedade topológica.
- (b) Se f é sobrejetora e contínua e X é separável, então Y é separável. Conclua que separabilidade é uma propriedade topológica.
- (c) Se f é sobrejetora, contínua e aberta e X é second-countable, então Y é second-countable. Conclua que ser second-countable é uma propriedade topológica.
- (d) Se f é sobrejetora, contínua e aberta e X é first-countable, então Y é first-countable. Conclua que ser first-countable é uma propriedade topológica.

Exercício 5. Considere o seguinte conjunto:

$$C[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f \text{ é contínua}\},$$

onde $\mathbb{R}$ está munido da topologia usual. Para cada $t \in [0, 1]$, considere a função $aval_t : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $aval_t(f) = f(t)$, para todo $f \in C[0, 1]$. Denote por τ a topologia induzida pela família de funções $\{aval_t : t \in [0, 1]\}$ em $C[0, 1]$, onde $\mathbb{R}$ está munido da topologia usual.

- (a) Mostre que a seguinte coleção de subconjuntos de $C[0, 1]$ é uma base de τ :

$$\{\{f \in C[0, 1] : f(t_i) \in U_i, i = 1, \dots, n\} : n \geq 1, t_i \in [0, 1], U_i \text{ é aberto de } \mathbb{R}\}.$$

- (b) Mostre que τ está contida na topologia induzida pela métrica do supremo, onde a métrica do supremo é definida como:

$$d_{\sup}(f, g) = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)|, \quad \forall f, g \in C[0, 1].$$

Observação 1. A topologia τ em $C[0, 1]$ definida no Exercício 5 é chamada de *topologia da convergência pontual*. Futuramente, entenderemos o porquê desse nome.

Exercício 6. Seja X um espaço topológico. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) X é Hausdorff.
- (ii) A diagonal $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ é um subconjunto fechado de $X \times X$, onde $X \times X$ está munido da topologia produto.

Definição 1. Sejam I um conjunto e A um subconjunto de I . A *função característica* de A é a função $\chi_A : I \rightarrow \{0, 1\}$ definida como $\chi_A(i) = 1$, se $i \in A$ e $\chi_A(i) = 0$, se $i \notin A$.

Exercício 7. Considere o conjunto $2 = \{0, 1\}$ munido da topologia discreta e seja τ_π a topologia produto em $2^{\mathbb{R}}$, onde $\mathbb{R}$ denota a reta real.

- (a) Mostre que a seguinte coleção de subconjuntos de $2^{\mathbb{R}}$ é uma base para τ_π :

$$\{\{(x_t)_{t \in \mathbb{R}} : x_{t_i} = \eta_i, i = 1, \dots, n\} : n \geq 1, t_i \in \mathbb{R} \text{ e } \eta_i \in 2\}.$$

- (b) Mostre que o espaço $\wp(\mathbb{R})$ munido da topologia concorda num finito é homeomorfo a $2^{\mathbb{R}}$ munido da topologia produto. Mais precisamente, mostre que função $\varphi : \wp(\mathbb{R}) \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$ definida como:

$$\varphi(A) = \chi_A, \quad \forall A \in \wp(\mathbb{R})$$

é um homeomorfismo.

Exercício 8. Considere uma família $\{X_i : i \in I\}$ de espaços topológicos e para cada i , seja Y_i um subespaço topológico de X_i . Mostre que a topologia de subespaço de $\Pi_{i \in I} Y_i$ herdada da topologia produto de $\Pi_{i \in I} X_i$ coincide com a topologia produto em $\Pi_{i \in I} Y_i$.

Exercício 9. Mostre que se $\{X_i : i \in I\}$ é uma família de espaços topológicos Hausdorff, então o espaço $\prod_{i \in I} X_i$, munido da topologia produto, também é Hausdorff.

Definição 2. Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos. Uma métrica no produto cartesiano $X \times Y$ é chamada de uma *métrica produto* se ela induz a topologia produto em $X \times Y$.

No Exercício 7 da Lista 1, vimos como construir métricas no produto cartesiano finito de espaços métricos. No próximo exercício, veremos que as métricas construídas na Lista 1 são métricas produtos.

Exercício 10. Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos. Mostre que as seguintes métricas são métricas produtos em $X \times Y$:

- (a) $d_{\text{soma}}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$,
para todos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$. Essa métrica é chamada de *métrica da soma*.
- (b) $d_{\text{max}}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max \{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$,
para todos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$. Essa métrica é chamada de *métrica do máximo*.

Generalize esses resultados para produtos cartesianos finitos arbitrários de espaços métricos.

Observação 2. Uma consequência muito interessante do Exercício 10 é que se $\{X_1, \dots, X_n\}$ é uma família finita de espaços topológicos metrizáveis, então a topologia produto em $\prod_{i=1}^n X_i$ também é metrizável. No próximo exercício, veremos que a topologia produto no produto cartesiano de uma família enumerável de espaços topológicos metrizáveis também é metrizável. Note que o mesmo não vale para produtos não enumeráveis de espaços metrizáveis. Por exemplo, o espaço $2 = \{0, 1\}$ munido da topologia discreta é metrizável pela métrica discreta, no entanto, o espaço $2^{\mathbb{R}}$, munido da topologia produto, não é metrizável. A não metrizabilidade desse espaço segue dos seguintes resultados: ele é homeomorfo ao espaço $\wp(\mathbb{R})$ munido da topologia concorda num finito (Exercício 7 (b)), metrizabilidade é uma propriedade topológica (Exercício 4 (a)) e a topologia concorda num finito não é metrizável (mostramos isso durante as aulas).

Exercício 11. Seja $\{X_n : n \geq 1\}$ uma família de espaços topológicos metrizáveis e para cada $n \geq 1$, seja d_n uma métrica que induz a topologia de X_n .

- (a) Considere a função $d : \prod_{n \geq 1} X_n \times \prod_{n \geq 1} X_n \rightarrow [0, +\infty[$ definida como:

$$d((x_n)_{n \geq 1}, (y_n)_{n \geq 1}) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)},$$

para todos $(x_n)_{n \geq 1}, (y_n)_{n \geq 1} \in \prod_{n \geq 1} X_n$. Mostre que d está bem definida e é uma métrica no produto cartesiano $\prod_{n \geq 1} X_n$.

(b) Mostre que d induz a topologia produto em $\prod_{n \geq 1} X_n$.

Exercício 12. Seja (X, d) um espaço métrico. Mostre que a função métrica $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty[$ é contínua, onde $X \times X$ está munido da topologia produto e $[0, +\infty[$ está munido da topologia usual.

Exercício 13. [Teorema do Isomorfismo para conjuntos] Sejam X e Y conjuntos, $f : X \rightarrow Y$ uma função e denote por $\sim_f$ a relação de equivalência induzida por f em X .

- (a) Mostre que f passa ao quociente por $\sim_f$.
- (b) Mostre que $\bar{f} : X / \sim_f \rightarrow Y$ é injetora.
- (c) Mostre que $\bar{f} : X / \sim_f \rightarrow \text{Im}(f)$ é bijetora, onde $\text{Im}(f)$ denota a imagem de f .

Observação 3. O item (c) do Exercício 13 é chamado de *Teorema do Isomorfismo* para conjuntos. Vocês já devem ter estudado resultados semelhantes em diversas estruturas matemáticas: espaços vetoriais, grupos, etc. A idéia central em todos os Teoremas do Isomorfismo é que se você tem dois conjuntos X e Y munidos do mesmo tipo de estrutura matemática e uma função entre eles $f : X \rightarrow Y$ que conversa bem com a estrutura, então os espaços $X / \sim_f$ e $\text{Im}(f)$ compartilham todas as propriedades relacionadas à estrutura em questão, se o conjunto quociente $X / \sim_f$ estiver munido da estrutura quociente natural. Quando dois espaços compartilham todas as propriedades relacionadas à estrutura em questão, dizemos que eles são *isomorfos* com respeito a essa estrutura.

Talvez o a parágrafo acima tenha ficado um pouco metafísico, portanto vejamos um exemplo. Considere dois conjuntos X e Y sem nenhuma estrutura. Como eles não tem estrutura nenhuma, qualquer função conversa bem com a estrutura. No item (c) do Exercício 13, vimos que se $f : X \rightarrow Y$ é uma função, então existe uma bijeção entre os conjuntos $X / \sim_f$ e $\text{Im}(f)$. Dessa forma, embora $X / \sim_f$ e Y possam ser formados por pontos de naturezas distintas, temos que a diferença entre eles é que apenas trocamos os nomes dos pontos de $X / \sim_f$ através da $\bar{f}$ e obtivemos $\text{Im}(f)$. Logo, esses conjuntos são isomorfos como conjuntos. Agora, suponha a estrutura matemática em questão seja uma topologia. As funções que conversam bem com a estrutura topológica são as funções contínuas e os isomorfismos são os homeomorfismos. Considere (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua. Dos itens (a) e (b) do Exercício 13, temos que f passa ao quociente por $\sim_f$ e que $\bar{f} : X / \sim_f \rightarrow \text{Im}(f)$ é uma bijeção. A topologia natural em $X / \sim_f$ é a topologia quociente τ_q induzida pela aplicação quociente

$q : X \rightarrow X/\sim_f$. Nesse ponto, é natural indagarmos se

$$\bar{f} : (X/\sim_f, \tau_q) \rightarrow \text{Im}(f)$$

é um homeomorfismo, onde $\text{Im}(f)$ está munida da topologia de subespaço herdada de Y . Em sala de aula, mostramos que a continuidade de f implica a continuidade de $\bar{f}$. No entanto, nem sempre vale que a função inversa de $\bar{f}$ é contínua. Portanto, se a estrutura que estamos considerando é a topológica, então não temos um Teorema do Isomorfismo tão simples quanto o que temos quando estamos lidando com conjuntos sem estrutura ou com espaços vetoriais. No Exercício 15, veremos uma caracterização de quando $\bar{f}$ é um homeomorfismo.

Definição 3. Sejam X um conjunto e $\sim$ uma relação de equivalência em X . Dizemos que um subconjunto A de X é $\sim$ -saturado se para todo $x \in X$ tal que existe $x' \in A$ com $x \sim x'$, então vale que $x \in A$.

Exercício 14. Sejam X um espaço topológico e $\sim$ uma relação de equivalência em X . Mostre que se $U \subset X$ é um aberto $\sim$ -saturado, então $q[U]$ é aberto em $(X/\sim, \tau_q)$, onde $q : X \rightarrow X/\sim$ denota a aplicação quociente e τ_q denota a topologia quociente induzida por q .

Exercício 15. Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua e sobrejetora. Se $\sim_f$ denota a relação de equivalência induzida em X por f e $\bar{f} : X/\sim_f \rightarrow Y$ denota a passagem de f ao quociente por $\sim_f$, então mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) $\bar{f} : X/\sim_f \rightarrow Y$ é um homeomorfismo, onde $X/\sim_f$ está munido da topologia quociente.
- (ii) A topologia de Y coincide com a topologia quociente induzida por f .

Conclua o seguinte *Teorema do Isomorfismo* para espaços topológicos: Sejam X e Y espaços topológicos, $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua e considere a $\text{Im}(f)$ munida da topologia de subespaço herdada de Y . Se a topologia de $\text{Im}(f)$ coincide com a topologia quociente induzida por f , então $\bar{f} : (X/\sim_f, \tau_q) \rightarrow \text{Im}(f)$ é um homeomorfismo, i.e., um isomorfismo de espaços topológicos.

Sugestão. Para mostrar que (i) implica (ii), use o Exercício 14 para concluir que $q[U]$ é aberto, para um subconjunto aberto e $\sim_f$ saturado U de X conveniente.

Exercício 16. Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função sobrejetora. Mostre que se f é contínua e fechada, então f é quociente.

Exercício 17. Considere o conjunto DA munido da topologia da ordem induzida pela ordem lexicográfica e o intervalo $[0, 1]$ munido da topologia usual. Defina a função $\pi_1 : DA \rightarrow [0, 1]$ como:

$$\pi_1((t, i)) = t, \quad \forall t \in [0, 1] \text{ e } i = 0, 1.$$

- (a) Mostre π_1 é fechada.
- (b) Mostre que π_1 não é aberta.

Exercício 18. Considere o intervalo $[0, 2\pi]$ munido da topologia usual e o subconjunto S_1 de $\mathbb{R}^2$ munido da topologia de subespaço, onde:

$$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Mostre que a função sobrejetora $f : [0, 2\pi] \rightarrow S_1$ definida como:

$$f(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta)), \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$$

é uma função quociente.

Exercício 19. Sejam X um espaço topológico e $\sim$ uma relação de equivalência em X . Mostre que se X é separável, então o espaço quociente $(X/\sim, \tau_q)$ é separável.

Observação 4. No Exercício 19, vimos que todo quociente de um espaço topológico separável é separável. No próximo exercício, veremos que o mesmo não vale para espaços Hausdorff.

Exercício 20. Defina a seguinte relação de equivalência na reta real $\mathbb{R}$:

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \text{ ou } (x < 0 \text{ e } y < 0) \text{ ou } (x > 0 \text{ e } y > 0),$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Suponha que $\mathbb{R}$ esteja munido da topologia usual e mostre que o espaço quociente $(\mathbb{R}/\sim, \tau_q)$ não é Hausdorff.

Exercício 21. Sejam X um conjunto, $\{X_i : i \in I\}$ uma família de espaços topológicos e $\{f_i : i \in I\}$ uma família de funções, onde cada $f_i : X \rightarrow X_i$. Considere uma sequência $(x_n)_{n \geq 1}$ de elementos de X e um ponto x de X . Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) A sequência $(x_n)_{n \geq 1}$ converge para x , com respeito à topologia induzida pela família $\{f_i : i \in I\}$.
- (ii) A sequência $(f_i(x_n))_{n \geq 1}$ converge para $f_i(x)$, para todo $i \in I$.

Nos Exercícios 22 e 23, veremos dois casos particulares do Exercício 21.

Exercício 22. Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família de espaços topológicos, $(z_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de elementos do produto cartesiano $\prod_{i \in I} X_i$ e $z \in \prod_{i \in I} X_i$. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) A sequência $(z_n)_{n \geq 1}$ converge para z , com respeito à topologia produto.
- (ii) A sequência $(\pi_i(z_n))_{n \geq 1}$ converge para $\pi_i(z)$, para todo $i \in I$.

Observação 5. Note que o Exercício 22 está nos dizendo que uma sequência de elementos do produto cartesiano converge na topologia produto para um elemento z se, e somente se, a sequência formada pelas i -ésimas coordenadas dessa sequência converge para a i -ésima coordenada de z , para todo $i \in I$.

Exercício 23. Considere o conjunto $C[0, 1]$ munido da topologia induzida pela família $\{aval_t : t \in [0, 1]\}$ que foi definida no Exercício 5. Mostre que se $(f_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência de elementos de $C[0, 1]$ e f é um elemento de $C[0, 1]$, então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) A sequência $(f_n)_{n \geq 1}$ converge para f .
- (ii) A sequência de números reais $(f_n(t))_{n \geq 1}$ converge para $f(t)$, para todo $t \in [0, 1]$.

No próximo exercício, veremos o exemplo de uma função entre espaços topológicos $f : X \rightarrow Y$ que não é contínua, mas para todo ponto $x \in X$ e toda sequência $(x_n)_{n \geq 1}$ de elementos de X que converge para x , vale que a sequência $(f(x_n))_{n \geq 1}$ converge para $f(x)$.

Exercício 24. Denote por X a reta real munida da topologia *co-enumerável* que é definida como:

$$\tau = \{\emptyset\} \cup \{A \subset \mathbb{R} : \mathbb{R} \setminus A \text{ é enumerável}\}.$$

Denote por Y a reta real munida da topologia usual. Considere a função $f : X \rightarrow Y$ dada por $f(t) = t$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Mostre que:

- (a) f não é contínua.
- (b) As únicas sequências convergentes em X são as eventualmente constantes.
- (c) Se $x \in X$ e $(x_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência de elementos de X que converge para x , então a sequência $(f(x_n))_{n \geq 1}$ converge para $f(x)$.