

Topologia - Lista 5

Exercício 1. Sejam X um espaço topológico e A e B subconjuntos de X .

- (a) Mostre que se $A \subset B$, então $\overline{A} \subset \overline{B}$.
- (b) Mostre que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- (c) Encontre um exemplo em que **não** vale que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Exercício 2. Sejam X um espaço topológico e A um subconjunto de X . Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) $\text{int}(A) = \emptyset$.
- (ii) $X \setminus A$ é denso em X .

Exercício 3. Sejam X um espaço topológico e A um subconjunto de X . Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) A é denso em X .
- (ii) $\overline{A} = X$.

Exercício 4. Sejam X um conjunto munido da métrica discreta e x um elemento de X .

- (a) Mostre que $\overline{B(x; 1)} = B(x; 1)$.
- (b) Mostre que $B[x; 1] = X$.
- (c) Conclua que em geral, **não** vale que:

$$\overline{B(x; r)} = B[x; r].$$

No próximo exercício, veremos um exemplo de um ponto do fecho de um conjunto que não é limite de nenhuma sequência de elementos desse conjunto.

Exercício 5. Seja X um conjunto não enumerável e denote por τ a topologia co-enumerável em X :

$$\tau = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X : X \setminus A \text{ é enumerável}\}.$$

Seja Y um subconjunto não enumerável e próprio de X .

- (a) Mostre que $\overline{Y} = X$.
- (b) Mostre que as únicas sequências convergentes em X são as eventualmente constantes.
- (c) Fixe $x \in X \setminus Y$ e mostre que x não é limite de nenhuma sequência de elementos de Y .

Exercício 6. Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) f é contínua.
- (ii) $f[\overline{A}] \subset \overline{f[A]}$, para todo subconjunto A de X .

Exercício 7. Seja X um conjunto e denote por τ a topologia cofinita em X :

$$\tau = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X : X \setminus A \text{ é finito}\}.$$

Mostre que (X, τ) é compacto.

Exercício 8. Mostre que se X é um espaço topológico compacto, Y é um espaço topológico Hausdorff e $f : X \rightarrow Y$ é uma função contínua e sobrejetora, então f é uma função quociente.