Topologia Geral

Lista 1

Definição 1. Sejam X um espaço vetorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e d uma métrica em X. Dizemos que d é:

- *homogênea* se $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e todos $x, y \in X$;
- *invariante por translação* se $d(x + z, y + z) = d(x, y)$, para todos $x, y, z \in X$.

Exercício 1. Sejam X um espaço vetorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e d uma métrica em X. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) Existe uma norma em X que induz a métrica d.

(b) A métrica d é homogênea e invariante por translação.

Mostre também que se d é induzida por uma norma, então essa é a única norma que induz d.

Exercício 2. Dado um subconjunto A de $\mathbb{R}$, definimos o seguinte conjunto:

$$\mathcal{B}\big(A; \mathbb{R}\big) = \{f : A \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f \text{ é limitada}\}.$$

(1) Mostre que $\mathcal{B}\big(A; \mathbb{R}\big)$ é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial, se munido das operações ponto a ponto, i.e.,

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t), \ \forall t \in A, \ \forall f, g \in \mathcal{B}\big(A; \mathbb{R}\big) \text{ e}$$
$$(\lambda \cdot f)(t) = \lambda \cdot f(t), \ \forall t \in A, \ \forall f \in \mathcal{B}\big(A; \mathbb{R}\big), \ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

(2) Mostre que a função $\|.\|_{\sup} : \mathcal{B}\big(A; \mathbb{R}\big) \longrightarrow [0, +\infty[$ dada por:

$$\|f\|_{\sup} = \sup_{t \in A} |f(t)|$$

está bem definida e é uma norma em $\mathcal{B}\big(A; \mathbb{R}\big)$. Essa norma é chamada de *norma do supremo* e a métrica induzida por ela é chamada de *métrica do supremo*.

Exercício 3. Mostre que as bolas abertas de um espaço métrico são subconjuntos abertos desse espaço.

Exercício 4. Seja $(X, \|.\|)$ um espaço normado não trivial, i.e., $X \neq \{0\}$. Mostre que nenhum ponto de X é isolado com respeito à métrica induzida pela norma de X.

Exercício 5. Sejam (X, d) um espaço métrico, $Y \subset X$ e d_Y a métrica induzida em Y por d, i.e., $d_Y = d|_{Y \times Y}$.

(1) Fixados $y \in Y$ e $r > 0$, denote por $B_Y(y;r)$ a bola aberta de Y com centro y e raio r, com respeito a d_Y. Mostre que:
$$B_Y(y;r) = B(y;r) \cap Y,$$
onde $B(y;r)$ denota a bola aberta de X com centro y e raio r.

(2) Seja A um subconjunto de Y. Mostre que A é aberto com respeito a d_Y se, e somente se, existe um subconjunto aberto U de X tal que:
$$A = U \cap Y.$$

Exercício 6. Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros e seja d a métrica em $\mathbb{Z}$ induzida pela métrica euclidiana de $\mathbb{R}$. Mostre que $(\mathbb{Z}, d)$ é um espaço métrico discreto.

Exercício 7. Sejam (X_1, d_1) e (X_2, d_2) espaços métricos. Mostre que as seguintes funções são métricas no produto cartesiano $X_1 \times X_2$:

(1) $d_{\text{soma}}\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$,
$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$.

(2) $d_{\max}\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$,
$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$.

Generalize para qualquer produto cartesiano finito de espaços métricos.

Exercício 8. Sejam (X_1, d_1) e (X_2, d_2) espaços métricos e A um subconjunto de $X_1 \times X_2$. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) A é aberto com respeito a d_{soma}.

(b) A é aberto com respeito a $d_{\max}$.

Ou seja, as métricas d_{soma} e $d_{\max}$ possuem os mesmo abertos.