A Propriedade da c_0-extensão

Claudia Correa
Universidade Federal do ABC – Brazil
Esse projeto é financiado parcialmente pela FAPESP (processo n. 2018/09797-2)

XIII ENAMA
Florianópolis, 06 a 08 de novembro de 2019

O Teorema de Sobcyk

Questão

Sejam X e Z espaços de Banach, Y um subespaço de Banach de X e $T : Y \to Z$ uma transformação linear e limitada. Existe uma transformação linear e limitada $\tilde{T} : X \to Z$ que estende T?

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\exists \tilde{T}?"] & \\
Y \arrow[u, hook] \arrow[r, "T"'] & Z
\end{tikzcd}$$

O Teorema de Sobcyk

Questão

Sejam X e Z espaços de Banach, Y um subespaço de Banach de X e $T : Y \to Z$ uma transformação linear e limitada. Existe uma transformação linear e limitada $\tilde{T} : X \to Z$ que estende T?

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\exists \tilde{T}?"] & \\
Y \arrow[u, hook] \arrow[r, "T"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Resposta: Não.

Teorema (Phillips–1940)

O operador identidade do espaço c_0 não admite uma extensão linear e limitada para o espaço ℓ_∞.

$$
\begin{tikzcd}
\ell_\infty & \\
c_0 \arrow[u, hook] \arrow[r, "Id"] & c_0
\end{tikzcd}
$$

Teorema (Teorema de Sobczyk–1941)

Se X é um espaço de Banach **separável**, *então toda transformação linear e limitada definida num subespaço fechado Y de X e tomando valores em c_0 admite uma extensão linear e limitada definida em todo X.*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\exists \tilde{T}"] & \\
Y \arrow[u, hook] \arrow[r, "\forall T"] & c_0
\end{tikzcd}$$

Teorema (Teorema de Sobczyk–1941)

Se X é um espaço de Banach **separável**, *então toda transformação linear e limitada definida num subespaço fechado Y de X e tomando valores em c_0 admite uma extensão linear e limitada definida em todo X.*

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\exists \tilde{T}"] & \\
Y \arrow[u, hook] \arrow[r, "\forall T"] & c_0
\end{tikzcd}
$$

O coração da prova é a metrizabilidade da bola unitária do espaço dual de X, munida da topologia fraca-estrela.

Definição

Dado um espaço de Banach X, denotamos por:

$$B_{X^*} = \{\alpha \in X^* : \|\alpha\| \leq 1\}.$$

Denotamos por w^* a topologia fraca-estrela em X^*.

Definição

Dado um espaço de Banach X, denotamos por:

$$B_{X^*} = \{\alpha \in X^* : \|\alpha\| \leq 1\}.$$

Denotamos por w^* a topologia fraca-estrela em X^*.

Proposição

Um espaço de Banach X é separável se, e somente se, (B_{X^*}, w^*) é metrizável.

Definição (Claudia e Daniel–2013)

Dizemos que um espaço de Banach X possui a **propriedade da c_0-extensão** *(c_0-EP) se para todo subespaço fechado Y de X e toda transformação linear e limitada $T : Y \to c_0$ existe uma extensão linear e limitada $\tilde{T} : X \to c_0$ de T.*

A propriedade da c_0-extensão

Definição (Claudia e Daniel–2013)

Dizemos que um espaço de Banach X possui a **propriedade da c_0-extensão** *(c_0-EP) se para todo subespaço fechado Y de X e toda transformação linear e limitada $T : Y \to c_0$ existe uma extensão linear e limitada $\tilde{T} : X \to c_0$ de T.*

Exemplo

- *Todo espaço de Banach separável possui a c_0-EP.*

A propriedade da c_0-extensão

Definição (Claudia e Daniel–2013)

Dizemos que um espaço de Banach X possui a **propriedade da c_0-extensão** *(c_0-EP) se para todo subespaço fechado Y de X e toda transformação linear e limitada $T : Y \to c_0$ existe uma extensão linear e limitada $\tilde{T} : X \to c_0$ de T.*

Exemplo

- *Todo espaço de Banach separável possui a c_0-EP.*
- *O espaço ℓ_∞ não possui a c_0-EP.*

A propriedade da c_0-extensão

Definição (Claudia e Daniel–2013)

Dizemos que um espaço de Banach X possui a **propriedade da c_0-extensão** *(c_0-EP) se para todo subespaço fechado Y de X e toda transformação linear e limitada $T : Y \to c_0$ existe uma extensão linear e limitada $\tilde{T} : X \to c_0$ de T.*

Exemplo

- *Todo espaço de Banach separável possui a c_0-EP.*
- *O espaço ℓ_∞ não possui a c_0-EP.*

Questão

Existe um espaço de Banach não separável que possui a c_0-EP?

A propriedade da c_0-extensão

Definição (Claudia e Daniel–2013)

Dizemos que um espaço de Banach X possui a **propriedade da c_0-extensão** *(c_0-EP) se para todo subespaço fechado Y de X e toda transformação linear e limitada $T : Y \to c_0$ existe uma extensão linear e limitada $\tilde{T} : X \to c_0$ de T.*

Exemplo

- *Todo espaço de Banach separável possui a c_0-EP.*
- *O espaço ℓ_∞ não possui a c_0-EP.*

Questão

Existe um espaço de Banach não separável que possui a c_0-EP?

Resposta: Sim. Todo espaço de Hilbert possui a c_0-EP.

Definição

Dizemos que um espaço de Banach é **weakly compactly generated** *(WCG) se ele possui um subconjunto fracamente compacto e linearmente denso.*

Definição

Dizemos que um espaço de Banach é **weakly compactly generated** *(WCG) se ele possui um subconjunto fracamente compacto e linearmente denso.*

Proposição

- *Todo espaço de Banach separável é WCG.*

Classes de espaços de Banach que generalizam os separáveis

Definição

Dizemos que um espaço de Banach é **weakly compactly generated** *(WCG) se ele possui um subconjunto fracamente compacto e linearmente denso.*

Proposição

- *Todo espaço de Banach separável é WCG.*
- *Todo espaço reflexivo é WCG.*

Definição

Dizemos que um espaço de Banach é **weakly compactly generated** *(WCG) se ele possui um subconjunto fracamente compacto e linearmente denso.*

Proposição

- *Todo espaço de Banach separável é WCG.*
- *Todo espaço reflexivo é WCG.*
- $c_0(I)$ *é WCG, para todo conjunto* I.

Definição

Dizemos que um espaço de Banach é **weakly compactly generated** *(WCG) se ele possui um subconjunto fracamente compacto e linearmente denso.*

Proposição

- *Todo espaço de Banach separável é WCG.*
- *Todo espaço reflexivo é WCG.*
- $c_0(I)$ *é WCG, para todo conjunto* I.

Teorema

Todo espaço de Banach WCG possui a c_0*-EP.*

Definição

Um espaço de Banach X é dito **weakly Lindelöf determined (WLD)** *se (B_{X^*}, w^*) é um compacto de Corson.*

Definição

Um espaço de Banach X é dito **weakly Lindelöf determined** *(WLD) se (B_{X^*}, w^*) é um compacto de Corson.*

Definição

Dizemos que K é um **compacto de Corson** *se ele é homeomorfo a um subespaço compacto de*

$$\Sigma(I) = \{f \in R^I : supp(f) \text{ é enumerável}\}.$$

Definição

Um espaço de Banach X é dito **weakly Lindelöf determined** *(WLD) se (B_{X^*}, w^*) é um compacto de Corson.*

Definição

Dizemos que K é um **compacto de Corson** *se ele é homeomorfo a um subespaço compacto de*

$$\Sigma(I) = \{f \in R^I : supp(f) \text{ é enumerável}\}.$$

Proposição

Todo compacto métrico é um compacto de Corson, mas existem compactos de Corson que não são métricos.

Proposição

Todo espaço de Banach WCG é WLD.

Proposição

Todo espaço de Banach WCG é WLD.

Teorema (Claudia–2019)

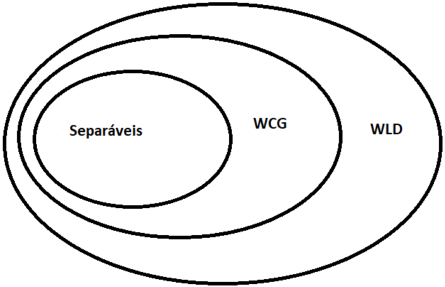
Se X é um espaço de Banach WLD, então X possui a c_0-EP.

Proposição

Todo espaço de Banach WCG é WLD.

Teorema (Claudia–2019)

Se X é um espaço de Banach WLD, então X possui a c_0-EP.



Proposição (Claudia e Daniel–2014)

O espaço $C[0, \omega_1]$ possui a c_0-EP.

Proposição (Claudia e Daniel–2014)

O espaço $C[0, \omega_1]$ *possui a* c_0*-EP.*

Questão

O espaço $C[0, \omega_1]$ *é WLD?*

Proposição (Claudia e Daniel–2014)

O espaço $C[0,\omega_1]$ possui a c_0-EP.

Questão

O espaço $C[0,\omega_1]$ é WLD?

Resposta: Não.

Indo além dos WLD

Proposição (Claudia e Daniel–2014)

O espaço $C[0,\omega_1]$ possui a c_0-EP.

Questão

O espaço $C[0,\omega_1]$ é WLD?

Resposta: Não.

Questão

O que o espaço $C[0,\omega_1]$ tem em comum com os espaços WLD?

Proposição (Claudia e Daniel–2014)

O espaço $C[0,\omega_1]$ *possui a* c_0*-EP.*

Questão

O espaço $C[0,\omega_1]$ *é WLD?*

Resposta: Não.

Questão

O que o espaço $C[0,\omega_1]$ *tem em comum com os espaços WLD?*

Resposta: Se $X = C[0,\omega_1]$ ou X é WLD, então (B_{X^*}, w^*) é monolítica.

Definição

Dizemos que um espaço compacto Hausdorff K é **monolítico** *se todo subespaço fechado e separável de K é metrizável.*

Definição

Dizemos que um espaço compacto Hausdorff K é **monolítico** *se todo subespaço fechado e separável de K é metrizável.*

Proposição

- *Todo compacto de Corson é monolítico.*

Definição

Dizemos que um espaço compacto Hausdorff K é **monolítico** *se todo subespaço fechado e separável de K é metrizável.*

Proposição

- *Todo compacto de Corson é monolítico.*
- *(Claudia–2019) Se $X = C[0, \omega_1]$, então (B_{X^*}, w^*) é monolítica.*

Definição

Dizemos que um espaço compacto Hausdorff K é **monolítico** *se todo subespaço fechado e separável de K é metrizável.*

Proposição

- *Todo compacto de Corson é monolítico.*
- *(Claudia–2019) Se $X = C[0, \omega_1]$, então (B_{X^*}, w^*) é monolítica.*

Questão

Seja X um espaço de Banach. Se (B_{X^*}, w^*) é monolítica, então X possui a c_0-EP?

Definição

Dizemos que um espaço compacto Hausdorff K é **monolítico** *se todo subespaço fechado e separável de K é metrizável.*

Proposição

- *Todo compacto de Corson é monolítico.*
- *(Claudia–2019) Se $X = C[0, \omega_1]$, então (B_{X^*}, w^*) é monolítica.*

Questão

Seja X um espaço de Banach. Se (B_{X^*}, w^*) é monolítica, então X possui a c_0-EP?

Resposta: Sim.

Teorema (Claudia–2019)

Seja X um espaço de Banach. Se (B_{X^*}, w^*) é monolítica, então X possui a c_0-EP.

Definição

Dado um espaço compacto Hausdorff K, denotamos por $C(K)$ o espaço das funções contínuas definidas em K e tomando valores em $\mathbb{R}$, munido da norma do supremo.

Definição

Dado um espaço compacto Hausdorff K, denotamos por $C(K)$ o espaço das funções contínuas definidas em K e tomando valores em $\mathbb{R}$, munido da norma do supremo.

Proposição

Seja K um espaço compacto e Hausdorff. O espaço $C(K)$ é separável se, e somente se, K é metrizável.

Definição

Dado um espaço compacto Hausdorff K, denotamos por $C(K)$ o espaço das funções contínuas definidas em K e tomando valores em $\mathbb{R}$, munido da norma do supremo.

Proposição

Seja K um espaço compacto e Hausdorff. O espaço $C(K)$ é separável se, e somente se, K é metrizável.

Corolário (do Teorema de Sobczyk)

Se K é um espaço compacto métrico, então $C(K)$ possui a c_0-EP.

Questão

Se K é um compacto de Corson, então $C(K)$ possui a c_0-EP?

Questão

Se K é um compacto de Corson, então $C(K)$ possui a c_0-EP?

Teorema (Claudia–2019)

1. *Assuma CH. Existe um compacto de Corson K tal que $C(K)$ não possui a c_0-EP.*

Questão

Se K é um compacto de Corson, então $C(K)$ possui a c_0-EP?

Teorema (Claudia–2019)

1. *Assuma CH. Existe um compacto de Corson K tal que $C(K)$ não possui a c_0-EP.*
2. *Assuma $MA + \neg CH$. Se K é um compacto de Corson, então $C(K)$ possui a c_0-EP.*

Obrigada!

Bibliography I

C. Correa and D. V. Tausk.
On extensions of c_0-valued operators.
J. Math. Anal. Appl., 405 (2):400–408, 2013.

C. Correa and D. V. Tausk.
Compact lines and the sobczyk property.
J. Func. Anal., 266 (9):5765–5778, 2014.

R. S. Phillips.
On linear transformations.
Trans. Amer. Math. Soc., 48:516–541, 1940.

A. Sobczyk.
Projection of the space (m) on its subspace (c_0).
Bull. Amer. Math. Soc., 47:938–947, 1941.