A propriedade da c_0-extensão para retas compactas

Claudia Correa de Andrade Oliveira

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
MATEMÁTICA

Programa: **Matemática**
Área de Concentração: **Análise Funcional**
Orientador: **Prof. Dr. Daniel Victor Tausk**

Durante a elaboração deste trabalho a autora recebeu apoio financeiro da FAPESP

– São Paulo, agosto de 2014 –

A propriedade da c_0-extensão para retas compactas

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Claudia Correa de Andrade Oliveira e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, agosto de 2014.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Daniel Victor Tausk	IME - USP
Prof. Dr. Valentin Ferenczi	IME - USP
Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui	IMECC - UNICAMP
Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino	UFPB
Prof. Dr. Jorge Lopez-Abad	ICMAT - Madrid

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao meu orientador Prof. Daniel Victor Tausk por ter dividido comigo sua paixão pela matemática. Também agradeço por ele ser tão brilhante e por ser o melhor amigo do mundo inteiro. Agradeço a meus amigos Adriano Contini Torres e Guilherme Nascimben Santos por estarem sempre comigo e me apoiarem nos momentos mais difíceis. Agradeço ao meu amigo Bruno Peaudecerf por todos os dias que passamos juntos. Finalmente, agradeço a todos aqueles que não me atrapalharam, pois muito ajuda quem pouco atrapalha.

Resumo

No presente trabalho, estudamos a propriedade da c_0-extensão no contexto de espaços de funções contínuas definidas numa reta compacta e tomando valores em $\mathbb{R}$. Nosso principal resultado é que se K é uma reta compacta, então todo subespaço fechado e com dual separável de $C(K)$ possui a propriedade da c_0-extensão em $C(K)$ e portanto, o espaço $C(K)$ tem a propriedade de Sobczyk. Também apresentamos uma caracterização das funções $\phi : K \to L$ contínuas, crescentes e sobrejetoras entre retas compactas para as quais a subálgebra de Banach $\phi^*C(L)$ possui a propriedade da c_0-extensão em $C(K)$.

Abstract

In this work, we study the c_0-extension property in the context of spaces of continuous real-valued functions defined in a compact line. Our main result states that if K is a compact line, then every closed subspace of $C(K)$ with separable dual has the c_0-extension property in $C(K)$ and therefore, the space $C(K)$ has the Sobczyk property. We also present a characterization of the continuous order-preserving surjective maps $\phi : K \to L$ between compact lines such that the Banach subalgebra $\phi^*C(L)$ has the c_0-extension property in $C(K)$.

Sumário

Introdução

No presente trabalho, estudamos a propriedade da c_0-extensão no contexto de espaços de Banach da forma $C(K)$, onde K é uma reta compacta. Por uma *reta compacta* entende-se um conjunto totalmente ordenado que é compacto, se munido da topologia da ordem. Propriedades topológicas das retas compactas e propriedades estruturais de seus espaços de funções contínuas foram recentemente estudadas numa série de artigos ([**4**], [**6**], [**7**], [**13**], [**14**] e [**18**]). Como veremos a seguir, a propriedade da c_0-extensão surge naturalmente quando se estuda o problema da extensão de operadores limitados entre espaços de Banach. O mais famoso teorema sobre extensão de operadores limitados é o Teorema de Hahn–Banach. Esse teorema garante que todo funcional limitado definido num subespaço de um espaço normado admite uma extensão limitada ao espaço todo. Dessa forma, segue do Teorema de Hahn–Banach que o problema da extensão de operadores limitados está completamente resolvido no caso em que o contradomínio tem dimensão finita. No entanto, assim como na maioria dos fenômenos da teoria de espaços de Banach, o problema da extensão de operadores é mais interessante em dimensão infinita e vai muito além do Teorema de Hahn–Banach. Note que uma generalização bastante natural dos espaços vetoriais de dimensão finita é o espaço l_∞ da sequências limitadas de números reais, munido da norma do supremo. Facilmente mostra-se que dado um espaço de Banach, os operadores limitados definidos nesse espaço e tomando valores em l_∞ estão em bijeção com as sequências limitadas no dual desse espaço. Dessa identificação e do Teorema de Hahn–Banach segue que se X é um espaço de Banach e Y é um subespaço fechado de X, então todo operador limitado definido em Y e tomando valores em l_∞ admite uma extensão limitada a X. Nesse ponto, o leitor pode se perguntar o que acontece se trocarmos l_∞ por seu famoso subespaço c_0 das sequências de números reais que tendem a zero. Bem, no momento em que olhamos para o problema da extensão de operadores tomando valores em c_0, a rigidez que ocorre com os espaços de dimensão finita e com o l_∞ é quebrada. Por exemplo, o operador identidade do espaço c_0 não admite uma extensão limitada a l_∞ ([**25**]). Nesse contexto, o celebrado Teorema de Sobczyk ([**30**]) desempenha um papel central. Esse teorema garante que se um espaço de Banach X é separável, então todo operador limitado definido num subespaço fechado de X e tomando valores em c_0 admite uma extensão limitada a X. Na verdade, uma adaptação simples da prova de Veech ([**33**]) do Teorema de Sobczyk garante que dados um espaço de Banach X e um subespaço fechado Y de X, uma condição suficiente para que todo operador limitado definido em Y e tomando valores em c_0 possua uma extensão limitada a X é que o quociente X/Y seja separável ([**6**, Proposition 2.2 (a)]). Assim, com o desejo de estudar generalizações do Teorema de Sobczyk para pares de espaços de Banach (X, Y), onde Y é um subespaço de X, no artigo ([**6**]), introduzimos a propriedade da c_0-extensão. Dado um espaço de Banach X e um subespaço fechado Y de X, dizemos que Y possui a *propriedade da c_0-extensão* (abreviadamente c_0EP) em X se, e somente se, todo operador limitado $T : Y \to c_0$ admite uma extensão limitada definida em X e tomando valores em c_0. Se todo subespaço (resp., separável) de X tiver a c_0EP em X, então dizemos que X possui a c_0EP (resp., separável). Dessa forma, o Teorema de Sobczyk implica que todo espaço de Banach separável tem a c_0EP. Além disso, usando o fato que se o quociente X/Y é separável, então Y tem a c_0EP em X, concluímos que todo espaço de Banach WCG possui a c_0EP ([**6**, Proposition 2.2 (b)]). Recorde que um espaço de Banach X é dito *weakly compactly generated* (abreviadamente WCG) se, e somente se, existe um subconjunto fracamente compacto de X cujo subespaço gerado é denso em X.

Com o objetivo de contextualizar os resultados que nós obtivemos e que serão apresentados nesse trabalho, faremos a seguir, uma breve discussão sobre os resultados já conhecidos sobre a propriedade da c_0-extensão no contexto de espaços de Banach da forma $C(K)$. Aqui, como sempre, $C(K)$ denota o espaço das funções contínuas definidas num compacto Hausdorff K e tomando valores em $\mathbb{R}$, munido da norma do supremo. Note que o resultado mencionado acima garante que se K é um compacto de Eberlein, então $C(K)$ tem a c_0EP, já que o espaço $C(K)$ é WCG se, e somente se, K é um compacto de Eberlein ([**10**, Theorem 14.9]). Dizemos que um espaço topológico é um *compacto de Eberlein* se, e somente se, ele é homeomorfo a um subconjunto fracamente compacto de um espaço de Banach, munido da topologia fraca. Uma outra classe de espaços de Banach que possuem a c_0EP separável como uma consequência direta do Teorema de Sobczyk é a classe dos espaços que possuem a SCP. Dado um espaço de Banach X, dizemos que X tem a *separable complementation property* (abreviadamente SCP) se, e somente se, todo subespaço fechado e separável de X está contido num subespaço fechado, separável e complementado de X. Em ([**32**, Lemma, p. 494]), foi mostrado que se K é um compacto de Valdivia, então o espaço $C(K)$ tem a SCP e portanto, a c_0EP separável. Lembramos que um espaço compacto Hausdorff é dito um *compacto de Valdivia* se, e somente se, existem um conjunto I e uma família de funções contínuas $(f_i)_{i\in I}$ definidas em K a valores reais que separa pontos de K e tal que o conjunto:

$$\big\{p \in K : \{i \in I : f_i(p) \neq 0\} \text{ é enumerável}\big\}$$

é denso em K. Além disso, note que do fato da c_0EP separável ser uma propriedade hereditária para subespaços fechados segue que se K é uma imagem contínua de um compacto de Valdivia, então $C(K)$ possui a c_0EP separável, embora a classe dos compactos de Valdivia não seja fechada por imagens contínuas ([**31**]). Em ([**6**]), nós mostramos que se K é um compacto $\aleph_0$-monolítico, então o seu espaço de funções contínuas possui a c_0EP separável ([**6**, Corolary 2.7]). Recorde que dizemos que um espaço compacto Hausdorff K é $\aleph_0$-*monolítico* se, e somente se, todo subespaço separável de K possui uma base enumerável de abertos. Finalmente, em ([**4**]), nós caracterizamos as retas compactas cujos espaços de funções contínuas possuem a c_0EP e a c_0EP separável. Surpreendentemente, as únicas retas compactas cujos espaços de funções contínuas possuem a c_0EP separável são as $\aleph_0$-monolíticas e além disso, se K é uma reta compacta, então a c_0EP separável e a c_0EP são propriedades equivalentes para o espaço $C(K)$ ([**4**, Theorem 2.2]).

Note que se X é um espaço de Banach com a c_0EP separável, então toda cópia isomorfa de c_0 em X é complementada. Em particular, temos que o Teorema de Sobczyk implica que toda cópia isomorfa de c_0 num espaço de Banach separável é complementada. Dessa forma, uma outra maneira de generalizarmos o Teorema de Sobczyk é obter resultados sobre a complementação de cópias isomorfas de c_0 em espaços de Banach não separáveis. Dado um espaço de Banach X, dizemos que X possui a *propriedade de Sobczyk* se, e somente se, toda cópia isomorfa de c_0 em X é complementada. O problema da caracterização dos espaços de Banach que possuem a propriedade de Sobczyk é um problema clássico na teoria dos espaços de Banach, sendo que sua restrição á classe dos espaços de Banach da forma $C(K)$ foi colocada em ([**2**, Remark 2]). É interessante observar que a maioria das provas encontradas na literatura de que uma classe de espaços de Banach possui a propriedade de Sobczyk é na verdade, uma prova de que esses espaços possuem a c_0EP ou a c_0EP separável. Assim, quando iniciamos nossa pesquisa sobre a propriedade de Sobczyk para os espaços de funções contínuas definidas numa reta compacta e tomando valores em $\mathbb{R}$, nossa primeira idéia foi tentar estabeler a c_0EP ou a c_0EP separável para esses espaços. No entanto, rapidamente percebemos que o espaço double-arrow era uma reta compacta cujo espaço de funções contínuas não tinha a c_0EP separável e no entanto, não éramos capazes de mostrar que esse espaço não tinha a propriedade de Sobczyk. Recorde que o *espaço double arrow* é definido como sendo o conjunto $\mathrm{DA} = [0,1] \times \{0,1\}$, munido da ordem lexicográfica e da topologia da ordem. Em ([**23**]), Patterson mostrou que toda cópia isométrica de c_0 em $C(\mathrm{DA})$ é complementada. O argumento de Patterson, pode ser facilmente adaptado para mostrar que se K é uma reta compacta, então toda cópia isométrica de c_0 em $C(K)$ é complementada (o ponto central nesse argumento é o fato que toda reta compacta possui a propriedade do extensor). No entanto, como observado por Godefroy em ([**11**]), Patterson não deu nenhum exemplo de uma cópia isomorfa de c_0

não complementada em $C(\mathrm{DA})$. Como veremos no Capítulo 4, embora o espaço de funções contínuas de uma reta compacta possua a c_0EP separável se, e somente se, essa reta é $\aleph_0$-monolítica, em ([**4**, Corollary 2.5]), nós mostramos que o espaço de função contínuas de toda reta compacta possui a propriedade de Sobczyk. Esse resultado é uma consequência imediata de ([**4**, Theorem 2.4]), que garante que se K é uma reta compacta, então todo subespaço fechado e com dual separável X de $C(K)$ tem a c_0EP em $C(K)$. Observamos que a hipótese do espaço dual de X ser separável é fundamental na prova de ([**4**, Theorem 2.4]), pois essa hipótese garante que X é um espaço de Banach fraca*-fragmentável. A apresentação da prova de [**4**, Theorem 2.4] é o principal objetivo do presente trabalho e é feita na Seção 4.2. Note que esse resultado generaliza ([**6**, Theorem 3.1]), já que uma subálgebra de Banach $\phi^*C(L)$ de $C(K)$ tem dual separável se, e somente se, o espaço compacto L é enumerável.

No Capítulo 3, apresentamos alguns resultados sobre a c_0EP para as subálgebras de Banach com unidade do espaço de funções contínuas de uma reta compacta. Como usual, estamos considerando a estrutura de álgebra de Banach que o espaço $C(K)$ possui, se também estiver munido da multiplicação de funções ponto a ponto. Segue do Teorema de Stone–Weierstrass que se K é um espaço compacto Hausdorff, então toda subálgebra de Banach com unidade de $C(K)$ é da forma $\phi^*C(L)$, para algum espaço compacto Hausdorff L e uma função contínua e sobrejetora $\phi : K \to L$. Dada uma função contínua e sobrejetora $\phi : K \to L$ entre compactos Hausdorff, denotamos o *operador de composição* de ϕ por $\phi^* : C(L) \to C(K)$ e esse operador é definido como $\phi^* f = f \circ \phi$, para toda $f \in C(L)$. É fácil ver que a complementação da subálgebra $\phi^*C(L)$ em $C(K)$ é equivalente à existência de um *averaging operator* T para a função ϕ, i.e., $T : C(K) \to C(L)$ é um operador limitado e é uma inversa à esquerda de ϕ^*. Dessa forma, a busca por condições sobre a ϕ que garantam que ela possui um averaging operator é um problema clássico na teoria de espaços de Banach ([**1**], [**8**] e [**24**]). Com esse espírito, em ([**7**, Theorem 2.6]), estabelecemos uma caracterização das funções ϕ para as quais a subálgebra $\phi^*C(L)$ tem a c_0EP em $C(K)$, no caso em que K e L são retas compactas e $\phi : K \to L$ é uma função contínua, crescente e sobrejetora. É interessante observar que nossa caracterização tem pontos em comum com a caracterização, dada em ([**13**, Lemma 2.7]), das funções $\phi : K \to L$ contínuas, crescentes e sobrejetoras entre retas compactas K e L para as quais a subálgebra $\phi^*C(L)$ é complementada em $C(K)$. Mais precisamente, as duas caracterizações envolvem a estrutura de ordem de L e o conjunto $Q(\phi)$ dos pontos de L que possuem pré-imagens (pela ϕ) com mais de um elemento. Ainda no Capítulo 3, apresentamos um critério para a extensão a $C(K)$ dos operadores limitados definidos na subálgebra $\phi^*C(L)$ e tomando valores em c_0 ([**7**, Proposition 2.5]). Note que esse critério de extensão é uma generalização de ([**6**, Lemma 3.2]). Na última seção do Capítulo 3, discutimos algumas questões que surgem diante da caracterização obtida em ([**7**, Theorem 2.6]), no caso em que a reta compacta L é separável. Surpreendentemente, concluímos que uma dessas questões é independente dos axiomas de ZFC.

O presente trabalho se divide em 4 capítulos e 3 apêndices. No Capítulo 1, introduzimos o conceito da propriedade da c_0-extensão e estabelecemos algumas condições suficientes para que um subespaço fechado de um espaço de Banach X tenha a c_0EP em X, no caso de espaços de Banach em geral e também na classe dos espaços de Banach da forma $C(K)$. No Capítulo 2, desenvolvemos toda a teoria sobre as retas compactas que será necessária nos demais capítulos, tanto do ponto de vista de propriedades topológicas das retas compactas como de propriedades estruturais dos seus espaços de funções contínuas e dos duais desses espaços. Como dito acima, o Capítulo 3 é dedicado à apresentação dos resultados que obtivemos em ([**7**]) sobre a c_0EP para as subálgebras de Banach dos espaços de funções contínuas das retas compactas e no Capítulo 4, apresentamos os resultados obtidos em ([**4**]) sobre a caracterização das retas compactas cujos espaços de funções contínuas possuem a c_0EP e sobre a propriedade de Sobczyk para esses espaços. No Apêndice A, discutimos a relação entre as subálgebras de Banach com unidade de $C(K)$ e os quocientes de K, onde K é um espaço compacto Hausdorff arbitrário. No Apêndice B, apresentamos alguns resultados sobre a classe dos compactos de Eberlein. Finalmente, no Apêndice C fazemos uma pequena discussão sobre o Axioma de Martin, que é usado no Capítulo 3, para estabelecermos que uma determinada questão sobre a c_0EP é independente dos axiomas de ZFC.

Ao longo desse trabalho, não apresentaremos as demonstrações de muitos resultados básicos, pois os consideramos pré-requisitos para a leitura desse texto. Dessa forma, julgamos conveniente indicar ao leitor alguma bibliografia. Para os resultados básicos sobre espaços de Banach, sugerimos [**9**] e [**10**]. Para tópicos de teoria da medida, sugerimos [**28**]. Para resultados de topologia geral, sugerimos [**34**] e finalmente, para tópicos de teoria de conjuntos, recomendamos [**19**].

CAPÍTULO 1

A propriedade da c_0-extensão

O objetivo desse capítulo é introduzir a propriedade da c_0-extensão e provar alguns resultados básicos sobre essa propriedade. Na Seção 1.2, estabelecemos alguns resultados gerais sobre a propriedade da c_0-extensão no contexto de espaços de Banach da forma $C(K)$.

1.1. Definições e resultados iniciais

Iniciamos essa seção, motivando a definição da propriedade da c_0-extensão. Para isso, precisamos entender melhor os operadores limitados definidos num espaço de Banach e tomando valores em l_∞ e em c_0. Por um *operador* entre espaços de Banach, entendemos uma tranformação linear entre esses espaços. Dados espaços de Banach X_1 e X_2, denotamos por $\mathcal{B}(X_1, X_2)$ o espaço de Banach dos operadores limitados de X_1 em X_2, munido da norma usual de operadores. Fixado um espaço de Banach X, considere um operador T em $\mathcal{B}(X, l_\infty)$. Se $\pi_n : l_\infty \to \mathbb{R}$ denota a projeção na n-ésima coordenada, então a sequência $(\pi_n \circ T)_{n\geq 1}$ é uma sequência limitada em X^*. Reciprocamente, dada uma sequência limitada $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ em X^*, o operador definido como:

$$X \ni x \mapsto \big(\alpha_n(x)\big)_{n\geq 1} \in l_\infty \tag{1.1.1}$$

pertence a $\mathcal{B}(X, l_\infty)$. Dado T em $\mathcal{B}(X, l_\infty)$, dizemos que $(\pi_n \circ T)_{n\geq 1}$ é a *sequência associada a T*. Analogamente, dada uma sequência $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ limitada em X^*, dizemos que o operador definido por (1.1.1) é o *operador associado a $(\alpha_n)_{n\geq 1}$*. Na verdade, é fácil ver que a função que a cada operador T em $\mathcal{B}(X, l_\infty)$ associa a sequência $(\pi_n \circ T)_{n\geq 1}$ é uma isometria linear entre $\mathcal{B}(X, l_\infty)$ e o espaço das sequências limitadas em X^*, munido da seguinte norma:

$$\|(\alpha_n)_{n\geq 1}\| = \sup_{n\geq 1} \|\alpha_n\|,$$

para toda sequência limitada $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ em X^*. Além disso, é claro que essa isometria leva $\mathcal{B}(X, c_0)$ no subespaço das sequências fraca*-nulas em X^*. Dizemos que uma sequência $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ de elementos de X^* é *fraca*-nula* se, e somente se, ela converge a zero na topologia fraca* de X^*. Dessa identificação dos operadores limitados de um espaço de Banach em l_∞ segue facilmente o seguinte resultado.

PROPOSIÇÃO 1.1.1. *Sejam X um espaço de Banach e Y um subespaço fechado de X. Se $T : Y \to l_\infty$ é um operador limitado, então existe uma extensão $T' : X \to l_\infty$ de T tal que $\|T'\| = \|T\|$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ a sequência limitada em Y^* associada a T. Fixado $n \geq 1$, o Teorema de Hahn–Banach ([**9**, Theorem 2.4]) garante que existe $\alpha'_n \in X^*$ que estende α_n e tal que $\|\alpha'_n\| = \|\alpha_n\|$. Finalmente, tome $T' : X \to l_\infty$ como sendo o operador associado à sequência limitada $(\alpha'_n)_{n\geq 1}$. □

Fixado um espaço de Banach X, um subespaço fechado Y de X e um funcional α de Y^*, dizemos que um elemento α' de X^* é uma *extensão de Hahn–Banach de* α se, e somente se, α' estende α e $\|\alpha'\| = \|\alpha\|$. Analogamente, se T pertence a $\mathcal{B}(Y, l_\infty)$, então dizemos que um operador S de $\mathcal{B}(X, l_\infty)$ é uma *extensão de Hahn–Banach de* T se, e somente se, S estende T e $\|S\| = \|T\|$. Dessa forma, a Proposição 1.1.1 garante que todo operador limitado definido num subespaço fechado de um espaço de Banach e tomando valores em l_∞ admite uma extensão de Hahn–Banach.

Agora, o que acontece se trocarmos o espaço l_∞ por c_0? Como dito anteriormente, fixado um espaço de Banach X, os operadores limitados de X em c_0 estão em bijeção com as sequências fraca*-nulas em X^*. Note que se Y é um subespaço fechado do espaço de Banach X e $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência fraca*-nula em Y^*, então a sequência $(\alpha'_n)_{n\geq 1}$ não é necessariamente fraca*-nula, onde cada α'_n é uma extensão de Hahn–Banach de α_n. No entanto, alguém poderia se perguntar se é possível modificar uma sequência de extensões de Hanh–Banach de $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ de forma que a nova sequência continue estendendo $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ e seja fraca*-nula. A Proposição 1.1.3 mostra que isso não é possível em geral. Nesse trabalho, denotaremos o conjunto dos números naturais e o primeiro cardinal infinito por ω, a cardinalidade do contínuo por 2^ω e o n-ésimo cardinal não enumerável por ω_n. Além disso, se M é um conjunto, então denotaremos por $|M|$ a cardinalidade de M. Para provar a Proposição 1.1.3, precisamos do Lema 1.1.2 abaixo.

LEMA 1.1.2. *Existe uma família $\{N_i : i \in 2^\omega\}$ de subconjuntos infinitos dos naturais tal que se $i \neq j$, então $N_i \cap N_j$ é finito.*

DEMONSTRAÇÃO. Escreva o conjunto dos números irracionais de $\mathbb{R}$ como $\{u_i : i \in 2^\omega\}$. Para cada $i \in 2^\omega$, considere uma sequência $(x^i_n)_{n\geq 1}$ de números racionais que converge para u_i. Agora, tome $\Phi : \mathbb{Q} \to \omega$ uma bijeção, onde $\mathbb{Q}$ denota o conjunto de todos os números racionais de $\mathbb{R}$, e note que a conclusão segue se definirmos N_i como sendo o conjunto $\Phi\big[\{x^i_n : n \geq 1\}\big]$, para cada $i \in 2^\omega$. □

Dados um espaço de Banach X e um subconjunto S de X, denotamos por *spanS* o subespaço vetorial de X gerado por S e por $\overline{span}S$ o fecho na topologia da norma do *spanS*. Dizemos que S é *linearmente denso* em X se, e somente se, o *spanS* é denso em X. Um subespaço Y de X é dito *complementado* em X se, e somente se, existe uma *projeção limitada* de X

em Y, ou seja, existe um operador limitado $P : X \to Y$ tal que $P|_Y$ é a identidade. Equivalentemente, temos que Y é um subespaço complementado de X se, e somente se, Y é fechado e existe um subespaço fechado Z de X tal que $X = Y \oplus Z$. Dado um conjunto I, denotamos por $c_0(I)$ o espaço das funções $f : I \to \mathbb{R}$ tais que para todo $\varepsilon > 0$, o conjunto $\{i \in I : |f(i)| \geq \varepsilon\}$ é finito, munido da norma do supremo e por $l_1(I)$ o espaço das funções $f : I \to \mathbb{R}$ tais que a soma $\sum_{i\in I} |f(i)|$ é finita, munido da norma l_1, ou seja, $\|f\| = \sum_{i\in I} |f(i)|$, para toda $f \in l_1(I)$.

PROPOSIÇÃO 1.1.3. *O operador identidade do espaço c_0 não admite uma extensão limitada a l_∞. Equivalentemente, c_0 não é complementado em l_∞.*

DEMONSTRAÇÃO. Note que a conclusão segue se mostrarmos que l_∞ não contém cópias isomorfas do espaço de Banach l_∞/c_0. Para isso, vamos provar que o espaço l_∞/c_0 contém uma cópia isomorfa de $c_0(2^\omega)$ e que não existe um operador limitado e injetor de $c_0(2^\omega)$ em l_∞. Inicialmente, vamos mostrar que não existe um operador limitado e injetor de $c_0(2^\omega)$ em l_∞. Suponha, por absurdo, que $T : c_0(2^\omega) \to l_\infty$ seja um operador limitado e injetor. Seja $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ a sequência limitada em $l_1(2^\omega)$ associada a T. Note que, fixado $n \geq 1$, o conjunto $E_n = \{i \in 2^\omega : \alpha_n(i) \neq 0\}$ é enumerável e portanto, existe um elemento não nulo $f \in c_0(2^\omega)$ tal que $f|_{\bigcup_{n\geq 1} E_n} \equiv 0$. Dessa forma, vale que $T(f) = 0$, o que contradiz a injetividade de T. Agora, vamos mostrar que l_∞/c_0 possui uma cópia isomorfa de $c_0(2^\omega)$. Na verdade, vamos construir uma cópia isométrica de $c_0(2^\omega)$ em l_∞/c_0. Para cada $i \in 2^\omega$, denote por $F_i \in l_\infty$ a função característica do conjunto N_i construído no Lema 1.1.2. Vejamos que o subespaço:

$$\overline{span}\{F_i + c_0 : i \in 2^\omega\} \ \subset l_\infty/c_0$$

é isométrico a $c_0(2^\omega)$. Fixado $i \in 2^\omega$, denote por e_i o elemento de $c_0(2^\omega)$ que satisfaz $e_i(j) = \delta_{ij}$, para todo $j \in 2^\omega$, onde $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ caso contrário. Defina $T : span\{e_i : i \in 2^\omega\} \longrightarrow \overline{span}\{F_i + c_0 : i \in 2^\omega\}$ como a única transformação linear satisfazendo $T(e_i) = F_i + c_0$, para todo $i \in 2^\omega$. Afirmamos que dados $n \geq 1$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ e $i_1, \ldots, i_n \in 2^\omega$, vale que:

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k F_{i_k} + c_0) \Big\| = \sup_{k=1,\ldots,n} |\lambda_k|. \tag{1.1.2}$$

Para mostrar que vale a igualdade (1.1.2), inicialmente observe que existe uma coleção de subconjuntos infinitos e dois a dois disjuntos dos naturais $\{M_k : k = 1, \ldots, n\}$ tal que se G_k denota a função característica de M_k, então $G_k + c_0 = F_{i_k} + c_0$, para todo k. Logo, o vetor $\sum_{k=1}^n \lambda_k G_k$ pertence á classe de equivalência de $\sum_{k=1}^n \lambda_k F_{i_k}$ e portanto, segue diretamente da definição da norma de l_∞/c_0 que:

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k F_{i_k} + c_0) \Big\| \leq \sup_{k=1,\ldots,n} |\lambda_k|. \tag{1.1.3}$$

Suponha, por absurdo, que a desigualdade (1.1.3) seja estrita. Isso implica que existe uma função F em l_∞ tal que $F - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k G_k$ pertence a c_0 e $\|F\| < \sup_{k=1,\dots,n} |\lambda_k|$. Seja k_0 um elemento do conjunto $\{1, \dots, n\}$ tal que $|\lambda_{k_0}| = \sup_{k=1,\dots,n} |\lambda|$ e note que a sequência $\big(F(m) - \lambda_{k_0}\big)_{m \in M_{k_0}}$ é uma subsequência de $F - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k G_k$ e portanto, pertence a c_0. Considere um número real positivo ε satisfazendo $\varepsilon < |\lambda_{k_0}| - \|F\|$. Do fato da sequência $\big(F(m) - \lambda_{k_0}\big)_{m \in M_{k_0}}$ convergir para zero, segue que existe $m \in M_{k_0}$ tal que:

$$|\lambda_{k_0} - F(m)| < \varepsilon.$$

Usando a desigualdade acima e a definição de λ_{k_0}, ficamos com:

$$\varepsilon < |\lambda_{k_0}| - \|F\| \leq |\lambda_{k_0}| - |F(m)| \leq |\lambda_{k_0} - F(m)| < \varepsilon.$$

Assim, essa contradição mostra que vale a igualdade em (1.1.3). Note que (1.1.2) implica que T é uma imersão isométrica. Portanto, existe uma única extensão limitada T' de T a $c_0(2^\omega)$([**17**, Theorem 2.7–11]). Além disso, temos que T' também é uma imersão isométrica, já que T' é uma extensão limitada de T e a igualdade (1.1.2) garante que $\|Tx\| = \|x\|$ num subconjunto denso de $c_0(2^\omega)$. Finalmente, é fácil ver que a imagem de T' é $\overline{span}\{F_i + c_0 : i \in 2^\omega\}$ e portanto, T' é uma isometria linear. $\square$

OBSERVAÇÃO 1.1.4. Dado um espaço de Banach E, dizemos que E é *injetivo* se, e somente se, todo operador limitado definido num subespaço fechado Y de um espaço de Banach X e tomando valores em E admite uma extensão limitada a X. Assim, a Proposição 1.1.1 nos diz que o espaço l_∞ é injetivo. Além disso, note que as Proposições 1.1.1 e 1.1.3 implicam que se E é um subespaço de l_∞ isomorfo a c_0, então E não é complementado em l_∞. De fato, se E fosse complementado em l_∞, então da Proposição 1.1.1 e do fato da propriedade da injetividade ser hereditária para subespaços complementados seguiria que E é um espaço de Banach injetivo e portanto, c_0 seria injetivo. Mas, isso contradiz a Proposição 1.1.3.

Diante da Proposição 1.1.3, a seguinte definição é natural.

DEFINIÇÃO 1.1.5. Dado um subespaço fechado Y de um espaço de Banach X, dizemos que Y possui a *propriedade da c_0-extensão* (abreviadamente c_0EP) em X se, e somente se, todo operador limitado definido em Y e tomando valores em c_0 admite uma extensão limitada a X. Se todo subespaço fechado (resp., separável) de X possuir a c_0EP em X, diremos que X possui a c_0EP (resp., separável).

Como sempre, é interessante ter algum controle sobre a norma da extensão de um operador. Na Proposição 1.1.7, veremos que se Y possui a c_0EP em X, então existe um número real λ tal que a norma da extensão a X de qualquer operador limitado $T : Y \to c_0$ é majorada por $\lambda\|T\|$.

DEFINIÇÃO 1.1.6. Sejam Y um subespaço fechado de um espaço de Banach X e $\lambda \geq 1$ um número real. Dizemos que Y possui a *propriedade da*

c_0-extensão com constante λ (abreviadamente λ-c_0EP) em X se todo operador limitado $T : Y \to c_0$ admite uma extensão limitada $T' : X \to c_0$ com $\|T'\| \leq \lambda\|T\|$.

PROPOSIÇÃO 1.1.7. *Sejam X um espaço de Banach e Y um subespaço fechado de X. Se Y possui a c_0EP em X, então existe $\lambda \geq 1$ tal que Y possui a λ-c_0EP em X.*

DEMONSTRAÇÃO. Note que se Y tem a c_0EP em X, então o operador de restrição $\mathfrak{r} : \mathcal{B}(X, c_0) \to \mathcal{B}(Y, c_0)$ é sobrejetor e portanto, induz um isomorfismo $\bar{\mathfrak{r}} : \mathcal{B}(X, c_0)/\operatorname{Ker}(\mathfrak{r}) \to \mathcal{B}(Y, c_0)$, onde $\operatorname{Ker}(\mathfrak{r})$ denota o núcleo de $\mathfrak{r}$. Tome $\lambda > \|\bar{\mathfrak{r}}^{-1}\|$ e note que Y tem a λ-c_0EP em X. $\square$

O Teorema clássico de Sobczyk ([**30**]) afirma que se X é um espaço de Banach separável, então todo subespaço fechado de X tem a 2-c_0EP em X. Na Proposição 1.1.13, apresentaremos uma generalização desse resultado, que é obtida através de uma adaptação simples da prova de Veech ([**33**]) do Teorema de Sobczyk. Na prova da Proposição 1.1.13, usaremos alguns lemas, que desenvolvemos a seguir. Ao longo desse trabalho, dado um espaço de Banach X, denotaremos por B_X a bola unitária fechada de X, denotaremos a topologia fraca* de X^* por w^* e a topologia fraca de X por w. Além disso, quando estivermos considerando mais de uma topologia num conjunto X, a fim de evitar confusões, denotaremos esse conjunto munido da topologia τ por (X, τ). Recorde que dado um conjunto $\mathcal{X}$, um espaço topológico $\mathcal{Y}$ e uma família de funções $f_i : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, a *topologia induzida por* $\{f_i : i \in I\}$ em $\mathcal{X}$ é definida como a menor topologia em $\mathcal{X}$ que faz com que cada f_i seja contínua. Note que dada uma rede $(x_\lambda)_\lambda$ de elementos de $\mathcal{X}$ e $x \in \mathcal{X}$, temos que $x_\lambda \longrightarrow x$ na topologia induzida por $\{f_i : i \in I\}$ se, e somente se, $\big(f_i(x_\lambda)\big)_\lambda$ converge para $f_i(x)$, para todo $i \in I$. Dessa forma, se X é um espaço de Banach e A é um subconjunto de X, então dizemos que a topologia induzida por $\{\hat{x} : x \in A\}$ em X^* é a *topologia da convergência nos pontos de* A, onde $\hat{x}$ denota o elemento de X^{**} definido como $\hat{x}(\alpha) = \alpha(x)$, para todo $\alpha \in X^*$.

LEMA 1.1.8. *Sejam K um espaço compacto e τ' uma topologia Hausdorff em K. Se a topologia original de K é mais fina que τ', então essas topologias coincidem.*

DEMONSTRAÇÃO. Denote por τ a topologia original de K e note que o fato de τ ser mais fina que τ' garante que a aplicação identidade

$$i : (K, \tau) \to (K, \tau') \tag{1.1.4}$$

é contínua. Além disso, temos que i é uma aplicação fechada, pois é uma função contínua entre um espaço compacto e um espaço Hausdorff. Portanto, a função i é um homeomorfismo, o que estabelece nosso resultado. $\square$

O Lema 1.1.9 caracteriza a convergência fraca* de redes limitadas no dual de um espaço de Banach.

LEMA 1.1.9. *Sejam X um espaço de Banach, D um subconjunto linearmente denso em X e $\alpha \in X^*$. Se $(\alpha_i)_{i\in I}$ é uma rede limitada em X^*, então $\alpha_i \xrightarrow{w^*} \alpha$ se, e somente se, $\alpha_i(x) \longrightarrow \alpha(x)$, para todo $x \in D$.*

DEMONSTRAÇÃO. A conclusão seguirá se mostrarmos que em B_{X^*}, a topologia τ_D da convergência nos pontos de D coincide com a topologia fraca*. Note que a topologia fraca* é mais fina que a topologia τ_D e que o fato de D ser linearmente denso em X implica que τ_D é uma topologia Hausdorff. Dessa forma, nosso resultado segue do Lema 1.1.8, já que (B_{X^*}, w^*) é um espaço compacto. $\square$

Nos dois próximos lemas, veremos o que acontece com a topologia induzida num espaço vetorial por uma família enumerável de funcionais lineares.

LEMA 1.1.10. *Sejam X um espaço vetorial real e $\{\alpha_n : n \geq 1\}$ uma sequência de funcionais lineares em X. Se τ é a topologia induzida em X pela sequência $\{\alpha_n : n \geq 1\}$, então existe uma pseudo-métrica d em X cuja topologia induzida coincide com τ. Além disso, d pode ser tomada invariante por translações e d é uma métrica se, e somente se, a topologia τ é Hausdorff.*

DEMONSTRAÇÃO. Basta considerar a seguinte pseudo-métrica em X:

$$d(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} |\alpha_n(x_1) - \alpha_n(x_2)|,$$

para todos $x_1, x_2 \in X$. $\square$

LEMA 1.1.11. *Sejam X um espaço de Banach e E um subconjunto enumerável de X. Existe uma pseudo-métrica invariante por translações que induz em X^* a topologia da convergência nos pontos de E.*

DEMONSTRAÇÃO. Aplique o Lema 1.1.10 para o espaço vetorial X^* e a sequência de funcionais lineares $\{\hat{x} : x \in E\} \subset X^{**}$. $\square$

LEMA 1.1.12. *Sejam K um espaço compacto Hausdorff, $f : K \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $(p_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de elementos de K. Se $f(p) = 0$, para todo valor de aderência p da sequência $(p_n)_{n\geq 1}$, então $f(p_n) \longrightarrow 0$.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponha, por absurdo, que $f(p_n) \not\longrightarrow 0$. Passando a uma subsequência, podemos supor que existe $\varepsilon > 0$ tal que $|f(p_n)| \geq \varepsilon$, para todo $n \geq 1$. Como K é compacto, a sequência $(p_n)_{n\geq 1}$ admite um valor de aderência p em K. Além disso, da continuidade de f em p, segue que existe uma vizinhança V de p tal que $|f(q)| < \varepsilon$, para todo $q \in V$. O que implica que existe $n \geq 1$ tal que $|f(p_n)| < \varepsilon$, pois V é uma vizinhança de p e p é valor de aderência de $(p_n)_{n\geq 1}$. Essa contradição estabelece nosso resultado. $\square$

PROPOSIÇÃO 1.1.13. *Sejam X um espaço de Banach e Y um subespaço fechado de X. Se o quociente X/Y é separável, então Y tem a 2-c_0EP em X.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $T : Y \to c_0$ um operador limitado e $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ a sequência fraca*-nula em Y^* associada a T. Sem perda de generalidade, assuma que $\sup_{n\geq 1} \|\alpha_n\| \leq 1$. Para cada $n \geq 1$, seja α'_n uma extensão de Hahn–Banach de α_n. Note que a conclusão segue se mostrarmos que existe uma sequência $(\beta_n)_{n\geq 1}$ de elementos de $F = Y^0 \cap B_{X^*}$ tal que $(\alpha'_n - \beta_n)_{n\geq 1}$ é fraca*-nula. Seja E um subconjunto enumerável de X que é levado pela aplicação quociente $X \to X/Y$ num subconjunto denso de X/Y. Como E é enumerável, o Lema 1.1.11 garante que existe uma pseudo-métrica invariante por tranlações d em X^* que induz a topologia da convergência nos pontos de E. Para cada $n \geq 1$, defina β_n como sendo um elemento de F que satisfaz:

$$d(\alpha'_n, \beta_n) < d(\alpha'_n, F) + 1/n \tag{1.1.5}$$

e vamos mostrar que a sequência $(\alpha'_n - \beta_n)_{n\geq 1}$ é fraca*-nula. Note que a função distância $d(.,F)$ é d-contínua e portanto, fraca*-contínua. Além disso, temos que B_{X^*} é fraca*-compacta e todo valor de aderência fraca* da sequência $(\alpha'_n)_{n\geq 1}$ pertence a F. Logo, o Lema 1.1.12 garante que $d(\alpha'_n, F) \longrightarrow 0$. Disso e de (1.1.5) vem que $d(\alpha'_n, \beta_n) \longrightarrow 0$, o que implica que $d(\alpha'_n - \beta_n, 0) \longrightarrow 0$, i.e., $(\alpha'_n - \beta_n)_{n\geq 1}$ converge a zero nos pontos de E. Além disso, note que a sequência $(\alpha'_n - \beta_n)_{n\geq 1}$ também converge a zero nos pontos de Y. Dessa forma, como o conjunto $E \cup Y$ é linearmente denso em X e a sequência $(\alpha'_n - \beta_n)_{n\geq 1}$ é limitada, o Lema 1.1.9 garante que essa sequência é fraca*-nula. Para ver que $E \cup Y$ é linearmente denso em X, note que a aplicação quociente $X \to X/Y$ é uma aplicação aberta. $\square$

Na Proposição 1.1.16, apresentaremos um corolário da Proposição 1.1.13 que generaliza o Teorema de Sobczyk para uma classe de espaços de Banach que estende a classe dos espaços separáveis.

DEFINIÇÃO 1.1.14. Dado um espaço de Banach X, dizemos que X é *weakly compactly generated* (abreviadamente WCG) se existe um subconjunto fracamente compacto de X que é linearmente denso em X.

É interessante observar que a classe dos espaços de Banach WCG estende a classe dos espaços de Banach separáveis e a classe dos espaços de Banach reflexivos ([**9**, Examples (i) e (ii), pg. 357]). Na verdade, vale que a classe dos espaços de Banach WCG estende propriamente essas classes. De fato, se Γ é um conjunto não enumerável, então o espaço $c_0(\Gamma)$ é um espaço de Banach WCG que não é separável nem reflexivo. Note que na prova do próximo lema e da Proposição 1.1.16, usaremos o fato que dado um espaço de Banach X, vale que o dual de X é fraca*-separável se, e somente se, existe uma sequência de elementos de X^* que separa os pontos de X ([**10**, pg. 161, Exercise 3.94]).

LEMA 1.1.15. *Seja X um espaço de Banach. Se X é um espaço WCG e X^* é fraca*-separável, então X é separável.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja K um subconjunto fracamente compacto e linearmente denso em X. Note que a conclusão segue se mostrarmos que X é fracamente separável, já que todo espaço de Banach fracamente separável é separável na norma ([**10**, Proposition 3.105]). Para isso, basta mostrarmos que K é fracamente separável. Seja $\{\alpha_n : n \geq 1\}$ uma sequência de elementos de X^* que separa os pontos de X e denote por τ a topologia induzida em X pela família $\{\alpha_n : n \geq 1\}$. Como essa topologia é Hausdorff, a topologia fraca é mais fina que τ e o espaço (K, w) é compacto, o Lema 1.1.8 garante que a topologia τ coincide com a topologia fraca em K. Dessa forma, de acordo com o Lema 1.1.10, do fato da topologia τ ser Hausdorff segue que o espaço (K, w) é metrizável. Logo, temos que K é fracamente separável. $\square$

PROPOSIÇÃO 1.1.16. *Seja X um espaço de Banach WCG. Se Y é um subespaço fechado de X, então Y possui a 2-c_0EP em X.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $T : Y \to c_0$ um operador limitado e considere $S : X \to l_\infty$ uma extensão de Hahn–Banach de T, cuja existência é garantida pela Proposição 1.1.1. Note que a conclusão segue se mostrarmos que $X/S^{-1}[c_0]$ é separável. De fato, se $X/S^{-1}[c_0]$ é separável, então a Proposição 1.1.13 garante que o operador $S|_{S^{-1}[c_0]} : S^{-1}[c_0] \to c_0$ admite uma extensão $T' : X \to c_0$ tal que $\|T'\| \leq 2\|S\|$ e portanto, T' estende T e $\|T'\| \leq 2\|T\|$. Denote por $\overline{S} : X/\operatorname{Ker} S \to l_\infty$ o operador limitado que S induz no quociente, ou seja, $\overline{S}$ é o único operador limitado que satisfaz a igualdade $\overline{S} \circ q = S$, onde $q : X \to X/\operatorname{Ker} S$ denota a aplicação quociente. Note que $\overline{S}$ é um operador injetor e portanto, o dual de $X/\operatorname{Ker} S$ é fraca*-separável; de fato, a sequência $\{\pi_n \circ \overline{S} : n \geq 1\}$ separa os pontos de $X/\operatorname{Ker} S$. Além disso, o quociente $X/\operatorname{Ker} S$ é WCG, já que esse espaço é a imagem de X por um operador limitado e X é WCG. Assim, de acordo com o Lema 1.1.15, temos que $X/\operatorname{Ker} S$ é separável. Isso implica que $X/S^{-1}[c_0]$ é separável e conclui nossa prova. $\square$

OBSERVAÇÃO 1.1.17. Embora um subespaço fechado de um espaço de Banach WCG não seja necessariamente WCG ([**26**]), segue do fato que a propriedade da c_0-extensão é hereditária para subespaços fechados e da Proposição 1.1.16 que todo subespaço fechado de um espaço de Banach WCG tem a c_0EP.

1.2. A propriedade da c_0-extensão para espaços $C(K)$

Nessa seção, iniciamos o estudo da propriedade da c_0-extensão no contexto de espaços de Banach da forma $C(K)$. Como usual, $C(K)$ denota o espaço das funções contínuas definidas num compacto Hausdorff K e tomando valores em $\mathbb{R}$, munido da norma do supremo. Quando trabalhamos com espaços de Banach da forma $C(K)$, em geral, estamos interessados em entender como propriedades topológicas de um espaço compacto Hausdorff se traduzem em propriedades estruturais de seu espaço de funções contínuas ([**16**]). Dessa forma, o objetivo dessa seção é relacionar algumas propriedades topológicas de K com as propriedades da c_0EP e da c_0EP separável do espaço $C(K)$. Note que a Proposição 1.1.16 garante que fixado um compacto Hausdorff K, se o espaço $C(K)$ é WCG, então $C(K)$ tem a 2-c_0EP. Além disso, recorde que um espaço da forma $C(K)$ é WCG se, e somente se, K é um compacto de Eberlein ([**10**, Theorem 14.9]). Portanto, a Proposição 1.1.16 implica que se K é um compacto de Eberlein, então $C(K)$ tem a 2-c_0EP. A seguir, relembramos a definição dos compactos de Eberlein. Sugerimos que o leitor interessado em mais detalhes sobre essa classe de compactos leia o Apêndice B.

Definição 1.2.1. Dizemos que um espaço topológico K é um *compacto de Eberlein* se, e somente se, K é homeomorfo a algum subconjunto fracamente compacto de um espaço de Banach, munido da topologia fraca.

Note que o espaço $C(K)$ possui uma estrutura natural de álgebra de Banach com unidade, para isso, basta considerarmos esse espaço também munido da operação de multiplicação de funções ponto a ponto. Como discutido no Apêndice A, as subálgebras de Banach com unidade de $C(K)$ estão em bijeção com os quocientes de K. Mais precisamente, a Proposição A.12 nos diz que toda subálgebra de Banach com unidade de $C(K)$ é da forma $\phi^*C(L)$[1], onde L é um espaço compacto Hausdorff, $\phi : K \to L$ é uma função contínua e sobrejetora e ϕ^* denota o operador de composição da ϕ que definimos abaixo.

Definição 1.2.2. Dados K e L compactos Hausdorff e $\phi : K \to L$ uma função contínua, denotamos por $\phi^* : C(L) \to C(K)$ o *operador de composição da* ϕ que é definido como $\phi^*(f) = f \circ \phi$, para toda $f \in C(L)$.

Note que ϕ^* é um homomorfismo de álgebras de Banach com unidade. Além disso, se ϕ é sobrejetora, então ϕ^* é uma imersão isométrica de $C(L)$ em $C(K)$. Se L é um subespaço de K, então definimos o *operador de restrição de* K *a* L como sendo o operador $\rho_L : C(K) \to C(L)$ que a cada elemento f de $C(K)$ associa a restrição de f a L. Nesse caso, é fácil ver que $\rho_L = i^*$, onde $i : L \to K$ denota a inclusão de L em K. Na próxima proposição, veremos uma condição sobre a função ϕ que garante que todo subespaço fechado de $\phi^*C(L)$ tem a c_0EP em $C(K)$.

Proposição 1.2.3. *Sejam K e L espaços compactos Hausdorff e seja $\phi : K \to L$ uma função contínua. Assuma que existe um subconjunto F de K que é um compacto de Eberlein e tal que $\phi|_F$ é sobrejetora. Então, todo subespaço fechado de $\phi^*C(L)$ tem a 2-c_0EP em $C(K)$.*

Demonstração. Considere um subespaço fechado $\phi^*[X]$ de $\phi^*C(L)$, onde X é um subespaço fechado de $C(L)$. Devemos mostrar que dado um operador $T \in \mathcal{B}(X, c_0)$, existe $T' \in \mathcal{B}\big(C(K), c_0\big)$ tal que $T' \circ \phi^*|_X = T$ e $\|T'\| \leq 2\|T\|$. Como $\phi|_F$ é sobrejetora, temos que a restrição de $(\phi|_F)^*$ a X é uma imersão isométrica de X em $C(F)$; De acordo com o observado no início dessa seção, como F é um compacto de Eberlein, dado $T \in \mathcal{B}(X, c_0)$

[1]Denotamos por $\phi^*C(L)$ a imagem de $C(L)$ pelo operador de composição da ϕ.

existe $T_1 \in \mathcal{B}\big(C(F), c_0\big)$ tal que $T_1 \circ (\phi|_F)^*|_X = T$ e $\|T_1\| \leq 2\|T\|$. Para concluir a prova, tome T' como sendo $T_1 \circ \rho_F$. $\square$

No próximo corolário, estendemos a c_0EP separável para uma classe de compactos estritamente maior que a classe dos compactos de Eberlein. Veja as Proposições B.10 e B.11 para uma prova de que a classe dos compactos $\aleph_0$-monolíticos contém propriamente a classe dos compactos de Eberlein.

Definição 1.2.4. Dizemos que um espaço compacto Hausdorff K é $\aleph_0$-*monolítico* se, e somente se, todo subespaço separável de K possui uma base enumerável de abertos.

Corolário 1.2.5. *Se K é um compacto Hausdorff e $\aleph_0$-monolítico, então o espaço $C(K)$ tem a 2-c_0EP separável.*

Demonstração. Um subespaço fechado e separável de $C(K)$ gera uma subálgebra de Banach com unidade e separável $\mathfrak{C}$ de $C(K)$ e portanto, as Proposições A.12 e A.14 garantem que $\mathfrak{C} = \phi^* C(L)$, para algum espaço compacto metrizável L e uma função contínua e sobrejetora $\phi : K \to L$. Denote por F o fecho de um subconjunto enumerável de K que é levado pela ϕ num subconjunto denso de L. Assim, F é metrizável, $\phi|_F$ é sobrejetora e portanto, a conclusão segue da Proposição 1.2.3. $\square$

CAPÍTULO 2

Retas compactas

Nesse capítulo, desenvolvemos toda a teoria sobre as retas compactas que será necessária para o estabelecimento dos principais resultados desse trabalho. Na Seção 2.1, introduzimos o conceito de retas compactas e estabelecemos algumas propriedades topológicas desses espaços. Na Seção 2.2, estudamos propriedades estruturais do espaço das funções contínuas definidas numa reta compacta e tomando valores em $\mathbb{R}$. Na Seção 2.3, discutimos o espaço dual de $C(K)$, para um compacto arbitrário K. Finalmente, na Seção 2.4, estudamos de forma mais profunda o espaço dual de $C(K)$, no caso particular em que K é uma reta compacta.

2.1. Propriedades topológica das retas compactas

Nessa seção, vamos estudar propriedades de conjuntos totalmente ordenados munidos da topologia da ordem. Daremos especial ênfase ao caso em que esse conjunto totalmente ordenado é uma reta compacta.

Definição 2.1.1. Seja X um conjunto. Uma relação binária $\leq$ em X é dita uma *ordem total* em X se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

(i) $x \leq x$, para todo $x \in X$;
(ii) Dados $x, y, z \in X$, se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$;
(iii) Dados $x, y \in X$, se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$;
(iv) Se $x, y \in X$, então vale que $x \leq y$ ou que $y \leq x$.

Se X é um conjunto totalmente ordenado, então existe uma topologia natural induzida pela ordem em X. Essa topologia é chamada de topologia da ordem.

Definição 2.1.2. Dado um conjunto totalmente ordenado X a *topologia da ordem* em X é a única topologia em X com a seguinte base de abertos:

$$\big\{\,]-\infty, y[\, : y \in X \big\} \cup \big\{\,]x, +\infty[\, : x \in X \big\} \cup \big\{\,]x, y[\, : x < y \big\} \cup \{X\},$$

onde $]-\infty, y[\, = \{s \in X : s < y\}$, $]x, +\infty[\, = \{s \in X : x < s\}$ e finalmente, $]x, y[\, = \{s \in X : x < s < y\}$, para todos $x, y \in X$.

Fixado um conjunto totalmente ordenado X, os *intervalos* de X são os subconjuntos de X da forma:

$$]-\infty, y[\,,]-\infty, y]\,,]x, y[\,, [x, y[\,,]x, y]\,, [x, y]\,,]x, +\infty[\ \ e\ \ [x, +\infty[\,,$$

onde x e y são elementos de X e todos esses conjuntos são definidos de forma análoga aos da Definição 2.1.2. Nesse trabalho, sempre que nos referirmos a propriedades topológicas de um conjunto totalmente ordenado, estaremos considerando esse conjunto munido da topologia da ordem, a menos que o contrário seja dito. O exemplo mais clássico de um conjunto totalmente ordenado é a reta real $\mathbb{R}$, munida da ordem canônica. A topologia da ordem de $\mathbb{R}$ é a topologia usual de $\mathbb{R}$. Aqui, sempre que considerarmos a reta real ou algum subconjunto dela, estaremos considerando-os munidos da ordem usual e da topologia induzida por essa ordem, a menos que o contrário seja dito. Outros exemplos clássicos de conjuntos totalmente ordenados são os segmentos de ordinais, munidos da ordem usual.

Nas Definições 2.1.3, 2.1.4 e 2.1.5, introduzimos conceitos básicos no estudo dos conjuntos totalmente ordenados.

Definição 2.1.3. Sejam X um conjunto totalmente ordenado e Y um subconjunto de X. Dado $x \in X$, dizemos que x é um *ponto de acumulação à direita de* Y, relativamente a X, se x não é o maior elemento de X e se para todo x' em X com $x' > x$, vale que $]x, x'[\cap Y \neq \emptyset$. Analogamente, define-se *ponto de acumulação à esquerda de* Y, relativamente a X. Um ponto y de Y que não é um ponto de acumulação à direita (resp., à esquerda) de Y, relativamente a X, é dito um ponto *isolado à direita em* Y (resp., *isolado à esquerda em* Y), relativamente a X. Se um elemento x de X é um ponto de acumulação de Y, relativamente a X, à direita e à esquerda, então dizemos que x é um *ponto de acumulação bilateral de* Y, relativamente a X.

Se X é um conjunto totalmente ordenado e um elemento x de X é um ponto de acumulação à direita de X, relativamente a X, então diremos apenas que x é um ponto de acumulação à direita de X. Analogamente para os demais conceitos dados na Definição 2.1.3.

Definição 2.1.4. Dado um conjunto totalmente ordenado X, dizemos que um elemento x de X é um *ponto interno de* X se, e somente se, x é um ponto de acumulação bilateral de X. Um ponto de X que não é interno é chamado de *ponto externo*.

Definição 2.1.5. Sejam X um conjunto totalmente ordenado e x um elemento de X. Dizemos que x *admite sucessor em* X se, e somente se, x é um ponto isolado à direita de X e x não é o maior elemento de X. Nesse caso, o *sucessor* de x é o único elemento x' de X tal que $x < x'$ e $]x, x'[= \emptyset$. Analogamente, dizemos que x *admite antecessor em* X se, e somente se, x é um ponto isolado à esquerda de X e x não é o menor elemento de X. Nesse caso, o *antecessor* de x é o único elemento x' de X tal que $x' < x$ e $]x', x[= \emptyset$.

Dados um conjunto totalmente ordenado X e dois elementos x e y de X com $x < y$, dizemos que x e y são *pontos consecutivos* se, e somente se, x é o antecessor de y.

Uma generalização do conceito de ponto de acumulação de um subconjunto de um conjunto totalmente ordenado é o de *ponto de condensação*, cuja definição apresentamos a seguir.

DEFINIÇÃO 2.1.6. Dado um conjunto totalmente ordenado X, um subconjunto Y de X e um elemento x de X, dizemos que x é um *ponto de condensação à direita de* Y, relativamente a X se, e somente se, x não é o maior elemento de X e dado $x' \in X$ com $x < x'$ vale que o conjunto $Y \cap]x, x'[$ é não enumerável. Analogamente define-se *ponto de condensação à esquerda de* Y, relativamente a X. Se x é um ponto de condensação à direita e à esquerda de Y, relativamente a X, então dizemos que x é um *ponto de condensação bilateral de* Y, relativamente a X.

Embora os conjuntos totalmente ordenados possam ter propriedades topológicas muito distintas, na próxima proposição, veremos que a topologia da ordem sempre é uma topologia Hausdorff.

PROPOSIÇÃO 2.1.7. *Se X é um conjunto totalmente ordenado, então X é um espaço topológico Hausdorff.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam x e y dois elementos distintos de X. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $x < y$. Se y é o sucessor de x, então os intervalos abertos e disjuntos $]-\infty, y[$ e $]x, +\infty[$ separam os pontos x e y. Caso contrário, existe um elemento z de X com $x < z < y$. Nesse caso os abertos disjuntos $]-\infty, z[$ e $]z, +\infty[$ separam x e y. □

Dados um conjunto totalmente ordenado X e um subconjunto Y de X, existem duas topologias naturais que podemos considerar em Y. A saber, a topologia de subespaço e a topologia da ordem em Y induzida pela restrição da ordem de X. O próximo exemplo mostra que, em geral, essas topologias não coincidem.

EXEMPLO 2.1.8. Considere $X = \mathbb{R}$, munido da ordem usual, e defina $Y = \{1 + 1/n : n \geq 1\} \cup \{0\}$. Note que Y é discreto quando munido da topologia de subespaço. No entanto, se Y está munido da topologia da ordem induzida pela restrição da ordem de X, então 0 não é um ponto isolado, pois é limite da sequência $\left(1 + \frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$.

Embora essas topologias nem sempre coincidam, é fácil ver que a topologia de subespaço é sempre mais fina que a topologia da ordem num subespaço de um conjunto totalmente ordenado. Dados um conjunto totalmente ordenado X e um subconjunto Y de X, se um elemento y de Y é um ponto isolado à direita de Y, relativamente a Y, então é claro que y também é isolado à direita em Y, relativamente a X. Na próxima proposição, veremos que uma condição necessária e suficiente para que as topologias de subespaço e da ordem coincidam em Y é que a recíproca da afirmação acima seja verdadeira. Note que se Y é um subconjunto de um conjunto totalmente ordenado e a e b são elementos de Y, então denotaremos por $]a, b[^Y$ o intervalo aberto de Y com extremos a e b. Analogamente, para os outros tipos de intervalos de Y.

Proposição 2.1.9. *Sejam X um conjunto totalmente ordenado e Y um subconjunto de X. Para que a topologia de subespaço e a topologia induzida pela restrição da ordem de X coincidam em Y é necessário e suficiente que as seguintes condições sejam satisfeitas:*

(a) *Dado $y \in Y$, se y é isolado à direita em Y, relativamente a X, então y é isolado à direita em Y, relativamente a Y;*
(b) *Dado $y \in Y$, se y é isolado à esquerda em Y, relativamente a X, então y é isolado à esquerda em Y, relativamente a Y.*

Demonstração. Inicialmente, suponha que as topologias de subespaço e da ordem coincidam em Y e vamos mostrar que vale (a). A prova de (b) é análoga. Seja $y \in Y$ um ponto isolado à direita de Y, relativamente a X. Se y é o maior elemento de X, então y é o maior elemento de Y. Se y não é o maior elemento de X, então existe $x \in X$ tal que $y < x$ e $]y, x[\, \cap Y = \emptyset$. Note que $]-\infty, x[\, \cap Y$ é um aberto da topologia de subespaço de Y e que $y \in\,]-\infty, x[\cap Y$. Logo, assumindo que y não é o maior elemento de Y, nossa hipótese garante que existe $y' \in Y$ tal que $y < y'$ e o intervalo $]-\infty, y'[^Y$ de Y está contido em $]-\infty, x[\cap Y$. O que implica que y' é o sucessor de y em Y e estabelece a condição (a). Reciprocamente, suponha que as condições (a) e (b) sejam satisfeitas. Como discutido anteriormente, para estabelecermos nosso resultado, basta mostrarmos que a topologia da ordem é mais fina que a topologia de subespaço de Y. Para isso, devemos mostrar que todo aberto básico da topologia de subespaço pertence à topologia da ordem. Vamos mostrar isso no caso em que o aberto básico é da forma $]a, b[\, \cap Y$, com $a, b \in X$ e $]a, b[\, \cap Y \neq \emptyset$. A prova para os outros tipos de abertos básicos é análoga. Fixado $y \in\,]a, b[\, \cap Y$, vejamos que existe um aberto U da topologia da ordem de Y tal que y pertence a U e U está contido em $]a, b[\cap Y$. Inicialmente, vamos analisar o caso em que y não é o menor nem o maior elemento de Y. Nesse caso, note que existem $y_1, y_2 \in Y$ tais que o aberto U pode ser tomado como $]y_1, y_2[^Y$. De fato, se $[a, y[\, \cap Y \neq \emptyset$, então tome y_1 nessa intersecção. Caso contrário, y é isolado à esquerda em Y, relativamente a X e assim, a condição (b) garante que y admite antecessor em Y, já que y não é o menor elemento de Y. Defina y_1 como sendo o antecessor de y em Y. Analogamente, se $]y, b] \cap Y \neq \emptyset$, tome y_2 nessa intersecção. Caso contrário, temos que y é isolado à direita em Y, relativamente a X. Como y não é o maior elemento de Y, a condição (a) garante que y admite sucessor em Y. Defina y_2 como sendo o sucessor de y em Y. Finalmente, é fácil ver que $]y_1, y_2[^Y$ é um aberto da topologia da ordem de Y que contém y e está contido em $]a, b[\cap Y$. Agora, vamos analisar os casos em que y é o menor ou o maior elemento de Y. Se y é o menor elemento de Y e não é o maior elemento de Y, então $[y, y_2[^Y$ é um aberto da topologia da ordem de Y que contém y e está contido em $]a, b[\, \cap Y$, onde y_2 é definido como discutido acima. Analogamente, se y é o maior elemento de Y e não é o menor elemento de Y, então $]y_1, y]^Y$ é um aberto da topologia da ordem de Y que contém y e está contido em $]a, b[\cap Y$, onde

y_1 é definido como discutido acima. Finalmente, se $Y = \{y\}$, então temos que $\{y\}$ é um aberto da topologia da ordem de Y e claramente, está contido em $]a, b[\cap Y$. $\square$

Uma propriedade fundamental da reta real é que ela é um conjunto totalmente ordenado completo, ou seja, todo subconjunto de números reais não vazio e limitado superiormente possui supremo. Na verdade, a propriedade da completude é gozada por todos os conjuntos totalmente ordenados que são compactos, quando munidos da topologia da ordem.

Definição 2.1.10. Dados um conjunto totalmente ordenado X, um subconjunto Y de X e um elemento x de X, dizemos que x é o *supremo* de Y em X, denotado por $\sup Y$ se, e somente se, x é a menor cota superior de Y. Analogamente, definimos o *ínfimo* de Y, que é denotado por $\inf Y$. Dizemos que X é *completo* se, e somente se, todo subconjunto de X não vazio e limitado superiormente possui supremo em X.

Observação 2.1.11. Note que um conjunto totalmente ordenado X é completo se, e somente se, todo subconjunto não vazio e limitado inferiormente de X possui ínfimo em X

A próxima proposição mostra que se X é um conjunto totalmente ordenado e completo, então uma condição suficiente para que as topologias de subespaço e da ordem coincidam num subconjunto Y de X é que Y seja fechado.

Proposição 2.1.12. *Seja X um conjunto totalmente ordenado e completo. Se Y é um subconjunto fechado de X, então as condições (a) e (b) do enunciado da Proposição 2.1.9 são satisfeitas. Portanto, as topologias de subespaço e da ordem coincidem em Y.*

Demonstração. Vamos mostrar que vale (a). A prova de (b) é análoga. Seja $y \in Y$ um ponto isolado à direita de Y, relativamente a X. Se y é o maior elemento de X, então y é o maior elemento de Y. Caso contrário, existe x em X tal que $y < x$ e $]y, x[\cap Y = \emptyset$, o que implica que $[x, +\infty[\cap Y \neq \emptyset$, se assumirmos que y não é o maior elemento de Y. Dessa forma, da completude de X segue que existe $y' = \inf([x, +\infty[\cap Y)$ e além disso, temos que y' pertence a Y, pois Y é um subconjunto fechado de X. Para concluir nosso resultado, note que y' é o sucessor de y em Y. $\square$

Note que se um conjunto totalmente ordenado X não é completo, podem existir subconjuntos fechados de X nos quais as topologias de subespaço e da ordem não coincidem. O próximo exemplo ilustra essa situação.

Exemplo 2.1.13. Defina X como sendo o conjunto de todos os números racionais, munido da ordem induzida de $\mathbb{R}$ e fixando um número irracional positivo u, defina Y como sendo $\{0\} \cup \{u_n : n \geq 1\}$, onde $(u_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência de números racionais maiores que u e que converge para u, na topologia de $\mathbb{R}$. Claramente, Y é um subconjunto fechado de X. Se Y está munido da topologia de subespaço, então 0 é um ponto isolado à direita de

Y, relativamente a X. No entanto, 0 não é o maior elemento de Y e nem admite um sucessor em Y.

Dados um conjunto totalmente ordenado X e um subconjunto Y de X, podemos considerar os pontos de acumulação de um subconjunto de Y, relativamente a X e também relativamente a Y, onde Y está munido da restrição da ordem de X. É fácil ver que se A é um subconjunto de Y e $y \in Y$ é um ponto de acumulação de A, relativamente a X, então y é ponto de acumulação de A, relativamente a Y. O próximo resultado, que é um corolário da Proposição 2.1.12, garante que se X é completo e Y é um subconjunto fechado de X, então os elementos de Y que são pontos de acumulação de um subconjunto de Y, relativamente a Y, também são pontos de acumulação desse conjunto, relativamente a X.

COROLÁRIO 2.1.14. *Sejam X um conjunto totalmente ordenado e completo, Y um subconjunto fechado de X e A um subconjunto de Y. Dado um ponto $y \in Y$, as seguintes condições são satisfeitas:*

(a) *Se y é ponto de acumulação à direita de A, relativamente a Y, então y é ponto de acumulação à direita de A, relativamente a X;*
(b) *Se y é ponto de acumulação à esquerda de A, relativamente a Y, então y é ponto de acumulação à esquerda de A, relativamente a X.*

DEMONSTRAÇÃO. Vamos mostar (a). A prova de (b) é análoga. Como y é ponto de acumulação à direita de A, relativamente a Y, temos que y não é o maior elemento de Y e portanto, y não é o maior elemento de X. Considere $x \in X$ com $y < x$ e vamos mostrar que $]y, x[\cap A \neq \emptyset$. Note que a conclusão segue se mostrarmos que $]y, x] \cap Y \neq \emptyset$. Suponha, por absurdo, que $]y, x] \cap Y = \emptyset$. Nesse caso, temos que y é isolado à direita em Y, relativamente a X e portanto, a condição (a) da Proposição 2.1.12 garante que y admite um sucessor y' em Y. Mas, isso implicaria que $]y, y'[\cap A = \emptyset$, o que contradiz o fato de y ser um ponto de acumulação à direita de A, relativamente a Y. □

Em face da Proposição 2.1.12, o leitor pode se perguntar se dado um conjunto totalmente ordenado e completo X, uma condição necessária para que as topologias de subespaço e da ordem coincidam num subconjunto Y de X é que Y seja fechado. A resposta para essa pergunta é negativa. Mais precisamente, na próxima proposição, veremos que as topologias de subespaço e da ordem coincidem em todo subconjunto de um conjunto totalmente ordenado que possui a propriedade do valor intermediário.

DEFINIÇÃO 2.1.15. Sejam X um conjunto totalmente ordenado e Y um subconjunto de X. Dizemos que Y tem a *propriedade do valor intermediário*, relativamente a X (abreviadamente pvi), se e somente se, dados $x, y \in Y$ com $x < y$, vale que o intervalo $[x, y]$ está contido em Y.

PROPOSIÇÃO 2.1.16. *Seja X um conjunto totalmente ordenado e Y um subconjunto de X. Se Y tem a pvi, então as topologias de subespaço e da ordem coincidem em Y.*

DEMONSTRAÇÃO. Vamos mostrar que vale a condição (a) da Proposição 2.1.9. A prova de (b) é análoga. Seja y um elemento de Y isolado à direita em Y, relativamente a X. Note que se y for o maior elemento de X, então y é o maior elemento de Y. Agora, suponha que y não é o maior elemento de X nem de Y. Nesse caso, existe $x \in X$ tal que $y < x$ e $]y, x[\cap Y = \emptyset$. Observe que a conclusão segue se mostrarmos que x pertence a Y. De fato, se x pertencer a Y, então x será o sucessor de y em Y. Mas, isso segue diretamente do fato de y não ser o maior elemento de Y e de Y ter a pvi. □

Claramente, todo intervalo de um conjunto totalmente ordenado tem a pvi. O próximo resultado mostra que num conjunto totalmente ordenado e completo, os intervalos são os únicos subconjuntos com a pvi.

PROPOSIÇÃO 2.1.17. *Seja X um conjunto totalmente ordenado e completo. Um subconjunto Y de X tem a pvi se, e somente se, Y é um intervalo.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que Y tenha a pvi. Se $Y = \emptyset$, então Y é um intervalo. Vamos mostrar a tese no caso em que Y é limitado inferiormente e superiormente, os outros casos são análogos. Defina a e b como sendo o ínfimo e o supremo de Y em X, respectivamente e vamos mostrar que Y é um intervalo com extremidades a e b. Para isso, basta mostrarmos que se $x \in]a, b[$, então $x \in Y$. Do fato de a ser o ínfimo de Y e de x ser maior que a, segue que existe um elemento a' de Y tal que $a \leq a' < x$. Analogamente, por b ser o supremo de Y e x ser menor que b, existe um elemento b' de Y tal que $x < b' \leq b$. Portanto, temos que $x \in Y$, já que $x \in [a', b']$ e Y tem a pvi. □

Agora, vamos mostrar que todo subconjunto Y de um conjunto totalmente ordenado pode ser escrito como uma união disjunta de subconjuntos com a pvi e maximais dentre os subconjuntos de Y com a pvi.

DEFINIÇÃO 2.1.18. Sejam X um conjunto totalmente ordenado e Y um subconjunto de X. Definimos uma relação de equivalência em Y declarando que dados $x, y \in Y$, $x \sim y$ se, e somente se, o intervalo fechado com extremidades x e y está contido em Y. As classes de equivalência de $\sim$ são chamadas de *componentes convexas de Y*.

PROPOSIÇÃO 2.1.19. *Sejam X um conjunto totalmente ordenado e Y um subconjunto de X. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(a) *As componentes convexas de Y têm a pvi;*
(b) *Se I é um subconjunto de Y com a pvi, então I está contido em alguma componente convexa de Y;*
(c) *As componentes convexas de Y são maximais dentre os subconjuntos de Y com a pvi, ou seja, se D é uma componente convexa de Y e I é um subconjunto de Y com a pvi tal que $D \subset I$, então $D = I$.*

(d) *As componentes convexas de Y são subconjuntos fechados de Y, se Y estiver munido da topologia de subespaço;*
(e) *Se Y é um subconjunto aberto de X, então as componentes convexas de Y são subconjuntos abertos de X.*

Demonstração. A prova de (a) é trivial. Vamos provar (b). Sem perda de generalidade, podemos supor que $I \neq \emptyset$. Considere $x \in I$ e vamos mostrar que I está contido na classe de equivalência de x. Seja $y \in I$, como I tem a pvi, o intervalo fechado de extremidades y e x está contido em I e portanto, contido em Y. Isso implica que $y \sim x$, o que prova (b). Agora, vamos provar (c). Como I tem a pvi, de acordo com (b), existe um elemento $y \in Y$ tal que $I \subset E$, onde E denota a classe de equivalência de y. A conclusão segue do fato que duas classes de equivalência distintas são disjuntas. Para mostrar (d), fixe $y \in Y$ e vejamos que a classe de equivalência de y é fechada em Y. Faremos isso, mostrando que o complementar em Y da classe de equivalência de y é aberto. Seja $x \in Y$ tal que x não pertence à classe de equivalência de y. Sem perda de generalidade, suponhamos que $y < x$. Então, existe $x' \in \left]y, x\right[\setminus Y$. A conclusão segue do fato que $\left]x', +\infty\right[\cap Y$ é um aberto de Y que contém x e é disjunto da classe de equivalência de y. Finalmente, o item (e) segue diretamente do fato de Y ser aberto. □

Finalmente, vamos introduzir as retas compactas, que são o principal objeto de estudo desse capítulo.

Definição 2.1.20. Uma *reta compacta* é um conjunto totalmente ordenado que é compacto na topologia da ordem.

Como comentado anteriormente, toda reta compacta é um conjunto totalmente ordenado completo. No entanto, ser completo não é uma condição que garante a compacidade. De fato, a reta real é um conjunto totalmente ordenado completo que não é compacto. Além da completude, quais propriedades um conjunto totalmente ordenado deve satisfazer para que ele seja uma reta compacta? Como veremos na Proposição 2.1.22 a classe das retas compactas coincide com a classe dos conjuntos totalmente ordenados que são completos e limitados.

Definição 2.1.21. Dado um conjunto totalmente ordenado X, dizemos que X é *limitado* se, e somente se, X possui máximo e mínimo. Denotaremos o mínimo de X por $\min X$ e o máximo de X por $\max X$.

Proposição 2.1.22. *Seja X um conjunto totalmente ordenado. Temos que X é uma reta compacta se, e somente se, X é limitado e completo.*

Demonstração. Suponha que X seja compacto e vamos mostrar que X é limitado e completo. Primeiro, vamos mostrar que X é limitado. Suponha, por absurdo, que X não possui máximo e portanto, $\{\left]-\infty, x\right[: x \in X\}$ é uma cobertura aberta de X. Da compacidade de X segue que existe um subconjunto finito F de X tal que $X = \bigcup_{x \in F} \left]-\infty, x\right[$. Tomando $x_0 = \max F$, temos que $X = \left]-\infty, x_0\right[$ e portanto, $x_0 \notin X$. Essa contradição estabelece nosso resultado. Analogamente, mostra-se que X possui mínimo. Agora, vejamos que X é completo. Suponha, por absurdo, que X não seja completo. Então existe um subconjunto não vazio A de X limitado superiormente que não admite supremo. Seja $\mathcal{A}$ o conjunto de todas as cotas superiores de A. Do fato de A não possuir supremo em X, segue que:

$$X = \Big(\bigcup_{a \in A}]-\infty, a[\Big) \cup \Big(\bigcup_{b \in \mathcal{A}}]b, +\infty[\Big).$$

Como X é compacto, existem subconjuntos finitos F e G de A e $\mathcal{A}$, respectivamente, tais que:

$$X = \Big(\bigcup_{a \in F}]-\infty, a[\Big) \cup \Big(\bigcup_{b \in G}]b, +\infty[\Big).$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que F e G são não vazios, e portanto, $X =]-\infty, \max F[\cup]\min G, +\infty[$. No entanto, note que $\max F$ não pertence a $]-\infty, \max F[$ nem a $]\min G, +\infty[$. Essa contradição estabelece nosso resultado. Reciprocamente, suponha que X seja limitado e completo e vamos mostrar que X é compacto. Defina $a = \min X$ e $b = \max X$, e seja $\{U_i : i \in I\}$ uma cobertura aberta de X. Considere o seguinte conjunto:

$$S = \{x \in X : [a, x] \text{ pode ser coberto por um número finito de } U_i's\}.$$

Como S é não vazio e limitado superiormente e X é completo, temos que S admite supremo em X. Denote esse supremo por s e note que a conclusão segue se mostrarmos que s pertence a S e que $s = b$. O caso interessante é quando $a < b$. Nesse caso, vale que $a < s$. De fato, existe $i \in I$ tal que $a \in U_i$. Como U_i é aberto, existe $x > a$ tal que $[a, x[\subset U_i$ e assim, $[a, x]$ pode ser coberto por um número finito de U_i's. Isso implica que x pertence a S e portanto, vale que $a < x \leq s$. Agora, vamos mostrar que s pertence a S. Note que existe $i \in I$ tal que $s \in U_i$. Assim, do fato de U_i ser aberto segue que existe $t \in X$ tal que $t < s$ e $]t, s] \subset U_i$. Como t é estritamente menor que s, existe um elemento x de S tal que $t < x \leq s$. Note que $[a, s] = [a, x] \cup [t, s]$ e portanto, s pertence a S. Finalmente, vamos mostrar que $s = b$. Suponha, por absurdo, que $s < b$. Analogamente ao discutido anteriormente, existe $x \in X$ tal que $s < x$ e $[s, x]$ pode ser coberto por um número finito de U_i's. O que implica que x pertence a S, já que $[a, x] = [a, s] \cup [s, x]$. Mas, isso contradiz o fato de s ser o máximo de S. $\square$

Note que se K é uma reta compacta e F é um subconjunto fechado de K, então F é uma reta compacta, se munido da restrição da ordem de K. De fato, como K é completo e F é um subconjunto fechado de K, a Proposição 2.1.12 garante que as topologias de subespaço e da ordem coincidem em F. Mas, munido da topologia de subespaço, F é um espaço compacto.

Um exemplo interessante de reta compacta é o espaço double-arrow, que é denotado por DA. O *espaço double-arrow* é o conjunto:

$$DA = [0, 1] \times \{0, 1\},$$

munido da ordem lexicográfica. Dados conjuntos totalmente ordenados X e Y, a *ordem lexicográfica* no produto $X \times Y$ é a ordem total definida declarando-se que $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ se, e somente se, $x_1 < x_2$ ou $x_1 = x_2$ e $y_1 \leq y_2$. Usando a Proposição 2.1.22, o fato que $[0,1]$ é uma reta compacta e a primeira projeção de DA em $[0,1]$ é fácil mostrar que DA é uma reta compacta. Mais geralmente, temos a seguinte definição.

Definição 2.1.23. Dado $X \subset [0,1]$, denotamos por $\mathrm{DA}(X)$ o conjunto:

$$\mathrm{DA}(X) = \big([0,1] \times \{0\}\big) \cup \big(X \times \{1\}\big) \subset [0,1] \times \{0,1\},$$

munido da ordem lexicográfica.

Note que a primeira projeção $\pi_1 : \mathrm{DA}(X) \to [0,1]$ é uma função contínua, crescente e sobrejetora. Mais geralmente, a cada inclusão $Y \subset X$ de subconjuntos do intervalo $[0,1]$, associamos uma função contínua, crescente e sobrejetora de $\mathrm{DA}(X)$ em $\mathrm{DA}(Y)$, de acordo com a definição abaixo.

Definição 2.1.24. Se X e Y são subconjuntos de $[0,1]$ com $Y \subset X$, então a *sobrejeção contínua e crescente associada à inclusão de Y em X* é a função contínua, crescente e sobrejetora $\phi : \mathrm{DA}(X) \to \mathrm{DA}(Y)$ definida por $\phi(u,i) = (u,i)$, $i = 0,1$, se $u \in Y$, $\phi(u,i) = (u,0)$, $i = 0,1$, se $u \in X \setminus Y$ e $\phi(u,0) = (u,0)$, se $u \in [0,1] \setminus X$.

É fácil ver que, dado qualquer subconjunto X de $[0,1]$, o espaço $\mathrm{DA}(X)$ é uma reta compacta separável. No entanto, a Proposição 2.1.26 mostra que a metrizabilidade de $\mathrm{DA}(X)$ depende da cardinalidade de X.

Lema 2.1.25. *Seja X um conjunto totalmente ordenado. Se X tem uma base enumerável de abertos, então X só possui uma quantidade enumerável de pontos isolados à direita.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{U}$ uma base enumerável de abertos de X e note que a conclusão segue se mostrarmos que existe uma função injetora do conjunto dos pontos isolados à direita de X em $\mathfrak{U}$. Considere a função que a cada ponto x isolado à direita em X associa um elemento U_x de $\mathfrak{U}$ tal que x pertence a U_x e U_x está contido no aberto $]-\infty, x]$. Para ver que essa função é injetora, observe que x é o máximo de U_x. $\square$

Proposição 2.1.26. *Seja X um subconjunto de* $[0,1]$. *Vale que* $\mathrm{DA}(X)$ *é metrizável se, e somente se, X é enumerável.*

Demonstração. Suponha que $\mathrm{DA}(X)$ seja metrizável e vamos mostrar que X é enumerável. Como $\mathrm{DA}(X)$ é um compacto metrizável, temos que $\mathrm{DA}(X)$ possui uma base enumerável de abertos. A conclusão segue do Lema 2.1.25 e da observação que os pontos da forma $(u,0)$ são isolados à direita em $\mathrm{DA}(X)$, para $u \in X$. Reciprocamente, suponha que X seja enumerável e vamos mostrar que $\mathrm{DA}(X)$ tem uma base enumerável de abertos e portanto, é metrizável. Para isso, note que a seguinte coleção é uma base enumerável de abertos de $\mathrm{DA}(X)$:

$$\begin{gathered}\big\{\,](u,0),(v,0)[\, : u,v \in R \text{ e } u < v\big\} \cup \\ \big\{\,](u,0),(v,0)] : u \in R, v \in X \cup \{1\} \text{ e } u < v\big\} \cup \\ \big\{\, [(u,1),(v,0)[\, : v \in R, u \in X \text{ e } u < v\big\} \cup \big\{\, [(0,0),(v,0)[\, : v \in R \text{ e } 0 < v\big\} \cup \\ E \cup \big\{\mathrm{DA}(X)\big\},\end{gathered}$$

onde R denota o subconjunto de números racionais do intervalo $[0,1]$ e $E = \Big\{\big\{(1,1)\big\}, \big\{(0,0)\big\}\Big\} \cap \wp\big(\mathrm{DA}(X)\big)$. $\square$

Uma outra generalização interessante do espaço double arrow é um espaço topológico formado a partir de uma reta compacta arbitrária. Fixada uma reta compacta K, considere o conjunto $K \times \{0,1\}$, munido da ordem lexicográfica. Usando a Proposição 2.1.22 é fácil ver que esse espaço é uma reta compacta. Note que essa construção é um caso particular da construção descrita na proposição abaixo, que nos dá uma "fábrica" de retas compactas.

PROPOSIÇÃO 2.1.27. *Dadas uma reta compacta K e uma família de retas compactas não vazias $(L_t)_{t\in K}$, o conjunto $\bigcup_{t\in K}\big(\{t\}\times L_t\big)$, munido da ordem lexicográfica, é uma reta compacta.*

DEMONSTRAÇÃO. De acordo com a Proposição 2.1.22, basta mostrarmos que o conjunto totalmente ordenado $M = \bigcup_{t\in K}\big(\{t\}\times L_t\big)$ é limitado e completo. É fácil ver que se a é o mínimo de K, então $(a, \min L_a)$ é o mínimo de M. Analogamente, temos que se $b = \max K$, então $(b, \max L_b)$ é o máximo de M. Agora, vamos mostrar que M é completo. Seja A um subconjunto não vazio de M e defina:

$$\mathfrak{A} = \{t \in K : A \cap (\{t\} \times L_t) \neq \emptyset\}.$$

Então, $\mathfrak{A}$ é um subconjunto de K não vazio e limitado superiormente (todo subconjunto de K é limitado, pois K é limitado). Seja $s = \sup \mathfrak{A} \in K$ e note que se $s \notin \mathfrak{A}$, então $(s, \min L_s)$ é o supremo de A. Caso contrário, temos que $(s, \sup S)$ é o supremo de A, onde $S = \pi_2\Big[A \cap \big(\{s\} \times L_s\big)\Big]$ e $\pi_2 : M \to \bigcup_{t\in K} L_t$ denota a projeção na segunda coordenada. $\square$

Note que a relevância dos espaços da forma $K \times \{0,1\}$, onde K é uma reta compacta, reside no fato que esses espaços são zero-dimensionais.

DEFINIÇÃO 2.1.28. Dizemos que um espaço topológico é *zero-dimensional* se, e somente se, existe uma base de sua topologia formada por conjuntos aberto-fechados.

PROPOSIÇÃO 2.1.29. *Seja K uma reta compacta. O conjunto $K \times \{0,1\}$, munido da ordem lexicográfica, é uma reta compacta zero-dimensional.*

Demonstração. Basta observar que a seguinte coleção é uma base da topologia de $K \times \{0,1\}$ formada por subconjuntos aberto-fechados:

$$\Big\{\big[(a,1),(b,0)\big] : a < b\Big\} \cup \Big\{\big\{(t,0)\big\} : t \text{ é ponto isolado à esquerda de } K\Big\}$$
$$\cup \Big\{\big\{(t,1)\big\} : t \text{ é ponto isolado à direita de } K\Big\} \cup \big\{K \times \{0,1\}\big\},$$

onde $a, b \in K$. □

No presente trabalho, as funções contínuas, crescentes e sobrejetoras entre retas compactas desempenham um papel de destaque. Sendo que grande parte da informação sobre essas funções será dada pelos conjuntos que definimos a seguir.

Definição 2.1.30. Sejam K e L retas compactas e $\phi : K \to L$ uma função contínua, crescente e sobrejetora. Definimos os seguintes subconjuntos de L:

$$Q(\phi) = \{t \in L : |\phi^{-1}(t)| > 1\}$$
$$Q_0(\phi) = \{t \in Q(\phi) : t \text{ é ponto interno de } L\}.$$

Por exemplo, se X e Y são subconjuntos de $[0,1]$ tais que $Y \subset X$ e $\phi : \mathrm{DA}(X) \to \mathrm{DA}(Y)$ é a sobrejeção contínua e crescente associada à inclusão de Y em X, então é fácil ver que $Q(\phi) = (X \setminus Y) \times \{0\}$. Além disso, temos que $Q_0(\phi) = Q(\phi) \setminus \big\{(0,0),(1,0)\big\}$, já que o conjunto dos pontos internos de $\mathrm{DA}(Y)$ é $\big(]0,1[\setminus Y\big) \times \{0\}$.

Se K é uma reta compacta, então K é um espaço topológico normal, já que é um espaço compacto e Hausdorff (Proposição 2.1.7). Portanto, o Lema de Urysohn garante que dados fechados disjuntos F e G de K, existe uma função contínua $f : K \to [0,1]$ tal que $f|_F \equiv 0$ e $f|_G \equiv 1$ ([**34**, 15.6]). Na próxima proposição, veremos que se F e G forem conjuntos unitários, então a função f pode ser tomada crescente. Ao longo desse texto, geralmente denotaremos o mínimo de uma reta compacta por 0.

Proposição 2.1.31. *Sejam K uma reta compacta e a e b dois elementos distintos de K. Se $a < b$, então existe uma função contínua e crescente $f : K \to [0,1]$ tal que $f(a) = 0$ e $f(b) = 1$.*

Demonstração. Considere a função contínua $h : K \to [0,1]$ tal que $h(a) = 0$ e $h(b) = 1$, cuja existência é garantida pelo Lema de Urysohn. Sem perda de generalidade, podemos supor que $h|_{[0,a]} \equiv 0$ e $h|_{[b,\max K]} \equiv 1$. Defina $f(t) = \sup\{h(s) : s \leq t\}$, para todo $t \in K$. É fácil verificar que a função f satisfaz a tese da presente proposição. □

Agora, vamos nos concentrar no estudo das retas compactas separáveis. É interessante observar que embora existam retas compactas separáveis que não são metrizáveis (por exemplo, o espaço double-arrow), as retas compactas separáveis compartilham muitas propriedades com os espaços metrizáveis. No que segue, estabeleceremos algumas propriedades topológicas das retas compactas separáveis.

PROPOSIÇÃO 2.1.32. *Toda reta compacta separável satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam K uma reta compacta separável, D um subconjunto enumerável e denso em K e t um elemento de K. Se t é um ponto isolado dos dois lados de K, então $\big\{\{t\}\big\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças enumerável de t. Caso t não seja um ponto isolado à esquerda de K, considere $\{t_n : n \geq 1\}$ uma enumeração de $D \cap \,]-\infty, t[$. Analogamente, caso t não seja um ponto isolado à direita, considere $\{s_n : n \geq 1\}$ uma enumeração de $D \cap \,]t, +\infty[$. Se t não é um ponto isolado à direita nem à esquerda, note que $\big\{\,]t_n, s_m[\,: n, m \geq 1\big\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças enumerável de t. No caso em que t é um ponto isolado à esquerda e não é isolado à direita, temos que $\big\{\, [t, s_n[\,: n \geq 1\big\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças enumerável de t. Finalmente, se t é um ponto isolado à direita e não é isolado à esquerda, então $\big\{\,]t_n, t] : n \geq 1\big\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças enumerável de t. $\square$

Para mostrar que toda reta compacta separável é hereditariamente Lindelöf e perfeitamente normal, precisamos do seguinte lema. Recorde que dado um espaço topológico $\mathcal{X}$, dizemos que um subconjunto S de $\mathcal{X}$ é um *subconjunto F_σ* de $\mathcal{X}$ se, e somente se, S se escreve como uma união enumerável de fechados. Se o complementar de S é um subconjunto F_σ de $\mathcal{X}$, então dizemos que S é um *subconjunto G_δ* de $\mathcal{X}$.

LEMA 2.1.33. *Seja K uma reta compacta separável. Se U é um subconjunto aberto de K, então U é um subconjunto F_σ de K.*

DEMONSTRAÇÃO. Podemos escrever U como a união disjunta de suas componentes convexas. Como K é separável e as componentes convexas de U são abertos dois a dois disjuntos de K (Proposição 2.1.19, item (e)), temos que U só tem uma quantidade enumerável de componentes convexas. Assim, a conclusão segue se mostrarmos que se I é uma componente convexa de U, então I é um subconjunto F_σ de K. Usando as Proposições 2.1.19 e 2.1.17, concluímos que I é um intervalo aberto de K. Portanto, temos que $I = [0, b[$, $I = \,]a, b[$ ou $I = \,]a, \max K]$, onde a e b são elementos de K. Vamos analisar o caso em que $I = [0, b[$. Os outros casos são análogos. Note que se b é isolado à esquerda, então I é fechado. Caso contrário, como K satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade (Proposição 2.1.32), existe uma sequência estritamente crescente $(t_n)_{n\geq 1}$ de elementos de K que converge para b. Dessa forma, temos que $I = \bigcup_{n\geq 1} [0, t_n]$. Isso conclui a prova. $\square$

PROPOSIÇÃO 2.1.34. *Toda reta compacta separável é hereditariamente Lindelöf.*

DEMONSTRAÇÃO. Note que para estabelecer que um espaço topológico $\mathcal{X}$ é hereditariamente Lindelöf, basta mostrarmos que todo subespaço aberto de $\mathcal{X}$ é Lindelöf. Sejam K uma reta compacta separável e U um subespaço aberto de K. De acordo com o Lema 2.1.33, temos que U é um subconjunto F_σ de K. Isso estabelece nosso resutado, já que um subconjunto F_σ de K é σ-compacto e portanto, Lindelöf. $\square$

Na Proposição 2.1.7, vimos que todo conjunto totalmente ordenado é Hausdorff. Na verdade, vale que a topologia da ordem é hereditariamente normal ([**29**, Example 39]). Agora, vamos mostrar que se K é uma reta compacta separável, então K satisfaz um axioma de separação mais forte que a normalidade hereditária.

Definição 2.1.35. Dado um espaço topológico $\mathcal{X}$, dizemos que $\mathcal{X}$ é *perfeitamente normal* se, e somente se, dados subconjuntos fechados e disjuntos F e G de $\mathcal{X}$, existe uma função contínua $f : \mathcal{X} \to [0, 1]$ tal que $f^{-1}(0) = F$ e $f^{-1}(1) = G$.

Segue diretamente da Definição 2.1.35 que um espaço topológico $\mathcal{X}$ é perfeitamente normal se, e somente se, dado um subconjunto fechado F de $\mathcal{X}$, existe uma função contínua $f : \mathcal{X} \to [0, 1]$ tal que $F = f^{-1}(0)$. Usando essa caracterização de perfeitamente normal, é fácil ver que ser perfeitamente normal é uma propriedade hereditária, o que implica que todo espaço perfeitamente normal é hereditariamente normal. Além disso, dado um espaço topológico $\mathcal{X}$, vale que $\mathcal{X}$ é perfeitamente normal se, e somente se, $\mathcal{X}$ é normal e todo subconjunto fechado de $\mathcal{X}$ é um G_δ desse espaço ([**20**, Theorem 2, pg. 135]). Na próxima proposição, veremos que se K é uma reta compacta separável, então K é perfeitamente normal

Proposição 2.1.36. *Toda reta compacta separável é perfeitamente normal.*

Demonstração. Seja K uma reta compacta separável. Como K é um espaço compacto Hausdorff, temos que K é normal. Portanto, para estabelecermos nosso resultado, basta mostrarmos que todo fechado de K é um subconjunto G_δ de K. Mas, isso segue diretamente do Lema 2.1.33. $\square$

Observação 2.1.37. Note que a reta compacta não separável $[0, \omega_1]$ é um exemplo de uma reta compacta que não satisfaz nenhuma das propriedades discutidas acima. De fato, é fácil ver que esse espaço não satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade, já que o ponto ω_1 não admite um sistema fundamental de vizinhanças enumerável. Além disso, $[0, \omega_1]$ não é hereditariamente Lindelöf, pois $\{[0, \alpha[\, : \alpha \in \omega_1\}$ é uma cobertura aberta de $[0, \omega_1[$ que não admite subcobertura enumerável. Por fim, temos que $[0, \omega_1]$ também não é perfeitamente normal, pois o subconjunto fechado $\{\omega_1\}$ não é um G_δ.

Finalmente, na próxima proposição, mostraremos que para uma reta compacta separável, a separabilidade é uma propriedade hereditária.

Proposição 2.1.38. *Uma reta compacta separável é hereditariamente separável.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja K uma reta compacta separável. Como K satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade (Proposição 2.1.32), basta mostrarmos que todo subconjunto fechado Z de K é separável. Seja D um subconjunto enumerável e denso em K e para cada $t \in Z \setminus \{\max Z\}$ isolado à direita em Z, denote por t' o sucessor de t em Z. Defina:

$$S = \big\{t \in Z \setminus \{\max Z\} : t \text{ é isolado à direita em } Z \text{ e }]t, t'[\neq \emptyset\big\}.$$

Os intervalos abertos $]t, t'[$, $t \in S$, são não vazios e dois a dois disjuntos; portanto, a separabilidade de K implica que S é enumerável. Afirmamos que o conjunto enumerável:

$$E = (D \cap Z) \cup \{\min Z, \max Z\} \cup \bigcup_{t \in S} \{t, t'\} \subset Z$$

é denso em Z. De fato, se $s \in Z$, então os intervalos abertos $[\min Z, s[$ e $]s, \max Z]$ cortam E. Agora, dados $t_1, t_2 \in Z$ com $]t_1, t_2[\cap Z \neq \emptyset$, se vale que $]t_1, t_2[\subset Z$, então $]t_1, t_2[$ intersecta $D \cap Z$. Caso contrário, considere $s \in]t_1, t_2[\setminus Z$ e defina $s_1 = \max\big([t_1, s] \cap Z\big)$ e $s_2 = \min\big([s, t_2] \cap Z\big)$. Note que s_2 é o sucessor de s_1 em Z e portanto, temos que s_1 pertence a S. Para concluir a prova, observe que $s_1 > t_1$ ou $s_2 < t_2$ [1]. □

Agora, vamos discutir um pouco sobre quocientes de conjuntos totalmente ordenados. Como vimos anteriormente, se K é uma reta compacta, então todo subconjunto fechado de K é uma reta compacta, se munido da restrição da ordem de K. Podemos nos perguntar se dado um quociente L de uma reta compacta K, existe uma ordem total em L cuja topologia induzida coincide com a topologia quociente. Como veremos a seguir, no caso em que as classes de equivalência da relação de equivalência associada a esse quociente são intervalos fechados de K, a resposta para essa pergunta é afirmativa

LEMA 2.1.39. *Sejam X um conjunto totalmente ordenado e $\sim$ uma relação de equivalência em X. Se as classes de equivalência de $\sim$ têm a pvi, então existe uma única ordem total em $X/\sim$ que faz com que a aplicação quociente $X \to X/\sim$ seja crescente.*

DEMONSTRAÇÃO. Considere a relação binária no quociente obtida declarando-se que para u e v em $X/\sim$, vale que:

$$u \preceq v \Leftrightarrow u = v \text{ ou } (\forall x \in u, \forall y \in v, x < y). \tag{2.1.1}$$

A relação $\preceq$ definida acima é uma ordem total em $X/\sim$. De fato, para ver que a ordem $\preceq$ é total, note que a condição (2.1.1) é equivalente a:

$$u \preceq v \Leftrightarrow u = v \text{ ou } (u \neq v \text{ e } \exists x \in u, \exists y \in v, x < y),$$

pois as classes de equivalência de $\sim$ têm a pvi. É claro que se $X/\sim$ estiver munido da ordem $\preceq$, então a aplicação quociente é crescente. Além disso,

[1]Note que nessa prova, estamos usando o fato que a topologia de subespaço e da ordem coincidem em Z. Isso vale, pois K é completo e Z é um subconjunto fechado de K (Proposição 2.1.12).

a unicidade de uma ordem total no quociente que faz com que a aplicação quociente seja crescente é evidente. $\square$

Proposição 2.1.40. *Sejam K uma reta compacta e $\sim$ uma relação de equivalência em K. Se as classes de equivalência de $\sim$ são intervalos fechados, então existe uma única ordem total no quociente $K/\sim$ que faz com que a aplicação quociente $q : K \to K/\sim$ seja crescente e contínua, se o quociente $K/\sim$ estiver munido dessa ordem e da topologia que ela induz. Além disso, as topologias quociente e da ordem coincidem em $K/\sim$.*

Demonstração. Considere a relação binária $\preceq$ definida em $K/\sim$ por (2.1.1). Note que como as classes de equivalência de $\sim$ têm a pvi, o Lema 2.1.39 garante que $\preceq$ é uma ordem total em $K/\sim$ e além disso, essa é a única ordem total no quociente que faz com que a aplicação quociente $q : K \to K/\sim$ seja crescente. Agora, mostremos que a aplicação quociente $q : K \to K/\sim$ é contínua, se $K/\sim$ estiver munido da topologia da ordem. Vejamos que q é contínua à direita, a continuidade à esquerda é demonstrada de forma análoga. Como q é sobrejetora e crescente, para estabelecermos a continuidade à direita de q num ponto t, não isolado à direita em K, basta mostrarmos que se s é um elemento de K tal que $q(t) \prec q(s)$, então existe $t' \in K$ com $t < t'$ e tal que a imagem de $[t, t'[$ por q está contida em $[q(t), q(s)[$. Como K é completo e $q(s)$ é um subconjunto não vazio de K, tome t' como sendo o ínfimo de $q(s)$. Note que $t' \in q(s)$, pois $q(s)$ é fechado, o que implica que $t < t'$. Dessa forma, temos que a imagem de $[t, t'[$ por q está contida em $[q(t), q(s)[$, o que estabelece a continuidade à direita de q em t. Denote por τ_q a topologia quociente e $\tau_{\preceq}$ a topologia da ordem no quociente e vejamos que $\tau_q = \tau_{\preceq}$. Como $q : K \to (K/\sim, \tau_{\preceq})$ é contínua, da definição da topologia quociente segue que τ_q é uma topologia mais fina que $\tau_{\preceq}$. Portanto, o Lema 1.1.8 garante que essas topologias coincidem, já que $K/\sim$, munido da topologia quociente, é compacto e a topologia da ordem é Hausdorff. $\square$

Uma noção relevante no contexto de conjuntos totalmente ordenados é a de isomorfismo de ordem.

Definição 2.1.41. Sejam X e Y dois conjuntos totalmente ordenados. Uma função $f : X \to Y$ é um *isomorfismo de ordem* se, e somente se, f é estritamente crescente e sobrejetora. Nesse caso, f possui uma inversa e essa inversa também é estritamente crescente. Se existe um isomorfismo de ordem entre X e Y, então dizemos que X e Y são *isomorfos em ordem.*

Note que se dois conjuntos totalmente ordenados X e Y são isomorfos em ordem, então esse isomorfismo de ordem é um homeomorfismo, se X e Y estiverem munidos da topologia da ordem.

Corolário 2.1.42. *Sejam K uma reta compacta, L um espaço compacto Hausdorff e $\phi : K \to L$ uma função contínua e sobrejetora. Se $\phi^{-1}(y)$ é um intervalo (fechado) de K, para todo $y \in L$, então existe uma única ordem total em L que faz com que ϕ seja crescente, se L estiver munido dessa* *ordem. Além disso, a topologia da ordem coincide com a topologia original de L.*

DEMONSTRAÇÃO. Considere a relação de equivalência $\sim$ em K induzida pela função ϕ, i.e., $s_1 \sim s_2$ se, e somente se, $\phi(s_1) = \phi(s_2)$, para todos $s_1, s_2 \in K$. Note que as classes de equivalência de $\sim$ são intervalos fechados de K, pois essas classes de equivalência coincidem com os conjuntos de nível da ϕ. De acordo com a Proposição 2.1.40, existe uma única ordem total $\preceq$ em $K/\sim$ tal que a aplicação quociente $q : K \to K/\sim$ é crescente e além disso, as topologias quociente e da ordem coincidem em $K/\sim$ [2]. Note que a função ϕ passa ao quociente, ou seja, existe uma função $\overline{\phi} : K/\sim \to L$ tal que $\overline{\phi} \circ q = \phi$. Além disso, é fácil ver que $\overline{\phi}$ é bijetora e temos que $\overline{\phi}$ é contínua, já que ϕ é contínua (veja a Observação 2.1.43 para detalhes sobre a topologia quociente). Como $K/\sim$ é compacto e L é um espaço Hausdorff, na verdade, vale que $\overline{\phi}$ é um homeomorfismo. Agora, defina uma ordem total em L declarando que:

$$y_1 \leq y_2 \;\Leftrightarrow\; (\overline{\phi})^{-1}(y_1) \preceq (\overline{\phi})^{-1}(y_2),\; \forall y_1, y_2 \in L.$$

É claro que se L estiver munido dessa ordem, então a função $\overline{\phi}$ é crescente. Isso implica que $\phi : K \to L$ é crescente, pois $\phi = \overline{\phi} \circ q$ e $q : K \to (K/\sim, \preceq)$ é crescente. Na verdade, se L está munido dessa ordem, então a função $\overline{\phi} : K/\sim \to L$ é um isomorfismo de ordem e portanto, o espaço L munido da topologia da ordem é homeomorfo a $K/\sim$. Finalmente, temos que a topologia da ordem coincide com a topologia orginal de L, já que L também é homeomorfo a $K/\sim$, se L estiver munido de sua topologia original. A unicidade de uma ordem total em L que faz com que ϕ seja crescente é mostrada, observando-se que se $\leq_1$ é uma outra ordem total em L que faz com que ϕ seja crescente, então a função $\overline{\phi} : (K/\sim, \preceq) \to (L, \leq_1)$ é estritamente crescente e portanto, temos que $(L, \leq)$ e $(L, \leq_1)$ são isomorfos em ordem. $\square$

OBSERVAÇÃO 2.1.43. Recorde que se $\mathcal{X}$ é um espaço topológico, Y um conjunto e $f : \mathcal{X} \to Y$ uma função sobrejetora, então a coleção:

$$\tau_f = \{U \subset Y : f^{-1}[U] \text{ é um aberto de } \mathcal{X}\}$$

é uma topologia em Y. Essa topologia é chamada de *topologia quociente induzida por f em Y*. Note que τ_f é a topologia mais fina em Y que faz com que a função f seja contínua. Além disso, essa topologia tem a seguinte propriedade: Dado um espaço topológico $\mathcal{Z}$ e uma função $g : Y \to \mathcal{Z}$, se Y está munido da topologia quociente, temos que g é contínua se, e somente se, $g \circ f : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$ é contínua.

No Lema 2.1.44, veremos que a única reta compacta separável, conexa e com mais de um ponto é o intervalo $[0, 1]$. Mais precisamente, toda reta compacta separável, conexa e com mais de um ponto é isomorfa em ordem ao

[2] Como essas topologias coincidem, no resto dessa prova, faremos referência a propriedades topológicas de $K/\sim$ sem especificar qual dessas topologias está sendo considerada.

intervalo $[0,1]$. Na prova dos próximos resultados usaremos o fato que uma reta compacta é conexa se, e somente se, ela não contém pontos consecutivos.

Lema 2.1.44. *Toda reta compacta separável, conexa e com mais de um ponto é isomorfa em ordem ao intervalo* $[0,1]$.

Demonstração. Seja K uma reta compacta separável, conexa e com mais de um ponto. Considere $D = \{t_n : n \geq 1\}$ um subconjunto enumerável e denso em K. Fixados $n, m \geq 1$, suponha sem perda de generalidade que $t_n < t_m$ e tome $h_{n,m} : K \to [0,1]$ uma função contínua, crescente e tal que $h_{n,m}|_{[0,t_n]} \equiv 0$ e $h_{n,m}|_{[t_m, \max K]} \equiv 1$ (a existência de uma tal $h_{n,m}$ é garantida pela Proposição 2.1.31). Defina a função $h : K \to [0,1]$, como:

$$h(t) = \sum_{t_n < t_m} \frac{h_{n,m}(t)}{2^{\varphi(n,m)}},$$

onde $\varphi : \omega \times \omega \to \omega$ é um bijeção fixada. Note que h está bem definida e é contínua. Vamos mostrar que h é um isomorfismo de ordem. Primeiro, vejamos que h é estritamente crescente. Sejam $t, s \in K$ com $t < s$. Do fato de K ser conexa segue que K não tem pontos consecutivos. Portanto, existem $n_0, m_0 \geq 1$ tais que $t < t_{n_0} < t_{m_0} < s$ e assim, $h_{n_0,m_0}(t) = 0$ e $h_{n_0,m_0}(s) = 1$. Além disso, se $n, m \geq 1$ com $t_n < t_m$, então $h_{n,m}$ é crescente. Dessa forma, concluímos que $h(t) < h(s)$. Finalmente, a sobrejetividade de h segue do fato que $h[K]$ é conexa, $h(0) = 0$ e $h(\max K) = 1$. $\square$

Como consequência da Proposição 2.1.40 e do Lema 2.1.44, temos que toda reta compacta separável e não enumerável possui um quociente isomorfo em ordem ao intervalo $[0,1]$ e tal que a pré-imagem de cada ponto de $[0,1]$ pela aplicação quociente é enumerável.

Proposição 2.1.45. *Se K é uma reta compacta separável e não enumerável, então existe uma sobrejeção contínua e crescente $\psi : K \to [0,1]$ tal que $\psi^{-1}(u)$ é enumerável para todo $u \in [0,1]$.*

Demonstração. Defina uma relação de equivalência $\sim$ em K, declarando que $t \sim s$ se, e somente se, os intervalos $[t,s]$ e $[s,t]$ são enumeráveis. É fácil ver que as classes de equivalência de $\sim$ são intervalos de K. Vejamos que as classes de equivalência de $\sim$ são subconjuntos fechados de K. Fixe $t \in K$ e denote por A a classe de equivalência de t. Vamos mostrar que A é fechada. Suponha, por absurdo, que exista $s \in K$ tal que s pertence ao fecho de A e s não pertence a A. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $s < t$. Como K é separável, a Proposição 2.1.32 garante que K satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade e portanto, existe uma sequência estritamente decrescente $(t_n)_{n \geq 1}$ de elementos de A menores que t que converge para s. Note que, $[s,t] = \{s\} \cup \bigcup_{n \geq 1} [t_n, t]$. O que implica que o intervalo $[s,t]$ é enumerável. Essa contradição mostra que s pertence a A e portanto, temos que A é um subconjunto fechado de K. Como as classes de equivalência de $\sim$ são intervalos fechados de K, a Proposição 2.1.40 garante que existe uma ordem total $\preceq$ no quociente $K/\sim$ tal que a topologia quociente e a topologia da ordem coincidem e a aplicação quociente $q : K \to K/\sim$ é crescente. Agora, vamos mostrar que a reta compacta $(K/\sim, \preceq)$ é isomorfa em ordem a $[0,1]$. De acordo com o Lema 2.1.44, basta mostrarmos que $K/\sim$ é conexa, separável e tem mais de um ponto. A separabilidade de $K/\sim$ segue do fato desse quociente ser uma imagem contínua de K, que é separável. Como K não é enumerável, temos que $K/\sim$ tem mais de um ponto. Finalmente, para ver que $K/\sim$ é conexa, note que $K/\sim$ não possui pontos consecutivos. De fato, suponha, por absurdo, que $u, v \in K/\sim$ são pontos consecutivos, digamos $u < v$, e considere $t = \max q^{-1}(u)$ e $s = \min q^{-1}(v)$. Assim, temos que s é o sucessor de t o que implica que $[t,s]$ é enumerável e portanto, $u = v$. Para concluir nosso resultado, considere $\varphi : K/\sim \to [0,1]$ um isomorfismo de ordem e defina $\psi : K \to [0,1]$ como $\psi = \varphi \circ q$. Finalmente, da definição da relação de equivalência $\sim$ segue trivialmente que $\psi^{-1}(u)$ é enumerável, para todo $u \in [0,1]$. □

Corolário 2.1.46. *Seja K uma reta compacta separável e não enumerável. Considere $\psi : K \to [0,1]$ a sobrejeção dada pela Proposição 2.1.45. Definindo:*

$$E = \{u \in [0,1] : |\psi^{-1}(u)| > 2\},$$

temos que E é enumerável e o conjunto dos pontos internos de K está contido no conjunto:

$$\psi^{-1}\big[\,]0,1[\, \setminus Q(\psi)\big] \cup \psi^{-1}[E]. \tag{2.1.2}$$

Demonstração. Para cada $u \in [0,1]$, denote $\psi^{-1}(u)$ por $[a_u, b_u]$. Inicialmente, vamos mostrar que E é enumerável. Note que se $u \in E$, então $]a_u, b_u[$ é um intervalo aberto e não vazio de K. Portanto, $\{]a_u, b_u[: u \in E\}$ é uma família de abertos não vazios e dois a dois disjuntos. Da separabilidade de K vem que E é enumerável. Agora, vamos mostrar que o conjunto dos pontos internos de K está contido em (2.1.2). Seja t um ponto interno de K. Se $\psi(t) = 0$, como t não é isolado à esquerda, temos que $0 \in E$ e portanto, $t \in \psi^{-1}[E]$. Se $\psi(t) = 1$, como t não é isolado à direita, isso implica que $1 \in E$ e portanto, $t \in \psi^{-1}[E]$. Agora, suponha que $u = \psi(t) \in]0,1[$. Note que a conclusão segue se mostrarmos que $|\psi^{-1}(u)| \neq 2$. Suponha, por absurdo, que $|\psi^{-1}(u)| = 2$, então $\psi^{-1}(u) = \{a_u, b_u\}$ e portanto, $t \in \{a_u, b_u\}$. No entanto, nesse caso a_u é isolado à direita e b_u é isolado à esquerda. Assim, t não seria ponto interno de K. Essa contradição conclui a prova. □

Nos dois resultados a seguir, veremos a "universalidade" dos espaços $\mathrm{DA}(X)$, onde X é um subconjunto não enumerável de $[0,1]$, para as retas compactas separáveis e não metrizáveis.

Lema 2.1.47. *Seja L uma reta compacta separável e não metrizável. Existe um subconjunto fechado F de L e um subconjunto não enumerável X de $[0,1]$ tal que F é isomorfo em ordem a $\mathrm{DA}(X)$, se F estiver munido da* *restrição da ordem de L. Em particular, L contém uma cópia homeomorfa de* $\mathrm{DA}(X)$.

Demonstração. Como L é uma reta compacta não metrizável, temos que L não é enumerável. Logo, a Proposição 2.1.45 garante que existe uma função contínua, crescente e sobrejetora $\psi : L \to [0,1]$ cujos conjuntos de nível são enumeráveis. Para cada $u \in [0,1]$, escreva $\psi^{-1}(u) = [a_u, b_u]$ e defina $F = \bigcup_{u\in[0,1]}\{a_u, b_u\}$. Para ver que F é um subconjunto fechado de L, observe que $L \setminus F = \bigcup_{u\in[0,1]}]a_u, b_u[$ e portanto, $L \setminus F$ é aberto. Note que o Corolário 2.1.46 implica que $L \setminus F$ é enumerável, já que os conjuntos de nível de ψ são enumeráveis e vale que $]a_u, b_u[\neq \emptyset$ se, e somente se, $|\psi^{-1}(u)| > 2$. Portanto, temos que F não é metrizável. De fato, se F fosse metrizável, então L também seria metrizável, pois L é a união de F com um conjunto enumerável e sabemos que se um espaço topológico compacto e Hausdorff $\mathcal{X}$ se escreve como uma união enumerável de subconjuntos com peso enumerável, então $\mathcal{X}$ também tem peso enumerável ([**12**, pg. 26]). Tome X como sendo o subconjunto $Q(\psi)$ de $[0,1]$ e note que a função de F em $\mathrm{DA}(X)$ que leva a_u em $(u,0)$, para todo $u \in [0,1]$, e b_u em $(u,1)$, para $u \in X$, é um isomorfismo de ordem, se F estiver munido da restrição da ordem de L. O fato de X ser não enumerável segue do fato que F não é metrizável e da Proposição 2.1.26. Por fim, note que a Proposição 2.1.12 garante que a topologia de subespaço de F coincide com a topologia da ordem de F e portanto, F também é homeomorfo a $\mathrm{DA}(X)$, se munido da topologia de subespaço. □

Proposição 2.1.48. *Seja K uma reta compacta. Se K não é $\aleph_0$-monolítica, então existem um subconjunto não enumerável X de* $[0,1]$ *e um subconjunto fechado F de K tais que F é isomorfo em ordem a* $\mathrm{DA}(X)$, *se F estiver munido da restrição da ordem de K. Em particular, K contém uma cópia homeomorfa de* $\mathrm{DA}(X)$.

Demonstração. Como K não é $\aleph_0$-monolítica, existe um subconjunto A de K que é separável e não possui uma base enumerável de abertos. Se L denota o fecho de A, então L, munido da restrição da ordem de K, é uma reta compacta separável e não metrizável. Dessa forma, o Lema 2.1.47 garante que existe um subconjunto não enumerável X de $[0,1]$ e um subconjunto fechado F de L tais que F é isomorfo em ordem a $\mathrm{DA}(X)$, se F estiver munido da restrição da ordem de L. Além disso, note que a restrição da ordem de L a F coincide com a restrição da ordem de K a F. Finalmente, como F é um subconjunto fechado de K e K é completo, a Proposição 2.1.12 garante que a topologia de subespaço de F coincide com a topologia da ordem de F. □

2.2. O espaço $C(K)$ para K reta compacta

Nessa seção, vamos provar algumas propriedades importantes do espaço de funções contínuas definidas numa reta compacta e tomando valores em

$\mathbb{R}$. Os principais resultados dessa seção são a Proposição 2.2.12, que diz que se K é uma reta compacta, então o conjunto das funções contínuas e crescentes é linearmente denso em $C(K)$ e a Proposição 2.2.14, que diz que toda reta compacta possui a propriedade do extensor.

Como o objeto de estudo desse trabalho é a propriedade da c_0-extensão no contexto de espaços de funções contínuas definidas numa reta compacta e tomando valores em $\mathbb{R}$, o espaço double-arrow e sua generalização $\mathrm{DA}(X)$ terão um papel central no nosso estudo. Mais precisamente, como o Teorema de Sobczyk dá conta das retas compactas metrizáveis, estamos mais interessados nas retas compactas não metrizáveis e como vimos no Lema 2.1.47, toda reta compacta não metrizável e separável contém uma cópia homeomorfa de $\mathrm{DA}(X)$, para algum subconjunto não enumerável X de $[0,1]$. Dessa forma, achamos interessante que os leitores tenham uma visão mais clara do espaço $C(\mathrm{DA})$. Embora esse seja um espaço de Banach complicado, existe uma representação dele como uma soma direta de $\mathbb{R}$ com um subconjunto das funções definidas em $[0,1]$ e tomando valores em $\mathbb{R}$. Na Proposição 2.2.5, veremos que o espaço $C(\mathrm{DA})$ é linearmente isométrico ao espaço $\mathbb{R}\oplus RCLL\big([0,1]\big)$, munido da norma do máximo. Onde $RCLL\big([0,1]\big)$ denota o espaço das funções definidas em $[0,1]$ e tomando valores em $\mathbb{R}$ que são contínuas à direita e têm limite à esquerda, munido da norma do supremo. Inicialmente, vamos mostrar que a norma do supremo está bem definida em $RCLL\big([0,1]\big)$. Ou seja, na Proposição 2.2.4, vamos mostrar que toda função de $RCLL\big([0,1]\big)$ é limitada. Para isso, precisamos dos lemas abaixo. Dada uma função $f : \mathrm{DA} \to \mathbb{R}$, associamos a f as funções $f_0, f_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ definidas como $f_0(u) = f(u,0)$ e $f_1(u) = f(u,1)$, para todo $u \in [0,1]$.

DEFINIÇÃO 2.2.1. Sejam u e L dois números reais, A um subconjunto de $\mathbb{R}$ e $g : A \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que L é o *limite de* $g(v)$ *quando* v *tende a* u *pela direita* se, e somente se, u é um ponto de acumulação à direita de A e dado $\varepsilon > 0$, existe $u' > u$ tal que $g\big[\,]u,u'[\,\cap A\big] \subset \,]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$ e nesse caso, escrevemos $\lim_{v\to u^+} g(v) = L$. De forma análoga, dizemos que L é o *limite de* $g(v)$ *quando* v *tende a* u *pela esquerda* se, e somente se, u é um ponto de acumulação à esquerda de A e dado $\varepsilon > 0$, existe $u' < u$ tal que $g\big[\,]u',u[\,\cap A\big] \subset \,]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$ e nesse caso, escrevemos $\lim_{v\to u^-} g(v) = L$

LEMA 2.2.2. *Seja* $f : \mathrm{DA} \to \mathbb{R}$ *uma função. Vale que* f *é contínua se, e somente se,* $f_1 \in RCLL\big([0,1]\big)$, f_0 *é contínua à esquerda e tem limite à direita,* $f_1(u) = lim_{v\to u^+} f_0(v)$, *para todo* $u \in [0,1[$, *e* $f_0(u) = \lim_{v\to u^-} f_1(v)$, *para todo* $u \in]0,1]$.

DEMONSTRAÇÃO. Note que se f é contínua, então se verifica facilmente que as funções f_0 e f_1 satisfazem a tese desejada. Reciprocamente, suponha que as funções f_0 e f_1 satisfazem as hipóteses descritas no enunciado e vamos mostrar que f é contínua. Note que, se $u \in [0,1]$, então $(u,0)$ é um ponto isolado à direita de DA e $(u,1)$ é um ponto isolado à esquerda de DA e portanto, para estabelecer a continuidade de f, basta mostrarmos que f é contínua à esquerda nos pontos da forma $(u,0)$ e que f é contínua à direita nos pontos da forma $(u,1)$. Vamos mostrar que f é contínua à esquerda num ponto da forma $(u,0)$. Note que podemos supor que $u \in \,]0,1]$, já que $(0,0)$ também é isolado à esquerda. Dado $\varepsilon > 0$, como f_0 é contínua à esquerda em u, existe $v_1 \in [0,u[$ tal que $f_0\big[\,]v_1,u]\,\big] \subset \,]f_0(u)-\varepsilon, f_0(u)+\varepsilon[$. Além disso, estamos supondo que $f_0(u) = \lim_{v\to u^-} f_1(v)$, o que implica que existe $v_2 \in [0,u[$ tal que $f_1\big[\,]v_2,u[\,\big] \subset \,]f_0(u)-\varepsilon, f_0(u)+\varepsilon[$. Tome $v_0 = \max(v_1,v_2)$ e note que $f\big[\,](v_0,1),(u,0)]\,\big] \subset \,]f_0(u)-\varepsilon, f_0(u)+\varepsilon[$. Isso estabelece a continuidade à esquerda de f no ponto $(u,0)$. De forma análoga, mostra-se a continuidade à direita de f num ponto da forma $(u,1)$. □

Lema 2.2.3. *Seja g um elemento de $RCLL\big([0,1]\big)$. Se definirmos a função $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ como $h(u) = \lim_{v\to u^-} g(v)$, para todo $u \in \,]0,1]$ e $h(0) = \lambda$, onde λ é um número real arbitrário, então h é contínua à esquerda e $\lim_{v\to u^+} h(v) = g(u)$, para $u \in [0,1[$.*

Demonstração. Primeiro, vamos estabelecer a continuidade à esquerda de h. Fixe $u \in \,]0,1]$, $\varepsilon > 0$ e note que da definição de h segue que existe $u' < u$ tal que:

$$g\big[\,]u',u[\,\big] \subset \,]h(u)-\varepsilon, h(u)+\varepsilon[\,. \tag{2.2.1}$$

Vejamos que $h\big[\,]u',u[\,\big]$ está contido em $]h(u)-2\varepsilon, h(u)+2\varepsilon[$, o que mostrará que h é contínua à esquerda em u. De fato, considere $v \in \,]u',u[$ e suponha, por absurdo, que $h(v)$ não pertence a $]h(u)-2\varepsilon, h(u)+2\varepsilon[$. Em particular, temos que $h(v)$ não pertence a $[h(u)-\varepsilon, h(u)+\varepsilon]$ e isso implica que existe um $\delta > 0$ tal que:

$$[h(u)-\varepsilon, h(u)+\varepsilon] \cap \,]h(v)-\delta, h(v)+\delta[\, = \emptyset. \tag{2.2.2}$$

Além disso, da definição de h segue que existe $v' < v$ tal que:

$$g\big[\,]v',v[\,\big] \subset \,]h(v)-\delta, h(v)+\delta[\,. \tag{2.2.3}$$

Note que das equações (2.2.1), (2.2.2) e (2.2.3) obtemos uma contradição, já que $]v',v[\,\cap\,]u',u[\, \neq \emptyset$ e portanto, estabelecemos a continuidade à esquerda de h. Agora, vamos mostrar que h tem limite à direita e que esse limite num ponto $u \in [0,1[$ coincide com $g(u)$. Fixado $\varepsilon > 0$, da continuidade à direita de g em u, segue que existe $u' > u$ tal que:

$$g\big[\,]u,u'[\,\big] \subset \,]g(u)-\varepsilon, g(u)+\varepsilon[\,. \tag{2.2.4}$$

Vamos mostrar que $h\big[\,]u,u'[\,\big]$ está contido em $]g(u)-2\varepsilon, g(u)+2\varepsilon[$, o que vai implicar que $g(u) = \lim_{v\to u^+} h(v)$. Suponha, por absurdo, que exista $v \in \,]u,u'[$ tal que $h(v)$ não pertence a $]g(u)-2\varepsilon, g(u)+2\varepsilon[$. Em particular, temos que $h(v)$ não pertence a $[g(u)-\varepsilon, g(u)+\varepsilon]$ e isso implica que existe um $\delta > 0$ tal que:

$$[g(u)-\varepsilon, g(u)+\varepsilon] \cap \,]h(v)-\delta, h(v)+\delta[\, = \emptyset. \tag{2.2.5}$$

Além disso, da definição de h vem que existe $v' < v$ tal que:

$$g\big[\,]v',v[\,\big] \subset \,]h(v)-\delta, h(v)+\delta[\,. \tag{2.2.6}$$

Note que das equações (2.2.4), (2.2.5) e (2.2.6) obtemos uma contradição, já que $]v', v[\,\cap\,]u, u'[\, \neq \emptyset$. $\square$

PROPOSIÇÃO 2.2.4. *Todo elemento de $RCLL\big([0,1]\big)$ é uma função limitada.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $g \in RCLL\big([0,1]\big)$ e defina $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ como $h(u) = \lim_{v\to u^-} g(v)$, se $u \in\,]0,1]$ e $h(0) = \lambda$, onde λ é um número real fixado. De acordo com o Lema 2.2.3, temos que h é contínua à esquerda, tem limite à direita e $g(u) = \lim_{v\to u^+} h(v)$, para todo $u \in [0,1[$. Dessa forma, o Lema 2.2.2 garante que a função $f : \mathrm{DA} \to \mathbb{R}$ definida como $f(u,0) = h(u)$ e $f(u,1) = g(u)$, para todo $u \in [0,1]$, é contínua. Para concluir a prova, note que como DA é compacto e f é contínua, temos que f é uma função limitada e além disso, a imagem de g está contida na imagem de f. $\square$

PROPOSIÇÃO 2.2.5. *O espaço $C(\mathrm{DA})$ é linearmente isométrico ao espaço $\mathbb{R} \oplus RCLL\big([0,1]\big)$, munido da norma do máximo.*

DEMONSTRAÇÃO. O Lema 2.2.2 garante que dada $f \in C(\mathrm{DA})$, a função f_1 pertence a $RCLL\big([0,1]\big)$. Dessa forma, podemos definir um operador $T : C(\mathrm{DA}) \to \mathbb{R} \oplus RCLL\big([0,1]\big)$ que a cada elemento f de $C(\mathrm{DA})$ associa o elemento $\big(f(0,0), f_1\big)$ de $\mathbb{R} \oplus RCLL\big([0,1]\big)$. Vamos mostrar que T é uma isometria linear. Inicialmente, vejamos que T preserva a norma. Fixado um elemento f de $C(\mathrm{DA})$, note que $\|T(f)\| = \max\big(\|f_1\|_\infty, |f(0,0)|\big)$ e que $\|f\|_\infty = \max(\|f_1\|_\infty, \|f_0\|_\infty)$. Além disso, temos que:

$$\sup_{u\in]0,1]} |f_0(u)| = \sup_{u\in]0,1]} \big(\lim_{v\to u^-} |f_1(v)|\big) \leq \|f_1\|_\infty,$$

o que implica que:

$$\|f\|_\infty = \max\Big(\|f_1\|_\infty, \max\big(|f(0,0)|, \sup_{u\in]0,1]} |f_0(u)|\big)\Big) = \|T\|.$$

Agora, vamos mostrar que T é sobrejetora. Seja $(\lambda, g) \in \mathbb{R} \oplus RCLL\big([0,1]\big)$ e defina $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ como $h(u) = \lim_{v\to u^-} g(v)$, para todo $u \in\,]0,1]$ e $h(0) = \lambda$. O Lema 2.2.3 nos diz que h é contínua à esquerda, tem limite à direita e que $g(u) = \lim_{v\to u^+} h(u)$, para todo $u \in [0,1[$. De acordo com o Lema 2.2.2, temos que a função $f : \mathrm{DA} \to \mathbb{R}$ definida como $f(u,1) = g(u)$ e $f(u,0) = h(u)$, para todo $u \in [0,1]$, pertence a $C(\mathrm{DA})$. Além disso, é claro que $T(f) = (\lambda, g)$. Isso estabelece a sobrejetividade do operador T. $\square$

OBSERVAÇÃO 2.2.6. De forma mais geral, temos uma representação do espaço $C\big(\mathrm{DA}(X)\big)$ envolvendo funções definidas em $[0,1]$ e tomando valores em $\mathbb{R}$. Fixado $X \subset [0,1]$, definamos $LCRL_X\big([0,1]\big)$ como o conjunto das funções de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$ que são contínuas nos pontos de $[0,1] \setminus X$, contínuas à esquerda nos pontos de X e possuem limite à direita nos pontos de X. Para entender o que acontece com o espaço $C\big(\mathrm{DA}(X)\big)$, dois casos devem ser analisados separadamente, a saber, o caso em que 1 pertence a X e o caso em que 1 não pertence a X. Vamos analisar o caso em que 1 pertence a

X. Para mostrar que os elementos de $LCRL_X\big([0,1]\big)$ são funções limitadas, fixada $g \in LCRL_X\big([0,1]\big)$, defina $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ como $h(u) = \lim_{v\to u^+} g(v)$, se $u \in [0,1[$ e $h(1) = \lambda$, onde λ é um número real fixado. Note que um argumento similar ao da prova do Lema 2.2.3, mostra que a função h é contínua nos pontos de $[0,1] \setminus X$, é contínua à direita nos pontos de X e $\lim_{v\to u^-} h(v) = g(u)$, para $u \in X \setminus \{0\}$. Considere a função $f : \mathrm{DA}(X) \to \mathbb{R}$ definida como $f(u,0) = g(u)$ e $f(u,1) = h(u)$, para $u \in [0,1]$. Com uma prova análoga à do Lema 2.2.2, mostra-se que a função f assim definida é contínua. Dessa forma, a conclusão que g é limitada segue do fato que $\mathrm{DA}(X)$ é compacto, f é contínua e a imagem de g está contida na imagem de f. Portanto, podemos considerar o espaço $LCRL_X\big([0,1]\big)$ munido da norma do supremo. Finalmente, procedendo como na demonstração da Proposição 2.2.5 concluímos que o operador

$$C\big(\mathrm{DA}(X)\big) \ni f \mapsto \big(f(1,1), f_0\big) \in \mathbb{R} \oplus LCRL_X\big([0,1]\big)$$

é uma isometria linear, onde $f_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$ é definida como $f_0(u) = f(u,0)$, para todo $u \in [0,1]$ e o espaço $\mathbb{R} \oplus LCRL_X\big([0,1]\big)$ está munido da norma do máximo. Analogamente, se 1 não pertence a X, então mostra-se que $C\big(\mathrm{DA}(X)\big)$ é linearmente isométrico ao espaço $LCRL_X\big([0,1]\big)$.

Agora, vamos mostrar na Proposição 2.2.12 que o conjunto das funções contínuas e crescentes é linearmente denso em $C(K)$. Para isso, precisamos de diversos lemas que apresentamos a seguir. Dada uma reta compacta K, uma *partição* de K é um subconjunto finito P de K tal que 0 e $\max K$ pertencem a P. Se $P = \{0 = t_0 < \ldots < t_k = \max K\}$ é uma partição de K, então os *intervalos de* P são os elementos do conjunto

$$\big\{[t_i, t_{i+1}] : i = 0, \ldots, k-1\big\}.$$

LEMA 2.2.7. *Seja K uma reta compacta. Se $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é uma cobertura de K por intervalos abertos, então existe uma partição*

$$P = \{0 = t_0 < \ldots < t_k = \max K\}$$

de K, tal que fixado $i = 0, \ldots, k-1$ vale que $[t_i, t_{i+1}] \subset I_\lambda$, para algum λ ou t_{i+1} é o sucessor de t_i.

DEMONSTRAÇÃO. Da compacidade de K segue que existe um subconjunto finito F de Λ tal que $K = \bigcup_{\lambda\in F} I_\lambda$. Escreva como $\{t_0, \ldots, t_n\}$ o conjunto de todas as extremidades dos intervalos I_λ tais que $\lambda \in F$. Reordenando os pontos se necessário, podemos supor que $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$. Claramente, temos que $t_0 = 0$ e $t_n = \max K$. Para cada $j = 1, \ldots, n$, se $]t_{i-1}, t_i[\neq \emptyset$, seja s_i um elemento de $]t_{i-1}, t_i[$. É fácil ver que a partição

$$P = \{t_i : i = 0, \ldots, n\} \cup \{s_i : i = 1, \ldots, n \text{ e }]t_{i-1}, t_i[\neq \emptyset\}$$

de K satisfaz a tese do lema. □

Note que dados um espaço métrico M e um subconjunto A de M, denotamos por $\mathrm{diam}(A)$ o diâmetro de A.

LEMA 2.2.8. *Seja K uma reta compacta. Dados uma função contínua $f : K \to \mathbb{R}$ e um número real $\varepsilon > 0$, existe uma partição*

$$P = \{0 = t_0 < \ldots < t_k = \max K\}$$

de K, tal que $diam\big(f[t_i, t_{i+1}]\big) < \varepsilon$ ou t_{i+1} é o sucessor de t_i, para todo $i = 0, \ldots, k-1$.

DEMONSTRAÇÃO. Dado $t \in K$, segue da continuidade de f em t que existe um intervalo aberto I_t tal que $t \in I_t$ e $diam\big(f[I_t]\big) < \varepsilon$. Note que a conclusão segue se tomarmos P como sendo a partição dada pelo Lema 2.2.7 para a cobertura $(I_t)_{t\in K}$ de K por intervalos abertos. □

DEFINIÇÃO 2.2.9. Sejam K uma reta compacta e $f : K \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é *monótona por partes* se, e somente se, existe uma partição

$$P = \{0 = t_0 < \ldots < t_k = \max K\}$$

de K tal que $f|_{[t_i,t_{i+1}]}$ é monótona, para todo $i = 0, \ldots, k-1$.

LEMA 2.2.10. *Seja K uma reta compacta. O conjunto das funções contínuas e monótonas por partes é denso em $C(K)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $f \in C(K)$ e $\varepsilon > 0$. Note que a conclusão segue se mostrarmos que existe uma função $g \in C(K)$ monótona por partes tal que $\|g - f\|_\infty < \varepsilon$. De acordo com o Lema 2.2.8, existe uma partição:

$$P = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = \max K\},$$

de K tal que $diam\big(f[t_i, t_{i+1}]\big) < \frac{\varepsilon}{2}$ ou t_{i+1} é o sucessor de t_i, $i = 0, \ldots, k-1$. Vamos definir g descrevendo cada uma de suas restrições aos intervalos da partição P. Fixado um $i < k$, se $]t_i, t_{i+1}[\ \neq \emptyset$, seja $g_i : K \to [0, 1]$ uma função contínua e crescente com $g_i(t_i) = 0$ e $g_i(t_{i+1}) = 1$, cuja existência é garantida pela Proposição 2.1.31 e defina

$$g|_{[t_i,t_{i+1}]}(s) = f(t_i) + g_i(s)\big(f(t_{i+1}) - f(t_i)\big).$$

Caso contrário, defina $g(t_i) = f(t_i)$ e $g(t_{i+1}) = f(t_{i+1})$. Note que g é contínua, monótona por partes e $\|g - f\|_\infty < \varepsilon$. □

LEMA 2.2.11. *Sejam K uma reta compacta e $f : K \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se f é monótona por partes, então f pertence ao subespaço de $C(K)$ gerado pelas funções contínuas e crescentes.*

DEMONSTRAÇÃO. Mostraremos o resultado fazendo indução na menor cardinalidade de uma partição que atesta que uma função contínua e monótona por partes definida numa reta compacta e tomando valores em $\mathbb{R}$ é monótona por partes. Seja k o menor natural tal que existe uma partição P de K com k elementos e que atesta que f é monótona por partes. Se $k = 2$, então f é crescente ou decrescente. Agora, fixe $k > 2$ e escreva a partição P como:

$$P = \{0 = t_0 < \ldots < t_{k-2} < t_{k-1} = \max K\}.$$

Note que $[0, t_{k-2}]$ é uma reta compacta e que a função $f|_{[0,t_{k-2}]}$ é contínua e monótona por partes. Logo, da hipótese de indução segue que existem funções contínuas e crescentes $g_i : [0, t_{k-2}] \to \mathbb{R}$ e escalares λ_i tais que:

$$f|_{[0,t_{k-2}]} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i.$$

Para cada $i = 1, \ldots, m$, seja $h_i : K \to \mathbb{R}$ a extensão de g_i que é constante e igual a $g_i(t_{k-2})$ no intervalo $[t_{k-2}, \max K]$. Escreva $c = f(t_{k-2})$ e defina $h_{m+1} : K \to \mathbb{R}$ como sendo a função que é identicamente nula em $[0, t_{k-2}]$ e que restrita ao intervalo $[t_{k-2}, \max K]$ coincide com $f|_{[t_{k-2},\max K]} - c$, se a restrição de f a $[t_{k-2}, \max K]$ for crescente e com $c - f|_{[t_{k-2},\max K]}$, caso contrário. Note que as funções h_i definidas acima são contínuas e crescentes e além disso, vale que $f = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i h_i$, onde $\lambda_{m+1} = 1$ se $f|_{[t_{k-2},\max K]}$ é crescente e $\lambda_{m+1} = -1$, se $f|_{[t_{k-2},\max K]}$ é decrescente. □

PROPOSIÇÃO 2.2.12. *Se K é uma reta compacta, então o conjunto das funções contínuas e crescentes é linearmente denso em $C(K)$.*

DEMONSTRAÇÃO. A conclusão segue diretamente dos Lemas 2.2.10 e 2.2.11. □

Sabemos que se K é um espaço compacto Hausdorff, F é um subconjunto fechado de K e $f : F \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então o Teorema da extensão de Tietze ([**34**, 15.8]) garante que f admite uma extensão contínua a K. Uma pergunta interessante que podemos nos fazer é a seguinte: Fixado um fechado F de K, podemos escolher as extensões contínuas a K dos elementos de $C(F)$ de forma linear e contínua? Nesse contexto, introduzimos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 2.2.13. Dados um espaço compacto Hausdorff K e um subconjunto fechado F de K, dizemos que F possui a *propriedade do extensor em K* se, e somente se, F admite um operador de extensão em K, onde um *operador de extensão* para F em K é um operador limitado $E_F : C(F) \to C(K)$ que a cada elemento f de $C(F)$ associa uma extensão contínua de f a K. Dizemos que K possui a *propriedade do extensor* se, e somente se, todo subconjunto fechado de K tem a propriedade do extensor em K.

Os exemplos mais clássicos de compactos com a propriedade do extensor são os compactos metrizáveis (veja a prova de [**24**, Theorem 6.6]). Alguns exemplos de compactos que não possuem a propriedade do extensor podem ser encontrados em [**5**]. Na próxima proposição, veremos que se K é uma reta compacta, então K possui a propriedade do extensor.

PROPOSIÇÃO 2.2.14. *Toda reta compacta possui a propriedade do extensor.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam K uma reta compacta e F um subconjunto fechado de K. Se $F = \emptyset$, então $C(F)$ é o espaço nulo e portanto, o operador nulo é um operador de extensão para F em K. Note que se F é não vazio, então podemos supor, sem perda de generalidade, que F contém os pontos 0 e $\max K$. De fato, suponha que tenhamos mostrado que todo subconjunto fechado de K que contém os pontos 0 e $\max K$ admite um operador de extensão em K. Dado um subconjunto fechado e não vazio F de K, defina $G = F \cup \{0, \max K\}$. Note que G é um subconjunto fechado de K e portanto, nossa hipótese garante que G admite um operador de extensão em K. Denote por $E_G : C(G) \to C(K)$ um operador de extensão para G em K e note que a função $E_G \circ S : C(F) \to C(K)$ é um operador de extensão para F em K, onde o operador limitado $S : C(F) \to C(G)$ é definido como $S(f)|_F = f$, $S(f)(0) = f(\min F)$ e $S(f)(\max K) = f(\max F)$. Note que as componentes convexas do complementar de F são intervalos abertos de K (Proposições 2.1.19 e 2.1.17). Portanto, como 0 e $\max K$ pertencem a F, podemos escrever o complementar de F como $K \setminus F = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}]a_\lambda, b_\lambda[$, onde cada $]a_\lambda, b_\lambda[$ é uma componente convexa de $K \setminus F$. Para cada $\lambda \in \Lambda$, fixe uma função contínua $h_\lambda : [a_\lambda, b_\lambda] \to [0, 1]$ que satisfaz $h_\lambda(a_\lambda) = 0$ e $h_\lambda(b_\lambda) = 1$, cuja existência é garantida pelo Lema de Urysohn. Fixada uma função contínua $f : F \to \mathbb{R}$, vamos construir uma extensão contínua $\tilde{f} : K \to \mathbb{R}$ de f, definindo o valor de $\tilde{f}$ em cada intervalo $]a_\lambda, b_\lambda[$. Dado $\lambda \in \Lambda$, seja $f_\lambda : [a_\lambda, b_\lambda] \to \mathbb{R}$ a função contínua definida como:

$$f_\lambda(t) = h_\lambda(t) f(b_\lambda) + \big(1 - h_\lambda(t)\big) f(a_\lambda), \ \forall t \in [a_\lambda, b_\lambda].$$

Finalmente, defina $\tilde{f} : K \to \mathbb{R}$ como sendo a única função que restrita a F coincide com f e que restrita a cada intervalo $[a_\lambda, b_\lambda]$ coincide com f_λ. No que segue, mostraremos que $\tilde{f}$ é contínua. Note que $\tilde{f}$ é contínua em cada intervalo aberto $]a_\lambda, b_\lambda[$, já que nesse aberto $\tilde{f}$ coincide com a função contínua f_λ. Agora, considere $t \in F$ e vamos mostrar que $\tilde{f}$ é contínua em t. Para isso, devemos mostrar que $\tilde{f}$ é contínua à direita e à esquerda em t. Verifiquemos que $\tilde{f}$ é contínua à direita em t. A prova da continuidade à esquerda de $\tilde{f}$ em t é mostrada de forma análoga. Se t é um ponto isolado à direita de K, então $\tilde{f}$ é contínua à direita em t. Suponha que t não seja um ponto isolado à direita de K. Inicialmente, vamos tratar o caso em que t é um ponto isolado à direita de F, relativamente a K. Vejamos que nesse caso, existe um $\lambda \in \Lambda$ tal que $t = a_\lambda$ e portanto, $\tilde{f}$ será contínua à direita em t, já que $\tilde{f}$ coincide com f_λ em $[a_\lambda, b_\lambda]$ e f_λ é contínua à direita em a_λ. Do fato de t ser um ponto isolado à direita de F, relativamente a K que não é um ponto isolado à direita de K, segue que existe um elemento t' de K tal que $t < t'$, o intervalo $]t, t'[$ de K é não vazio e $]t, t'[\cap F = \emptyset$. É fácil ver que $t = a_\lambda$, onde λ é o único elemento de Λ que satisfaz $]t, t'[\cap]a_\lambda, b_\lambda[\neq \emptyset$. Agora, vamos analisar o caso em que t não é isolado à direita em F, relativamente a K. Em particular, temos que t não é um ponto isolado à direita de F, relativamente a F. Note que da continuidade de f à direita em t, segue que fixado $\varepsilon > 0$, existe $s \in F$ tal que $s > t$ e:

$$|f(t) - f(r)| < \varepsilon, \ \forall r \in [t, s] \cap F. \tag{2.2.7}$$

Vamos mostrar que se $r \in [t, s[$, então $|\tilde{f}(r) - \tilde{f}(t)| < \varepsilon$, o que vai implicar que $\tilde{f}$ é contínua à direita em t. Note que se r pertence a F, então a equação (2.2.7) implica que:

$$|\tilde{f}(r) - \tilde{f}(t)| = |f(r) - f(t)| < \varepsilon.$$

Caso contrário, existe λ em Λ tal que $r \in]a_\lambda, b_\lambda[$, o que implica que a_λ e b_λ pertencem a $[t, s] \cap F$. Portanto, a equação (2.2.7) garante que $f(a_\lambda)$ e $f(b_\lambda)$ pertencem a $]f(t) - \varepsilon, f(t) + \varepsilon[$. Dessa forma, temos que $\tilde{f}(r)$ pertence a $]f(t) - \varepsilon, f(t) + \varepsilon[$, pois $\tilde{f}(r) = f_\lambda(r)$, $f_\lambda(r)$ é uma combinação convexa de $f(a_\lambda)$ e $f(b_\lambda)$ e o intervalo $]f(t) - \varepsilon, f(t) + \varepsilon[$ é convexo. Assim, a função $E_F : C(F) \to C(K)$ que associa a cada $f \in C(F)$ a função $\tilde{f}$ como construída acima, está bem definida. Facilmente verifica-se que E_F é linear. Agora, vamos mostrar que E_F é limitado. Na verdade, fixado $f \in C(F)$, vale que $\|E_F(f)\|_\infty = \|f\|_\infty$. De fato, temos que $\|f\|_\infty \leq \|E_F(f)\|_\infty$, já que $E_F(f)$ é uma extensão de f. O fato que $\|E_F(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ segue da definição de E_F e da desigualdade $\|f_\lambda\|_\infty \leq \max\big(|f(a_\lambda)|, |f(b_\lambda)|\big)$, para todo $\lambda \in \Lambda$. $\square$

Recorde que se K é um espaço compacto Hausdorff e F é um subconjunto fechado de K, então denotamos por $\rho_F : C(K) \to C(F)$ o operador de restrição que a cada função de $C(K)$ associa sua restrição a F. Note que um operador limitado $R : C(F) \to C(K)$ é um operador de extensão para F em K se, e somente se, R é uma inversa à direita de ρ_F. Portanto, o Lema 2.2.15 (a) abaixo implica que F possui a propriedade do extensor em K se, e somente se, $\operatorname{Ker} \rho_F$ é um subespaço complementado de $C(K)$.

Lema 2.2.15. *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ um operador limitado. As seguintes condições são satisfeitas:*

(a) *T admite uma inversa à direita limitada $S : Y \to X$ se, e somente se, T é sobrejetor e $\operatorname{Ker} T$ é complementado em X;*
(b) *T admite uma inversa à esquerda limitada $S : Y \to X$ se, e somente se, T é injetor e $T[X]$ é um subespaço fechado e complementado de Y.*

Demonstração. Vamos provar (a). Inicialmente, suponha que T possue uma inversa à direita $S : Y \to X$. É claro que T é sobrejetora. Note que se $P = I_X - S \circ T$, então $P : X \to \operatorname{Ker} T$ é uma projeção limitada de X no $\operatorname{Ker} T$, onde I_X denota o operador identidade de X. Reciprocamente, suponha que T seja sobrejetor e $\operatorname{Ker} T$ seja complementado em X. Então, temos que $X = \operatorname{Ker} T \oplus W$, onde W é um subespaço fechado de X. Note que $T|_W : W \to Y$ é um operador limitado e bijetor e portanto, é um isomorfismo. A conclusão segue definindo-se S como $(T|_W)^{-1}$. Agora, vamos provar (b). Suponha que T possua uma inversa limitada à esquerda $S : Y \to X$. É facilmente verificado que T é injetora e que $T[X]$ é um subespaço fechado de Y. Para ver que $T[X]$ é complementado em Y, note que $T \circ S : Y \to T[X]$ é uma projeção limitada de Y na imagem de T. Reciprocamente, suponha que T seja injetor e sua imagem seja fechada e complementada em Y. Então, $T : X \to T[X]$ é um operador limitado e bijetor entre espaços de Banach e portanto, um isomorfismo. Denote por $R : T[X] \to X$ a inversa de T, quando T é visto com contradomínio $T[X]$ e considere $P : Y \to T[X]$ uma projeção limitada de Y em $T[X]$. Finalmente, defina $S : Y \to X$ como $S = R \circ P$. $\square$

COROLÁRIO 2.2.16. *Seja K uma reta compacta. Se F é um subconjunto fechado de K, então $C(K)$ contém uma cópia isomorfa de $C(F)$. Mais precisamente, $E_F : C(F) \to C(K)$ é um isomorfismo sobre sua imagem, onde E_F denota um operador de extensão para F em K.*

DEMONSTRAÇÃO. De acordo com a Proposição 2.2.14, existe um operador de extensão $E_F : C(F) \to C(K)$ para F em K. Sabemos que o operador de restrição ρ_F é uma inversa à esquerda de E_F. Portanto, o Lema 2.2.15 (b) garante que E_F é injetor e sua imagem é fechada em $C(K)$, o que implica que E_F é um isomorfismo sobre sua imagem. $\square$

Dados um espaço compacto Hausdorff K e um subconjunto fechado F de K, definimos o seguinte subespaço fechado de $C(K)$:

$$C(K|F) = \{f \in C(K) : f|_F \equiv 0\}.$$

Note que $C(K|F) = \operatorname{Ker} \rho_F$. Dessa forma, temos o seguinte corolário da Proposição 2.2.14 e do Lema 2.2.15 (a).

COROLÁRIO 2.2.17. *Seja K uma reta compacta. Se F é um subconjunto fechado de K, então o subespaço $C(K|F)$ é complementado em $C(K)$.* $\square$

2.3. O espaço dual de $C(K)$

Nessa seção, vamos discutir um pouco sobre a representação do espaço dual de $C(K)$ como um espaço de medidas, para um compacto Hausdorff arbitrário K e vamos estabelecer algumas propriedades desse espaço de medidas. Embora, consideremos esses resultados básicos, optamos por apresentá-los aqui pois algumas definições têm variações na literatura e também para fixar notações. Recorde que um par $(X, \mathcal{A})$ é dito um *espaço mensurável* se, e somente se, X é um conjunto e $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de X.

DEFINIÇÃO 2.3.1. Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável. Uma *medida com sinal* nesse espaço é uma função $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tal que μ assume no máximo um dos valores do conjunto $\{-\infty, +\infty\}$ e satisfaz as seguintes condições:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$;
(b) $\mu\big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\big) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$, se $(A_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de elementos de $\mathcal{A}$ dois a dois disjuntos.

Dada uma medida $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, dizemos que μ é uma *medida não negativa* se a imagem de μ está contida em $[0, +\infty]$ e dizemos que μ é uma *medida finita* se a imagem de μ está contida em $\mathbb{R}$. Muitas propriedades de uma medida com sinal são descritas em termos de sua variação total.

DEFINIÇÃO 2.3.2. Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e μ uma medida com sinal nesse espaço. Definimos a função $|\mu| : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$, que é chamada de *variação total de* μ, como:

$$|\mu|(A) = \sup\Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(S_n)| : \; S_n \in \mathcal{A}, \forall n \geq 1, S_n \cap S_m = \emptyset,$$

$$\text{se } n \neq m \text{ e } A = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \Big\},$$

para todo $A \in \mathcal{A}$.

Na Proposição 2.3.4, veremos que se μ é uma medida com sinal, então sua variação total é uma medida não negativa. Para provar a Proposição 2.3.4, o seguinte lema é útil.

LEMA 2.3.3. *Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e μ uma medida com sinal nesse espaço. Se A e B pertencem a $\mathcal{A}$ e satisfazem $A \subset B$, então $|\mu|(A) \leq |\mu|(B)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $(S_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de elementos dois a dois disjuntos de $\mathcal{A}$ tal que $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} S_n$ e note que:

$$|\mu|(B) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} |\mu(S_n)| + |\mu(B \setminus A)| \geq \sum_{n=1}^{+\infty} |\mu(S_n)|,$$

o que implica que $|\mu|(A) \leq |\mu|(B)$. □

PROPOSIÇÃO 2.3.4. *Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável. Se μ é uma medida com sinal nesse espaço, então sua variação total $|\mu| : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ é uma medida não negativa.*

DEMONSTRAÇÃO. É claro que $|\mu|(A) \geq 0$, para todo $A \in \mathcal{A}$. Vamos mostrar que a função $|\mu|$ satisfaz as condições (a) e (b) da Definição 2.3.1. Claramente, $|\mu|$ satisfaz a condição (a). Agora, vejamos que $|\mu|$ satisfaz (b). Seja $(A_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de elementos de $\mathcal{A}$ dois a dois disjuntos. Inicialmente, vamos mostrar que $|\mu|(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |\mu|(A_n)$. Note que para isso, basta verificarmos que se $(S_m)_{m \geq 1}$ é uma sequência de elementos de $\mathcal{A}$ dois a dois disjuntos tais que $A = \bigcup_{m=1}^{+\infty} S_m$, onde $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, então $\sum_{m=1}^{+\infty} |\mu(S_m)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |\mu|(A_n)$. Fixado $m \geq 1$, temos que:

$$|\mu(S_m)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |\mu(A_n \cap S_m)|. \tag{2.3.1}$$

Por outro lado, fixado $n \geq 1$, temos que:

$$|\mu|(A_n) \geq \sum_{m=1}^{+\infty} |\mu(A_n \cap S_m)|. \tag{2.3.2}$$

Portanto:

$$\sum_{m=1}^{+\infty} |\mu(S_m)| \overset{(2.3.1)}{\leq} \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} |\mu(A_n \cap S_m)| \overset{(*)}{=} \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} |\mu(A_n \cap S_m)|$$
$$\overset{(2.3.2)}{\leq} \sum_{n=1}^{+\infty} |\mu|(A_n).$$

Note que a série $\sum_{n,m=1}^{+\infty} |\mu(A_n \cap S_m)|$ é comutativamente convergente e portanto, podemos trocar a ordem das somatórias e obter a igualdade (*). Agora, vamos mostrar que $\sum_{n=1}^{+\infty} |\mu|(A_n) \leq |\mu|\big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\big)$. Se existe um natural $n \geq 1$ tal que $|\mu|(A_n) = +\infty$, então o Lema 2.3.3 garante que $|\mu|\big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\big) = +\infty$. Caso contrário, note que fixados $\varepsilon > 0$ e $n \geq 1$, existe uma sequência $(S_m^n)_{m\geq 1}$ de elementos dois a dois disjuntos de $\mathcal{A}$ tal que $A_n = \bigcup_{m=1}^{+\infty} S_m^n$ e:

$$|\mu|(A_n) - \frac{\varepsilon}{2^n} < \sum_{m=1}^{+\infty} |\mu(S_m^n)|.$$

O que implica que:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\mu|(A_n) - \varepsilon \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} |\mu(S_m^n)| \leq |\mu|\big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\big), \tag{2.3.3}$$

já que $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n,m=1}^{+\infty} S_m^n$. Como a equação (2.3.3) vale para todo $\varepsilon > 0$, concluímos que $\sum_{n=1}^{+\infty} |\mu|(A_n) \leq |\mu|\big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\big)$. □

No contexto de medidas com sinal, um resultado importante é o Teorema de decomposição de Hahn–Jordan que garante que toda medida com sinal pode ser escrita como a diferença de duas medidas não negativas. Dados um espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$ e uma medida com sinal nesse espaço μ, dizemos que um subconjunto $A \in \mathcal{A}$ é *positivo* (resp., *negativo*) com respeito a μ se, e somente se, $\mu(E) \geq 0$ (resp., $\mu(E) \leq 0$), para todo subconjunto E de A tal que $E \in \mathcal{A}$. Um par (P, N) é dito uma *decomposição de Hahn para* μ se, e somente se, P é positivo com respeito a μ, N é negativo com respeito a μ, $P \cap N = \emptyset$ e $X = P \cup N$. O Teorema de decomposição de Hahn–Jordan garante que toda medida admite uma decomposição de Hahn. Embora, essa decomposição não seja única, é fácil ver que se (P', N') é outra decomposição de Hahn para μ, então $P \triangle P' = N \triangle N'$ e esse é um conjunto nulo para μ, ou seja, $\mu(A) = 0$, para todo $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \subset P \triangle P'$, onde $\triangle$ denota a diferença simétrica.

Teorema 2.3.5. *(Teorema de decomposição de Hahn–Jordan) Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e μ uma medida com sinal nesse espaço. Existe uma decomposição de Hahn (P, N) para μ. Além disso, se definirmos $\mu^+, \mu^- : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ como $\mu^+(A) = \mu(A \cap P)$ e $\mu^-(A) = -\mu(A \cap N)$, para todo $A \in \mathcal{A}$, então μ^+ e μ^- são medidas não negativas e $\mu = \mu^+ - \mu^-$.*

Demonstração. Veja ([**27**, Proposition 21 e Proposition 22]). $\square$

Observação 2.3.6. Dados um espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$ e medidas μ e ν nesse espaço, dizemos que μ e ν são *mutuamente singulares* se, e somente se, existem subconjuntos disjuntos A e B de X tais que $A, B \in \mathcal{A}$, $X = A \cup B$ e $\mu(A) = \nu(B) = 0$. Note que fixada uma decomposição de Hahn para uma medida μ no espaço $(X, \mathcal{A})$, as medidas μ^+ e μ^- definidas como no Teorema 2.3.5 são mutuamente singulares. Além disso, vale que fixada μ medida com sinal no espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$ existe um único par (μ^+, μ^-) de medidas não negativas, mutuamente singulares e tais que $\mu = \mu^+ - \mu^-$. Esse par de medidas é chamado de *a decomposição de Jordan* de μ.

Corolário 2.3.7. *Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e μ uma medida com sinal nesse espaço. Então, temos que $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$, onde (μ^+, μ^-) é a decomposição de Jordan de μ.*

Demonstração. Fixado $A \in \mathcal{A}$, vejamos que $|\mu|(A) \leq \mu^+(A) + \mu^-(A)$. Considere $(S_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de elementos dois a dois disjuntos de $\mathcal{A}$ tal que $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} S_n$. Usando o Teorema 2.3.5, obtemos:

$$|\mu(S_n)| \leq |\mu^+(S_n)| + |\mu^-(S_n)| = \mu^+(S_n) + \mu^-(S_n), \tag{2.3.4}$$

para todo $n \geq 1$. Portanto:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\mu(S_n)| \overset{(2.3.4)}{\leq} \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^+(S_n) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^-(S_n) = \mu^+(A) + \mu^-(A), \tag{2.3.5}$$

sendo que a última igualdade vale pois $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} S_n$ e μ^+ e μ^- são medidas. Logo, da desigualdade (2.3.5) e da definição da função $|\mu|$ calculada em A vem que $|\mu|(A) \leq \mu^+(A) + \mu^-(A)$. Por outro lado, tomando (P, N) uma decomposição de Hahn para μ, temos que $A = (A \cap P) \cup (A \cap N)$ e portanto:

$$|\mu|(A) \geq |\mu(A \cap P)| + |\mu(A \cap N)| = \mu^+(A) + \mu^-(A),$$

o que estabelece nosso resultado. $\square$

Observação 2.3.8. Note que se μ é uma medida com sinal finita, então μ^+ e μ^- também são finitas (veja a definição de μ^+ e μ^- no Teorema 2.3.5). Logo, o Corolário 2.3.7 garante que a medida $|\mu|$ é finita.

Nesse trabalho, estamos principalmente interessados em medidas definidas na σ-álgebra dos borelianos de um espaço compacto e Hausdorff K. Denotaremos por $\mathcal{B}_K$ a σ-álgebra dos borelianos de K e uma medida definida em $\mathcal{B}_K$ será chamada de *medida de Borel em K*. Dentre as medidas de Borel, as medidas regulares se destacam.

Definição 2.3.9. Seja K um espaço compacto Hausdorff. Dizemos que uma medida não negativa $\mu : \mathcal{B}_K \to [0, +\infty]$ é *regular* se, e somente se, dado $B \in \mathcal{B}_K$ as seguintes condições são satisfeitas:

(a) $\mu(B) = \inf\{\mu(U) : U$ é aberto de K e $B \subset U\}$;
(b) $\mu(B) = \sup\{\mu(F) : F$ é fechado de K e $F \subset B\}$.

Se $\mu : \mathcal{B}_K \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ é uma medida com sinal, então dizemos que μ é *regular* se, e somente se, a medida $|\mu|$ é regular.

Na próxima proposição, veremos que no caso em que μ é uma medida de Borel finita, as condições (a) e (b) da Definição 2.3.9 são equivalentes.

PROPOSIÇÃO 2.3.10. *Sejam K um espaço compacto Hausdorff e μ uma medida de Borel com sinal em K. Se μ é finita, então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *μ é regular;*
(ii) *Dado B um boreliano de K e $\varepsilon > 0$, existe um subconjunto aberto U de K tal que $B \subset U$ e $|\mu|(U \setminus B) < \varepsilon$;*
(iii) *Dado B um boreliano de K e $\varepsilon > 0$, existe um subconjunto fechado F de K tal que $F \subset B$ e $|\mu|(B \setminus F) < \varepsilon$.*

DEMONSTRAÇÃO. Vejamos que (i) implica (ii). Sejam B um boreliano de K e $\varepsilon > 0$. Como vale a condição (a) da Definição 2.3.9 para a medida finita $|\mu|$, temos que existe um subconjunto aberto U de K tal que:

$$|\mu|(U) < |\mu|(B) + \varepsilon.$$

Assim, nosso resultado segue do fato que $|\mu|(U \setminus B) = |\mu|(U) - |\mu|(B)$. Agora, vamos mostrar que (ii) e (iii) são equivalentes. Suponha que valha (ii), fixe B boreliano de K e $\varepsilon > 0$. Note que (ii) garante que existe um subconjunto aberto U de K tal que $K \setminus B \subset U$ e $|\mu|\big(U \setminus (K \setminus B)\big) < \varepsilon$, pois $K \setminus B$ é um boreliano de K. Se definirmos $F = K \setminus U$, então F é um subconjunto fechado de K, $F \subset B$ e:

$$|\mu|(B \setminus F) = |\mu|\big(U \setminus (K \setminus B)\big) < \varepsilon,$$

o que prova (iii). Reciprocamente, suponha que (iii) valha e vejamos que vale (ii). Dados B um boreliano de K e $\varepsilon > 0$, (iii) garante que existe um subconjunto fechado F de K tal que $F \subset K \setminus B$ e $|\mu|\big((K \setminus B) \setminus F\big) < \varepsilon$, pois $K \setminus B$ é um boreliano de K. Portanto, se tomarmos $U = K \setminus F$, então U é um aberto de K, $B \subset U$ e:

$$|\mu|(U \setminus B) = |\mu|\big((K \setminus B) \setminus F\big) < \varepsilon,$$

o que estabelece (ii). Finalmente, temos que (iii) implica (i), já que (iii) implica (ii) e (ii)+(iii) garantem a regularidade de μ. □

Analogamente ao conceito de suporte de uma função, temos a noção de suporte de uma medida que definimos a seguir.

DEFINIÇÃO 2.3.11. Sejam K um espaço compacto Hausdorff e μ uma medida de Borel não negativa em K. Definimos o *suporte de* μ, denotado por $\operatorname{supp} \mu$, como:

$$\operatorname{supp} \mu = \{p \in K : \mu(U) > 0, \text{para toda vizinhança aberta } U \text{ de } p\}.$$

Se μ é uma medida de Borel com sinal em K, então definimos o *suporte de* μ como sendo o suporte da variação total de μ.

Note que o suporte de uma medida de Borel μ é um subconjunto fechado de K. Além disso, se μ é regular e finita, então o suporte de μ coincide com o complementar do maior aberto U de K tal que $|\mu|(U) = 0$. Esse é o conteúdo da próxima proposição.

PROPOSIÇÃO 2.3.12. *Sejam K um compacto Hausdorff, μ uma medida de Borel com sinal em K e $U = \bigcup\{V : V$ é um aberto de K e $|\mu|(V) = 0\}$. Se μ é finita e regular, então $|\mu|(U) = 0$ e portanto, $\operatorname{supp}\mu = K \setminus U$.*

DEMONSTRAÇÃO. Inicialmente, note que U é um subconjunto aberto de K e portanto, U pertence a $\mathcal{B}_K$. Dado $\varepsilon > 0$, como μ é regular e finita, a Proposição 2.3.10 garante que existe um subconjunto fechado F de K tal que F está contido em U e:

$$|\mu|(U) < |\mu|(F) + \varepsilon. \tag{2.3.6}$$

Note que a coleção $\mathfrak{V}$ definida como:

$$\mathfrak{V} = \{V : V \text{ é um aberto de } K \text{ e } |\mu|(V) = 0\}$$

é uma cobertura aberta de F e portanto, segue da compacidade de F que $\mathfrak{V}$ admite uma subcobertura finita. Assim, temos que $|\mu|(F) = 0$. Dessa forma, a desigualdade (2.3.6) nos diz que $|\mu|(U) < \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ foi tomado arbitrariamente, isso implica que $|\mu|(U) = 0$. Do fato que $|\mu|(U) = 0$ e da definição de U segue que $\operatorname{supp}\mu = K \setminus U$. $\square$

COROLÁRIO 2.3.13. *Sejam K um compacto Hausdorff, μ uma medida de Borel com sinal em K e H um subconjunto fechado de K. Se μ é regular e finita, então $\operatorname{supp}\mu \subset H$ se, e somente se, $\mu(B) = 0$, para todo boreliano B de K contido em $K \setminus H$.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que $\operatorname{supp}\mu \subset H$ e considere B um boreliano de K contido em $K \setminus H$. Então, temos que:

$$B \subset K \setminus H \subset U,$$

onde U é definido como no enunciado da Proposição 2.3.12. Como $|\mu|$ é uma medida não negativa, $B \subset U$ e $|\mu|(U) = 0$, temos que $|\mu|(B) = 0$. Assim, temos que $\mu(B) = 0$, já que $|\mu(B)| \leq |\mu|(B)$. Reciprocamente, suponha que $\mu(B) = 0$, para todo boreliano B de K contido em $K \setminus H$. Como $K \setminus H$ é um aberto de K, a conclusão segue se mostrarmos que $|\mu|(K \setminus H) = 0$. Mas, isso é uma consequência direta da definição da variação total de μ (Definição 2.3.2). $\square$

Fixado um compacto Hausdorff K, definimos o seguinte conjunto:

$$M(K) = \{\mu : \mu \text{ é uma medida de Borel com sinal em } K, \text{ regular e finita}\}.$$

Na Proposição 2.3.14, veremos que o conjunto $M(K)$ se torna um espaço vetorial real quando munido das operações de soma e multiplicação por escalar ponto a ponto. Além disso, de acordo com a Observação 2.3.8, temos que se μ é finita, então $|\mu|$ também é finita e portanto, a função

$$\|.\| : M(K) \ni \mu \mapsto |\mu|(K) \in [0, +\infty[$$

está bem definida. Na próxima proposição, vamos mostrar que a função $\|.\|$ é uma norma em $M(K)$. Essa norma é chamada de *norma da variação total.*

PROPOSIÇÃO 2.3.14. *Seja K um compacto Hausdorff. O conjunto $M(K)$ munido das operações de soma e multiplicação por escalar ponto a ponto é um espaço vetorial real. Além disso, a função $\|.\| : M(K) \to [0, +\infty[$ definida como $\|\mu\| = |\mu|(K)$, para todo $\mu \in M(K)$, é uma norma em $M(K)$.*

DEMONSTRAÇÃO. O resultado segue facilmente, observando-se que se $\mu, \nu \in M(K)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $|\mu + \nu| \leq |\mu| + |\nu|$ e $|\lambda\mu| = |\lambda||\mu|$. □

Dados $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{B})$ espaços mensuráveis, dizemos que uma função $f : X \to Y$ é *mensurável* se, e somente se, $f^{-1}[B]$ pertence a $\mathcal{A}$, para todo elemento B de $\mathcal{B}$. Quando consideramos funções com domínio ou contradomínio em um subconjunto de $\mathbb{R}$, a σ-álgebra que temos em mente para $\mathbb{R}$ é a sua σ-álgebra de borelianos. Além disso, se $f : (K, \mathcal{B}_K) \to \mathbb{R}$ for mensurável, então diremos que f é *Borel-mensurável*, onde K denota um espaço compacto e Hausdorff. Fixados um espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$ e uma medida μ nesse espaço, dizemos que uma função mensurável $f : X \to \mathbb{R}$ é *integrável com respeito a μ* se, e somente se, a integral de f com respeito a μ, denotada por $\int_X f \mathrm{d}\mu$, estiver bem definida e for um número real.

LEMA 2.3.15. *Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável, μ uma medida com sinal nesse espaço e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Se μ é uma medida finita e f é limitada, então f é integrável com respeito a μ.*

DEMONSTRAÇÃO. Inicialmente, suponhamos que μ seja uma medida não negativa. Se $f : X \to [0, +\infty[$ é uma função mensurável e não negativa, sabemos que a integral de f com respeito a μ está bem definida. Além disso, vale que:

$$0 \leq \int_X f \mathrm{d}\mu \leq \sup_{x \in X} f(x)\mu(X) < +\infty.$$

Note que as funções $f^+, f^- : X \to [0, +\infty[$, definidas como

$$f^+(x) = \max\big(f(x), 0\big) \quad \text{e} \quad f^-(x) = \max\big(-f(x), 0\big)$$

são mensuráveis. Além disso, se f é limitada, então f^+ e f^- também são limitadas. Portanto, pelo feito acima, temos que f^+ e f^- são integráveis com respeito a μ. Logo, f é integrável com respeito a μ e por definição:

$$\int_X f \mathrm{d}\mu = \int_X f^+ \mathrm{d}\mu - \int_X f^- \mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$$

Agora, vamos mostrar o resultado no caso em que μ é uma medida com sinal. Note que a hipótese de μ ser finita implica que as medidas não negativas μ^+ e μ^- são finitas, onde (μ^+, μ^-) é a decomposição de Jordan de μ. Logo, pelo feito acima, temos que f é integrável com respeito a μ^+ e μ^-. Portanto, f é integrável com respeito a μ e por definição:

$$\int_X f \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu^+ - \int_X f \mathrm{d}\mu^- \in \mathbb{R}.$$

□

Fixado um espaço compacto e Hausdorff K, note que se $f : K \to \mathbb{R}$ é contínua, então f é Borel-mensurável e o Lema 2.3.15 garante que f é integrável com respeito a toda medida μ pertencente a $M(K)$. Além disso, é fácil ver que a função $\int_K .\mathrm{d}\mu$ definida como:

$$\int_K .\mathrm{d}\mu : C(K) \ni f \to \int_K f \mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$$

pertence a $C(K)^*$. O Teorema de representação de Riesz garante que, na verdade, todo elemento de $C(K)^*$ é da forma $\int_K .\mathrm{d}\mu$ para alguma medida μ de $M(K)$.

Teorema 2.3.16. *(Teorema de representação de Riesz) Seja K um compacto Hausdorff. A função definida como $M(K) \ni \mu \to \int_K .\mathrm{d}\mu \in C(K)^*$ é uma isometria linear entre $C(K)^*$, e o espaço $M(K)$, munido da norma da variação total.*

Demonstração. Veja ([**28**, Theorem 6.19]). □

Recorde que dados um espaço compacto Hausdorff K e um funcional α em $C(K)^*$, dizemos que α é um *funcional positivo* se, e somente se, $\alpha(f) \geq 0$, para toda função $f \in C(K)$ tal que $f(p) \geq 0$, para todo $p \in K$. É fácil ver que se $\mu \in M(K)$ é uma medida não negativa, então o funcional que μ define em $C(K)^*$, através da isometria dada no Teorema 2.3.16, é um funcional positivo. Na próxima proposição, veremos que todo funcional positivo em $C(K)^*$ é representado por uma medida não negativa em $M(K)$.

Proposição 2.3.17. *Sejam K um espaço compacto Hausdorff, μ uma medida em $M(K)$ e denote por α_μ o funcional em $C(K)^*$ associado a μ, através da isometria dada no Teorema 2.3.16. Se α_μ é um funcional positivo, então μ é uma medida não negativa.*

Demonstração. Inicialmente, note que a regularidade de μ implica que a conclusão segue se mostrarmos que $\mu(F) \geq 0$, para todo subconjunto fechado F de K. De fato, suponha que tenhamos mostrado que $\mu(F) \geq 0$, para todo fechado F de K e suponha, por absurdo, que existe um subconjunto boreliano B de K tal que $\mu(B) < 0$. Assim, temos que existe um número real positivo ε tal que:

$$\mu(B) + \varepsilon < 0. \tag{2.3.7}$$

Além disso, da regularidade de μ segue que existe um subconjunto fechado F de K tal que $F \subset B$ e:

$$|\mu|(B \setminus F) < \varepsilon. \tag{2.3.8}$$

Assim, usando as equações (2.3.7) e (2.3.8), obtemos que:

$$\mu(F) = \mu(B) - \mu(B \setminus F) < \mu(B) + \varepsilon < 0.$$

Mas, isso contradiz nossa hipótese e estabelece o resultado. Agora, seja F um subconjunto fechado de K e vamos mostrar que $\mu(F) \geq 0$. Note que da regularidade de μ segue que, fixado $n \geq 1$, existe um aberto U_n de K tal que $F \subset U_n$ e:

$$|\mu|(U_n \setminus F) < 1/n. \tag{2.3.9}$$

Além disso, como K é normal, o Lema de Urysohn garante que dado $n \geq 1$, existe um função contínua $f_n : K \to [0, 1]$ tal que $f_n|_F = 1$ e $f_n|_{U_n^C} = 0$. Assim, do fato de α_μ ser um funcional positivo vem que:

$$0 \leq \alpha_\mu(f_n) = \int_K f_n \mathrm{d}\mu = \mu(F) + \int_{U_n \setminus F} f_n \mathrm{d}\mu, \tag{2.3.10}$$

para todo n. Finalmente, note que usando a equação (2.3.9), obtemos que:

$$\Big| \int_{U_n \setminus F} f_n \mathrm{d}\mu \Big| \leq \int_{U_n \setminus F} |f_n| \mathrm{d}|\mu| \leq |\mu|(U_n \setminus F) < 1/n,$$

para todo $n \geq 1$, o que implica que $\lim_{n \to +\infty} \int_{U_n \setminus F} f_n \mathrm{d}\mu = 0$. Portanto, disso e da equação (2.3.10) vem que $\mu(F) = 0$. □

Observação 2.3.18. Fixado um espaço compacto e Hausdorff K, além da topologia da norma, o espaço $C(K)^*$ pode ser dotado de outra topologia interessante, a saber, a topologia fraca*. Se $\varphi : M(K) \to C(K)^*$ denota a isometria linear dada pelo Teorema 2.3.16, então podemos considerar a topologia τ que φ induz em $M(K)$, quando munimos $C(K)^*$ da topologia fraca*. Ou seja, τ é a menor topologia em $M(K)$ que faz com que a função $\varphi : M(K) \to (C(K)^*, w^*)$ seja contínua. Dizemos que τ é a *topologia fraca** em $M(K)$. Note que a topologia da norma em $M(K)$ é mais fina que τ. Além disso, a função $\varphi : \big(M(K), \tau\big) \to \big(C(K)^*, w^*\big)$ é um homeomorfismo e portanto, temos que uma rede $(\mu_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de elementos de $M(K)$ converge para $\mu \in M(K)$ na topologia τ se, e somente se, $\varphi(\mu_\lambda) \xrightarrow{\text{w}^*} \varphi(\mu)$ em $C(K)^*$.

Uma classe importante de medidas de Borel finitas e regulares num espaço compacto e Hausdorff K é a classe das medidas de Dirac. Fixado $p \in K$, definimos a medida de Borel δ_p como $\delta_p(B) = 1$, se $p \in B$ e $\delta_p(B) = 0$, caso contrário, para todo $B \in \mathcal{B}_K$. Os elementos do conjunto $\{\delta_p : p \in K\}$ são chamados de *medidas de Dirac*. Note que o espaço $M(K)$, munido da topologia fraca*, possui uma cópia homeomorfa de K. De fato, a função $\delta : K \to (M(K), w^*)$ definida como $\delta(p) = \delta_p$, para todo $p \in K$, é um homeomorfismo sobre sua imagem. Nesse trabalho, estamos particularmente interessados nas funções contínuas entre compactos. Dada $\phi : K \to L$ uma função contínua entre os espaços compactos Hausdorff K e L, podemos considerar o operador de composição $\phi^* : C(L) \to C(K)$ da ϕ (Definição 1.2.2). Na Proposição 2.3.22, veremos como é o operador transposto de ϕ^* em termos de medidas, se identificarmos os duais de $C(K)$ e $C(L)$ com $M(K)$

e $M(L)$, respectivamente, através da isometria descrita no enunciado do Teorema 2.3.16.

Definição 2.3.19. Sejam $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{B})$ espaços mensuráveis. Fixadas $\phi : X \to Y$ uma função mensurável entre esses espaços e μ uma medida com sinal no espaço $(X, \mathcal{A})$, definimos a função $\phi_*\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ como $\phi_*\mu(B) = \mu\big(\phi^{-1}[B]\big)$, para todo $B \in \mathcal{B}$. Chamamos a função $\phi_*\mu$ de *medida empurrada de μ pela função ϕ.*

É facilmente verificado que a função $\phi_*\mu$ descrita na Definição 2.3.19 é de fato uma medida com sinal. A Proposição 2.3.20 a seguir nos ensina como calcular a integral de uma função mensurável e limitada $f : Y \to \mathbb{R}$ com respeito à medida $\phi_*\mu$. Dado um subconjunto A de um conjunto X, denotaremos por $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ a função característica do conjunto A.

Proposição 2.3.20. *Sejam $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{B})$ espaços mensuráveis, μ uma medida com sinal no espaço $(X, \mathcal{A})$, $\phi : X \to Y$ uma função mensurável e $f : Y \to \mathbb{R}$ uma função mensurável e limitada. Se μ é uma medida finita, então f é integrável com respeito a $\phi_*\mu$, $f \circ \phi$ é integrável com respeito a μ e vale que:*

$$\int_Y f \mathrm{d}\phi_*\mu = \int_X f \circ \phi \mathrm{d}\mu. \tag{2.3.11}$$

Demonstração. Note que o fato de μ ser finita implica que $\phi_*\mu$ também é finita e o fato que f é limitada implica que a função $f \circ \phi$ também é limitada. Portanto, o Lema 2.3.15 garante que f é integrável com respeito a $\phi_*\mu$ e $f \circ \phi$ é integrável com respeito a μ. Vamos mostrar que vale a igualdade (2.3.11). Inicialmente, suponhamos que μ é uma medida não negativa. Como μ é uma medida não negativa, temos que $\phi_*\mu$ também é uma medida não negativa. Note que se $s : Y \to [0, +\infty[$ é uma função simples, mensurável e não negativa então:

$$\int_Y s \mathrm{d}\phi_*\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_*\mu(B_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu\big(\phi^{-1}[B_i]\big),$$

onde $s = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{B_i}$. Por outro lado, como $s \circ \phi = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{\phi^{-1}[B_i]}$ também é uma função simples, mensurável e não negativa, temos que:

$$\int_X s \circ \phi \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu\big(\phi^{-1}[B_i]\big).$$

Portanto, se $s : Y \to [0, +\infty[$ é função simples, mensurável e não negativa, então vale que $\int_Y s \mathrm{d}\phi_*\mu = \int_X s \circ \phi \mathrm{d}\mu$. Agora, vamos mostrar que a equação (2.3.11) vale para funções mensuráveis não negativas $f : Y \to [0, +\infty[$. Sabemos que existe uma sequência crescente de funções simples e mensuráveis $s_n : Y \to [0, +\infty[$ tal que $f(y) = \lim_{n \to +\infty} s_n(y)$, para todo $y \in Y$ ([**28**, Theorem 1.17]). Dessa forma, o Teorema da convergência monotônica ([**28**, Theorem 1.26]) garante que:

$$\int_Y f \mathrm{d}\phi_*\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_Y s_n \mathrm{d}\phi_*\mu.$$

Assim, o discutido acima implica que:

$$\int_Y f \mathrm{d}\phi_*\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X s_n \circ \phi \mathrm{d}\mu = \int_X f \circ \phi \mathrm{d}\mu,$$

sendo que a última igualdade é assegurada também pelo Teorema da convergência monotônica, pois $(s_n \circ \phi)_{n\geq 1}$ é uma sequência crescente de funções mensuráveis que converge pontualmente para $f \circ \phi$. Agora, vamos analisar o caso em que a função f assume também valores negativos. Como f é integrável com respeito a $\phi_*\mu$ e $f \circ \phi$ é integrável com respeito a μ, por definição, temos que:

$$\int_Y f \mathrm{d}\phi_*\mu = \int_Y f^+ \mathrm{d}\phi_*\mu - \int_Y f^- \mathrm{d}\phi_*\mu$$

e

$$\int_X f \circ \phi \mathrm{d}\mu = \int_X (f \circ \phi)^+ \mathrm{d}\mu - \int_X (f \circ \phi)^- \mathrm{d}\mu,$$

onde $f^+, f^-, (f \circ \phi)^+$ e $(f \circ \phi)^-$ são definidas como na prova do Lema 2.3.15. Dessa forma, como as funções f^+ e f^- são não negativas, mensuráveis e limitadas, o feito acima implica nosso resultado, já que $(f \circ \phi)^+ = f^+ \circ \phi$ e $(f \circ \phi)^- = f^- \circ \phi$. Finalmente, vamos analisar o caso em que μ é uma medida com sinal. Como $f \circ \phi$ é integrável com respeito a μ, por definição, temos que :

$$\int_X f \circ \phi \mathrm{d}\mu = \int_X f \circ \phi \mathrm{d}\mu^+ - \int_X f \circ \phi \mathrm{d}\mu^-,$$

onde (μ^+, μ^-) é a decomposição de Jordan de μ. Como μ^+ e μ^- são medidas não negativas e finitas, o discutido anteriormente implica que:

$$\int_X f \circ \phi \mathrm{d}\mu = \int_Y f \mathrm{d}\phi_*\mu^+ - \int_Y f \mathrm{d}\phi_*\mu^- \in \mathbb{R}.$$

Para concluir nosso resultado, note que $\phi_*\mu = \phi_*\mu^+ - \phi_*\mu^-$, o que implica que:

$$\int_Y f \mathrm{d}\phi_*\mu = \int_Y f \mathrm{d}\phi_*\mu^+ - \int_Y f \mathrm{d}\phi_*\mu^- = \int_X f \circ \phi \mathrm{d}\mu.$$

□

OBSERVAÇÃO 2.3.21. Note que se K e L são espaços compactos Hausdorff e $\phi : K \to L$ é uma função contínua, então ϕ é mensurável, se K e L estiverem munidos de suas σ-álgebras de borelianos. Portanto, dada uma medida de Borel μ em K, a medida de Borel $\phi_*\mu$ em L está bem definida.

PROPOSIÇÃO 2.3.22. *Sejam K e L espaços compactos e Hausdorff e $\phi : K \to L$ uma função contínua. Se $\phi^* : C(L) \to C(K)$ denota o operador de composição da ϕ, então o operador transposto de ϕ^* é dado por:*

$$M(K) \ni \mu \mapsto \phi_*\mu \in M(L),$$

sendo que estamos identificando $C(K)^*$ e $C(L)^*$ com $M(K)$ e $M(L)$, respectivamente, através da isometria descrita no enunciado do Teorema 2.3.16.

Demonstração. Fixada $\mu \in M(K)$, denote por $\alpha_\mu \in C(K)^*$ o funcional linear que μ define em $C(K)$ (como descrito no Teorema 2.3.16). Se $T : C(K)^* \to C(L)^*$ é o transposto de ϕ^*, então temos que $T(\alpha_\mu) = \alpha_\mu \circ \phi^*$. Portanto, a medida em $M(L)$ associada a $T(\alpha_\mu)$ é o único elemento ν de $M(L)$ tal que:

$$\int_L f \mathrm{d}\nu = \alpha_\mu\big(\phi^*(f)\big) = \int_K f \circ \phi \mathrm{d}\mu, \tag{2.3.12}$$

para toda $f \in C(L)$. De acordo com a Proposição 2.3.20, se tomarmos ν como sendo a medida $\phi_*\mu$, então a igualdade (2.3.12) é satisfeita. Dessa forma, para concluirmos nosso resultado, basta mostrarmos que $\phi_*\mu$ pertence a $M(L)$. Para isso, o único fato não trivial que devemos mostrar é que $\phi_*\mu$ é regular. Inicialmente, afirmamos que $|\phi_*\mu| \le \phi_*|\mu|$. De fato, dado um boreliano B de L, se $(S_n)_{n\ge 1}$ é uma sequência de borelianos de L dois a dois disjuntos tal que $B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} S_n$, então a sequência $\big(\phi^{-1}[S_n]\big)_{n\ge 1}$ de borelianos de K dois a dois disjuntos particiona $\phi^{-1}[B]$, i.e., $\phi^{-1}[B] = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \phi^{-1}[S_n]$. Assim, de acordo com a Definição 2.3.2, temos que:

$$|\phi_*\mu|(B) \le |\mu|\big(\phi^{-1}[B]\big) = \phi_*|\mu|(B).$$

Para estabelecermos a regularidade de $\phi_*\mu$, como $\phi_*\mu$ é finita, basta mostrarmos que vale a condição (iii) da Proposição 2.3.10. Seja B um boreliano de L e fixe $\varepsilon > 0$, da regularidade de μ segue que existe um subconjunto fechado F de K tal que $F \subset \phi^{-1}[B]$ e $|\mu|\big(\phi^{-1}[B] \setminus F\big) < \varepsilon$, pois $\phi^{-1}[B]$ é um boreliano de K. Como ϕ é uma função fechada, temos que $\phi[F]$ é um subconjunto fechado de L. Finalmente, nosso resultado segue da observação que $\phi[F] \subset B$ e de:

$$|\phi_*\mu|\big(B \setminus \phi[F]\big) \le \phi_*|\mu|\big(B \setminus \phi[F]\big) \le |\mu|\big(\phi^{-1}[B] \setminus F\big) < \varepsilon.$$

□

Corolário 2.3.23. *Sejam K e L espaços compactos e Hausdorff. Sejam $(\mu_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma rede de elementos de $M(K)$ e μ um elemento de $M(K)$. Se $\phi : K \to L$ é uma função contínua e $\mu_\lambda \xrightarrow{w^*} \mu$, então $\phi_*\mu_\lambda \xrightarrow{w^*} \phi_*\mu$.*

Demonstração. Segue diretamente do fato que se $S : X \to Y$ é um operador limitado entre os espaços de Banach X e Y, então o operador transposto $S^* : Y^* \to X^*$ de S é contínuo, se X^* e Y^* estiverem munidos de suas topologias fraca*. □

Proposição 2.3.24. *Sejam K um compacto Hausdorff e H um subconjunto fechado de K. Dada $\mu \in M(K)$, denotemos a restrição da medida μ à σ-álgebra dos borelianos de H por $\mu|_H$. Vale que $\mu|_H \in M(H)$ e $|\mu|_H| = |\mu||_H$, o que implica que $\|\mu|_H\| \le \|\mu\|$.*

Demonstração. Inicialmente, vamos mostrar que $|\mu|_H| = |\mu||_H$. Fixado um boreliano B de H, usando a Definição 2.3.2, concluímos que vale que $|\mu|_H|(B) \leq |\mu|(B)$, pois como H é um boreliano de K, temos que todo boreliano de H é um boreliano de K. Por outro lado, todo boreliano de K contido em H é um boreliano de H e portanto, vale que $|\mu|(B) \leq |\mu|_H|(B)$. Isso estabelece que $|\mu|_H| = |\mu||_H$, o que implica que:

$$\|\mu|_H\| = |\mu|_H|(H) = |\mu|(H) \leq |\mu|(K) = \|\mu\|.$$

Finalmente, vamos mostrar que $\mu|_H \in M(H)$. É claro que $\mu|_H$ é uma medida de Borel finita com sinal em H. Vejamos que $\mu|_H$ é regular. Como $\mu|_H$ é uma medida finita, basta mostrarmos que $\mu|_H$ satisfaz a condição (iii) da Proposição 2.3.10. Seja B um boreliano de H e $\varepsilon > 0$. Como B é um boreliano de K, a regularidade de μ garante que existe um fechado F de K tal que $F \subset B$ e $|\mu|(B \setminus F) < \varepsilon$. Note que F é um fechado de H e portanto, a conclusão segue tendo-se em mente que $|\mu|_H| = |\mu||_H$. □

Proposição 2.3.25. *Sejam K um espaço compacto Hausdorff, H um subconjunto fechado de K e $(\mu_n)_{n\geq 1}$ uma sequência fraca*-nula em $M(K)$. Se $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \operatorname{supp} \mu_n$ está contido em H, então a sequência $(\mu_n|_H)_{n\geq 1}$ também é fraca*-nula em $M(H)$.*

Demonstração. Note que para estabelecermos o resultado, devemos mostrar que se $f : H \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então a sequência $\big(\int_H f \mathrm{d}\mu_n\big)_{n\geq 1}$ converge para 0. Fixada f em $C(H)$, como H é um subconjunto fechado do espaço normal K, temos que o Teorema da extensão de Tietze garante que f admite uma extensão contínua $\widetilde{f} : K \to \mathbb{R}$. Portanto:

$$\int_K \widetilde{f} \mathrm{d}\mu_n = \int_H f \mathrm{d}\mu_n + \int_{K\setminus H} \widetilde{f} \mathrm{d}\mu_n, \tag{2.3.13}$$

para todo $n \geq 1$. Além disso, o fato que H contém o suporte de μ_n e o Corolário 2.3.13 implicam que a medida μ_n restrita à σ-álgebra dos borelianos de $K \setminus H$ é identicamente nula e portanto, vale que:

$$\int_{K\setminus H} \widetilde{f} \mathrm{d}\mu_n = 0, \tag{2.3.14}$$

para todo $n \geq 1$. Portanto, a conclusão segue das equações (2.3.13), (2.3.14) e do fato da sequência $(\mu_n)_{n\geq 1}$ ser fraca*-nula em $M(K)$. □

Terminamos a seção, apresentando dois resultados simples sobre extensões de medidas borelianas definidas num subconjunto fechado de um espaço compacto Hausdorff.

Definição 2.3.26. Sejam K um compacto Hausdorff e H um subconjunto fechado de K. Dada uma medida de Borel com sinal μ em H, definimos a *extensão de μ a K que é identicamente nula fora de H* como sendo a medida de Borel $\bar{\mu}$ em K que satisfaz:

$$\bar{\mu}(B) = \mu(B \cap H), \ \forall\ B \text{ boreliano de } K.$$

Proposição 2.3.27. *Sejam K um compacto Hausdorff, H um subconjunto fechado de K e $\mu \in M(H)$. Se $\bar{\mu}$ denota a extensão de μ para K que é identicamente nula fora de H, então $\bar{\mu} = i_*\mu$, onde $i : H \to K$ denota a inclusão de H em K. Portanto, temos que $\bar{\mu} \in M(K)$ e além disso, vale que $\|\bar{\mu}\| = \|\mu\|$.*

Demonstração. Segue diretamente da definição de $\bar{\mu}$ que $\bar{\mu} = i_*\mu$. Portanto, a Proposição 2.3.22 garante que $\bar{\mu} \in M(K)$. Usando a Proposição 2.3.24, concluímos que $\|\mu\| \leq \|\bar{\mu}\|$, já que $\mu = \bar{\mu}|_H$. Por outro lado, note que $\|i^*\| \leq 1$, onde i^* é o operador de composição de i, o que implica que:

$$\|\bar{\mu}\| \leq \|i_*\|\|\mu\| \leq \|\mu\|.$$

□

Corolário 2.3.28. *Sejam K um espaço compacto Hausdorff, H um subconjunto fechado de K, $(\mu_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma rede de elementos de $M(H)$ e μ um elemento de $M(H)$. Se $\mu_\lambda \xrightarrow{w^*} \mu$, então $\bar{\mu}_\lambda \xrightarrow{w^*} \bar{\mu}$, onde $\bar{\mu}_\lambda$ e $\bar{\mu}$ denotam as extensões para K que são identicamente nulas fora de H das medidas μ_λ e μ, respectivamente.*

Demonstração. Segue diretamente da Proposição 2.3.27 e do Corolário 2.3.23. □

2.4. O espaço $M(K)$ para K reta compacta

Nessa seção, estudaremos com mais detalhes o espaço dual de $C(K)$, no caso em que K é uma reta compacta. O principal resultado dessa seção é o Teorema 2.4.20 que diz que se K é uma reta compacta, então o espaço $M(K)$ é linearmente isométrico ao espaço das funções de variação limitada e contínuas à direita definidas em K e tomando valores em $\mathbb{R}$, munido da norma da variação total. Para enunciar e provar o Teorema 2.4.20, precisamos estudar as funções de variação limitada definidas num conjunto totalmente ordenado. Analogamente ao conceito de partição de uma reta compacta, definido na Seção 2.2, temos o conceito de partição de um conjunto totalmente ordenado.

Definição 2.4.1. Dado um conjunto totalmente ordenado X, uma *partição de X* é um subconjunto finito P de X com cardinalidade maior ou igual a 2 e tal que se X possuir mínimo, então o mínimo de X pertence a P e se X possuir máximo, então o máximo de X pertence a P.

Definição 2.4.2. Seja X um conjunto totalmente ordenado e considere uma função $F : X \to \mathbb{R}$. Fixada uma partição P de X, definimos:

$$V(F;P) = \sum_{i=1}^{k} \big|F(x_i) - F(x_{i-1})\big|,$$

onde $P = \{x_0 < \ldots < x_k\}$. Dizemos que F tem *variação limitada* se, e somente se, sua variação total $V(F)$ é finita, onde a *variação total de F* é definida como:

$$V(F) = \sup\big\{V(F;P) : P \text{ é partição de } X\big\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

OBSERVAÇÃO 2.4.3. Dado um conjunto totalmente ordenado X, é facilmente verificado que toda função $F : X \to \mathbb{R}$ de variação limitada é limitada. De fato, fixe um elemento a em X e note que $|F(x)| \leq V(F) + |F(a)|$, para todo $x \in X$.

Segue diretamente da Definição 2.4.2 que se X é um conjunto totalmente ordenado e Y é um subconjunto de X, então a variação total da restrição de uma função $F : X \to \mathbb{R}$ a Y é menor ou igual à variação total de F, se Y estiver munido da restrição da ordem de X. Portanto, se F possui variação limitada, então podemos definir a função variação acumulada de F.

DEFINIÇÃO 2.4.4. Dada $F : X \to \mathbb{R}$ uma função de variação limitada, definimos $V_F : X \to [0, +\infty[$ como $V_F(x) = V\big(F|_{]-\infty,x]}\big)$, para todo x em X, onde o conjunto $]-\infty, x]$ está munido da restrição da ordem de X. A função V_F é chamada de *função variação acumulada de F*.

Note que se $F : X \to \mathbb{R}$ é uma função limitada e crescente, então F possui variação limitada. Na verdade, a relação entre funções crescentes e funções de variação limitada é mais profunda. Na Proposição 2.4.7, veremos que toda função de variação limitada se escreve como uma diferença de duas funções crescentes e limitadas. Para provar a Proposição 2.4.7, precisamos de alguns lemas e terminologias que apresentamos a seguir.

Ao longo dessa seção, trabalharemos bastante com a noção de subrede. Portanto, vamos recordar alguns conceitos. Dados conjuntos dirigidos $(I, \leq)$ e $(J, \preceq)$, dizemos que uma função $\varphi : J \to I$ é uma *função cofinal* se, e somente se, dado $i_0 \in I$, existe $j_0 \in J$ tal que $i_0 \leq \varphi(j)$, para todo $j \in J$ tal que $j_0 \preceq j$. Fixados um conjunto X, um conjunto dirigido I e uma rede $(x_i)_{i\in I}$ de elementos de X, dizemos que uma rede $(y_j)_{j\in J}$ de elementos de X é uma *subrede* de $(x_i)_{i\in I}$ se, e somente se, existe uma função cofinal $\varphi : J \to I$ tal que $y_j = x_{\varphi(j)}$, para todo $j \in J$. Note que dados um espaço topológico $\mathcal{X}$, uma rede $(x_i)_{i\in I}$ de elementos de $\mathcal{X}$ e uma subrede $(y_j)_{j\in J}$ de $(x_i)_{i\in I}$, se $(x_i)_{i\in I}$ converge para x em $\mathcal{X}$, então $(y_j)_{j\in J}$ também converge para x. Ao longo de toda essa seção, fixado um conjunto totalmente ordenado X, denotaremos por C a coleção de todas as partições de X. Note que C, munido da ordem parcial da inclusão de conjuntos, é um conjunto dirigido. Dessa forma, se $F : X \to \mathbb{R}$ é uma função, então podemos considerar a rede $\big(V(F;P)\big)_{P\in C}$ de números reais. Além disso, essa rede é crescente e portanto, seu limite coincide com a variação total de F.

LEMA 2.4.5. *Sejam X um conjunto totalmente ordenado e $F : X \to \mathbb{R}$ uma função de variação limitada. Se $a \in X$, então:*

$$V(F) = V\big(F|_{]-\infty,a]}\big) + V\big(F|_{[a,+\infty[}\big),$$

onde os conjuntos $]-\infty, a]$ e $[a, +\infty[$ estão munidos da restrição da ordem de X.

Demonstração. Note que as funções $F|_{]-\infty,a]}$ e $F|_{[a,+\infty[}$ têm variação limitada. Denote por C_0 a coleção de todas as partições de X que contêm a, por J_1 a coleção de todas as partições do conjunto totalmente ordenado $]-\infty,a]$ e por J_2 a coleção de todas as partições do conjunto totalmente ordenado $[a,+\infty[$. Considere os conjuntos C_0, J_1 e J_2 munidos da ordem parcial da inclusão de conjuntos. Note que C_0 é um subconjunto cofinal de C e portanto, $\big(V(F;R)\big)_{R\in C_0}$ é uma subrede de $\big(V(F;R)\big)_{R\in C}$. Dessa forma, temos que $V(F)=\lim_{R\in C_0}V(F;R)$. Além disso, o produto $J_1\times J_2$ é um conjunto dirigido, se munido da ordem produto [3]. Note que as funções $\pi_1:J_1\times J_2\to J_1$ e $\pi_2:J_1\times J_2\to J_2$ são cofinais, onde π_1 e π_2 denotam a primeira e a segunda projeção, respectivamente. Portanto, temos que:

$$V(F|_{]-\infty,a]})=\lim_{(P,Q)\in J_1\times J_2}V\big(F;\pi_1(P,Q)\big)=\lim_{(P,Q)\in J_1\times J_2}V(F;P) \tag{2.4.1}$$

e

$$V(F|_{]a,+\infty]})=\lim_{(P,Q)\in J_1\times J_2}V\big(F;\pi_2(P,Q)\big)=\lim_{(P,Q)\in J_1\times J_2}V(F;Q). \tag{2.4.2}$$

Finalmente, considere a função:

$$J_1\times J_2\ni(P,Q)\mapsto P\cup Q\in C_0.$$

Essa é uma função cofinal e portanto $\big(V(F;P\cup Q)\big)_{(P,Q)\in J_1\times J_2}$ é uma subrede de $\big(V(F,R)\big)_{R\in C_0}$. Logo, vale que:

$$V(F)=\lim_{(P,Q)\in J_1\times J_2}V(F;P\cup Q). \tag{2.4.3}$$

Dessa forma, usando as igualdades (2.4.1) e (2.4.2), ficamos com:

$$\begin{aligned}V(F)&\overset{(2.4.3)}{=}\lim_{(P,Q)\in J_1\times J_2}V(F;P\cup Q)\overset{(*)}{=}\lim_{(P,Q)\in J_1\times J_2}\big(V(F;P)+V(F;Q)\big)\\&=V(F|_{]-\infty,a]})+V(F|_{]a,+\infty]}),\end{aligned}$$

sendo que a igualdade (*) vale, pois fixados $P\in J_1$ e $Q\in J_2$, temos que:

$$V(F;P\cup Q)=V(F;P)+V(F;Q)$$

□

Lema 2.4.6. *Sejam X um conjunto totalmente ordenado e $F:X\to\mathbb{R}$ uma função. Se F possui variação limitada, então as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) *A função $V_F:X\to\mathbb{R}$ é crescente;*
(ii) *A função $V_F-F:X\to\mathbb{R}$ é crescente.*

[3] Dados conjuntos parcialmente ordenados $(A,\le)$ e $(B,\le)$, a *ordem produto* em $A\times B$ é a ordem parcial definida como $(a_1,b_1)\preceq(a_2,b_2)$ se, e somente se, $a_1\le a_2$ e $b_1\le b_2$.

DEMONSTRAÇÃO. Vamos provar (i). Sejam $x, y \in X$ com $x < y$. Usando o Lema 2.4.5 para o conjunto totalmente ordenado $]-\infty, y]$, a função $F|_{]-\infty,y]}$ e o ponto x, obtemos:

$$\begin{aligned} V_F(y) &= V(F|_{]-\infty,x]}) + V(F|_{[x,y]}) \\ &= V_F(x) + V(F|_{[x,y]}) \geq V_F(x). \end{aligned}$$

Agora, vamos mostrar (ii). Fixados $x, y \in X$ com $x < y$, como discutido na prova do item (i), vale que:

$$V_F(y) - V_F(x) = V(F|_{[x,y]}).$$

Além disso, temos que $|F(y) - F(x)| \leq V(F|_{[x,y]})$ e portanto:

$$F(y) - F(x) \leq V_F(y) - V_F(x),$$

o que implica que a função $V_F - F$ é crescente. □

PROPOSIÇÃO 2.4.7. *Dados um conjunto totalmente ordenado X e uma função de variação limitada $F : X \to \mathbb{R}$, vale que existem funções crescentes e limitadas $F_1, F_2 : X \to \mathbb{R}$ tais que $F = F_1 - F_2$.*

DEMONSTRAÇÃO. Defina $F_1 = V_F$, $F_2 = V_F - F$ e note que $F = F_1 - F_2$. De acordo com o Lema 2.4.6, temos que F_1 e F_2 são crescentes. Além disso, F_1 e F_2 são funções limitadas. De fato, a Observação 2.4.3 garante que F é limitada e é claro que:

$$0 \leq V_F(x) \leq V(F),$$

para todo $x \in X$. □

Uma propriedade interessante das funções de variação limitada é que os pontos de continuidade da função $F : X \to \mathbb{R}$ são pontos de continuidade da função variação acumulada V_F de F. O mesmo vale para pontos de continuidade lateral. Na Proposição 2.4.11, mostraremos que se F é contínua à direita num ponto a de X, então a função V_F também é contínua à direita em a. A prova de que a continuidade de F à esquerda num ponto implica a continuidade à esquerda de V_F nesse ponto é análoga. Na prova da Proposição 2.4.11, usaremos alguns lemas que desenvolvemos a seguir.

LEMA 2.4.8. *Sejam X um conjunto totalmente ordenado, $F : X \to \mathbb{R}$ uma função de variação limitada e $a \in X$. Se a não é isolado à direita (resp., à esquerda) em X, então o limite de $F(x)$ quando x tende a a pela direita (resp., pela esquerda) existe e é um número real.*

DEMONSTRAÇÃO. Vamos mostrar que se a não é um ponto isolado à esquerda em X, então o limite de $F(x)$ quando x tende a a pela esquerda existe e é um número real. A prova no caso em que a não é isolado à direita em X é feita de forma análoga. Note que se $G : X \to \mathbb{R}$ é uma função crescente e limitada, então:

$$\lim_{x \to a^-} G(x) = \sup_{x < a} G(x) \in \mathbb{R}.$$

De acordo com a Proposição 2.4.7, como F possui variação limitada, temos que F se escreve como $F_1 - F_2$, onde $F_1, F_2 : X \to \mathbb{R}$ são funções crescentes e limitadas e portanto:

$$\lim_{x \to a^-} F(x) = \lim_{x \to a^-} F_1(x) - \lim_{x \to a^-} F_2(x) = \sup_{x<a} F_1(x) - \sup_{x<a} F_2(x) \in \mathbb{R},$$

o que estabelece o resultado. □

Lema 2.4.9. *Seja X um conjunto totalmente ordenado e que possui mínimo e $F : X \to \mathbb{R}$ uma função de variação limitada. Denote por a o mínimo de X. Se a não é isolado à direita em X, então vale que:*

$$V(F) = \lim_{x \to a^+} |F(x) - F(a)| + V\big(F|_{]a,+\infty[}\big).$$

Demonstração. Inicialmente, note que o Lema 2.4.8 garante que o limite de $|F(x) - F(a)|$ quando x tende a a pela direita existe e é um número real, já que a função F tem variação limitada. Defina o conjunto $I = X \setminus \{a\}$ e note que o limite de $|F(x) - F(a)|$ quando x tende a a pela direita coincide com o limite da rede $\big(|F(x) - F(a)|\big)_{x \in I}$, onde I está munido da ordem inversa de X. Denote por J o conjunto de todas as partições de $]a, +\infty[$, munido da ordem parcial da inclusão de conjuntos e note que $I \times J$ é um conjunto dirigido se munido da ordem produto. É claro que as projeções $\pi_1 : I \times J \to I$ e $\pi_2 : I \times J \to J$ são funções cofinais e portanto:

(2.4.4)
$$\lim_{x \to a^+} |F(x) - F(a)| + V(F|_{]a,+\infty[}) = \lim_{(x,P) \in I \times J} \big(|F(x) - F(a)| + V(F; P)\big).$$

Seja D o subconjunto de C formado pelas partições de X que possuem mais de dois elementos e defina a seguinte função:

$$D \ni Q \mapsto \big(\min(Q \setminus \{a\}), Q \setminus \{a\}\big) \in I \times J.$$

Note que essa função é cofinal, se $I \times J$ estiver munido da ordem produto. Portanto:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,P) \in I \times J} &\big(|F(x) - F(a)| + V(F; P)\big) \\ &= \lim_{Q \in D} \big(|F(\min(Q \setminus \{a\})) - F(a)| + V(F; Q \setminus \{a\})\big). \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

Finalmente, note que D é um subconjunto cofinal de C e portanto,

$$V(F) = \lim_{Q \in D} V(F; Q). \tag{2.4.6}$$

Além disso, se $Q \in D$, então:

$$V(F; Q) = |F(\min(Q \setminus \{a\})) - F(a)| + V(F; Q \setminus \{a\}). \tag{2.4.7}$$

Dessa forma, das equações (2.4.6) e (2.4.7) segue que:

$$V(F) = \lim_{Q \in D} \big(|F(\min(Q \setminus \{a\})) - F(a)| + V(F; Q \setminus \{a\})\big). \tag{2.4.8}$$

Logo, ficamos com:

$$\begin{aligned} V(F) &\overset{(2.4.8)}{=} \lim_{Q\in D}\big(|F(\min(Q\setminus\{a\}))-F(a)|+V(F;Q\setminus\{a\})\big)\\ &\overset{(2.4.5)}{=} \lim_{(x,P)\in I\times J}\big(|F(x)-F(a)|+V(F;P)\big)\\ &\overset{(2.4.4)}{=} \lim_{x\to a^+}|F(x)-F(a)|+V(F|_{]a,+\infty[}). \end{aligned}$$

□

Dados um conjunto totalmente ordenado e sem mínimo X, uma função $F : X \to \mathbb{R}$ e um número real L, dizemos que L é o *limite de $F(x)$ quando x tende a $-\infty$* se, e somente se, fixado $\varepsilon > 0$, existe $x_0 \in X$ tal que:

$$x \in X \text{ e } x \leq x_0 \ \Rightarrow |F(x) - L| < \varepsilon.$$

Nesse caso, escrevemos que $L = \lim_{x\to-\infty} F(x)$.

LEMA 2.4.10. *Sejam X um conjunto totalmente ordenado que não possui mínimo e $F : X \to \mathbb{R}$ uma função. Se F possui variação limitada, então:*

$$\lim_{x\to-\infty} V_F(x) = 0.$$

DEMONSTRAÇÃO. Fixado $x \in X$, o Lema 2.4.5 garante que:

$$V_F(x) = V(F) - V(F|_{[x,+\infty[}).$$

Portanto, a conclusão segue se mostrarmos que:

$$\lim_{x\to-\infty} V(F|_{[x,+\infty[}) = V(F).$$

Facilmente se verifica que:

$$\lim_{x\to-\infty} V(F|_{[x,+\infty[}) = \sup_{x\in X} V(F|_{[x,+\infty[}). \tag{2.4.9}$$

Além disso:

$$\sup_{x\in X} V(F|_{[x,+\infty[}) = \sup_{x\in X}\big(\sup_{P\in C_x} V(F;P)\big) = \sup_{P\in C} V(F;P) = V(F),$$

onde C_x denota a coleção de todas as partições de $[x, +\infty[$, para cada $x \in X$. Do feito acima e da equação (2.4.9) segue nosso resultado. □

PROPOSIÇÃO 2.4.11. *Sejam X um conjunto totalmente ordenado, $a \in X$ e $F : X \to \mathbb{R}$ uma função de variação limitada. Se F é contínua à direita em a, então a função V_F também é contínua à direita em a.*

DEMONSTRAÇÃO. Note que se a é isolado à direita em X, então V_F é contínua à direita em a. Suponha que a não seja isolado à direita em X. Fixado $y \in X$ com $y > a$, se usarmos o Lema 2.4.5 com o conjunto totalmente ordenado $]-\infty, y]$, a função $F|_{]-\infty,y]}$ e o ponto a, obtemos:

$$V_F(y) = V_F(a) + V(F|_{[a,y]}). \tag{2.4.10}$$

Aplicando o Lema 2.4.9 para o conjunto totalmente ordenado e com mínimo $[a,y]$ e a função $F|_{[a,y]}$, ficamos com:

$$V(F|_{[a,y]}) = \lim_{x\to a^+} |F(x) - F(a)| + V(F|_{]a,y]}).$$

Assim, a continuidade à direita de F em a garante que

$$V(F|_{[a,y]}) = V(F|_{]a,y]}). \tag{2.4.11}$$

Usando as equações (2.4.10) e (2.4.11), concluímos que:

$$V_F(y) = V_F(a) + V(F|_{]a,y]}). \tag{2.4.12}$$

Finalmente, usando a equação (2.4.12), calculamos:

$$\lim_{y\to a^+} V_F(y) = V_F(a) + \lim_{y\to a^+} V(F|_{]a,y]}) = V_F(a).$$

Note que a última igualdade vale, pois o Lema 2.4.10 aplicado ao conjunto totalmente ordenado e sem mínimo $]a, +\infty[$ e à função de variação limitada $F|_{]a,+\infty[}$ garante que

$$\lim_{y\to -\infty} V_F(y) = 0.$$

Isso estabelece a continuidade à direita de V_F em a. □

Note que o Lema 2.4.8 garante que se $F : X \to \mathbb{R}$ é uma função de variação limitada, então F só possui *descontinuidades de primeira ordem*, ou seja, dado $a \in X$, se a não é isolado à direita em X, então existe o limite de $F(x)$ quando x tende a a pela direita e se a não é isolado à esquerda, então existe o limite de $F(x)$ quando x tende a a pela esquerda. Na Proposição 2.4.12, veremos que além disso, o conjunto dos pontos de descontinuidade de F é enumerável.

Proposição 2.4.12. *Seja X um conjunto totalmente ordenado e considere uma função $F : X \to \mathbb{R}$. Se F possui variação limitada, então o conjunto dos pontos de descontinuidade de F é enumerável.*

Demonstração. Seja D o conjunto dos pontos de descontinuidade de F. Suponha, por absurdo, que D seja não enumerável e vamos mostrar que essa hipótese implica que F não possui variação limitada, o que estabelecerá nosso resultado. É claro que se $x \in D$, então F é descontínua à esquerda em x ou F é descontínua à direita em x. Como D é não enumerável, temos que o subconjunto de D formado pelos pontos em que F é descontínua à esquerda é não enumerável, ou o subconjunto de D formado pelos pontos em que F é descontínua à direita é não enumerável. Sem perda de generalidade, suponha que D^+ seja não enumerável, onde:

$$D^+ = \{x \in X : F \text{ é descontínua à direita em } x\}.$$

Note que se $x \in D^+$, então x não é isolado à direita em X e portanto, o Lema 2.4.8 garante que existe $L_x^+ = \lim_{y\to x^+} F(y)$. Logo, temos que:

$$D^+ = \bigcup_{n\geq 1} \{x \in X : |L_x^+ - F(x)| > 1/n\}.$$

Como D^+ é não enumerável, existe $n \geq 1$ tal que

$$D_n = \{x \in X : |L_x^+ - F(x)| > 1/n\}$$

é não enumerável. Nosso plano é mostrar que $V(F) \geq M$, para todo número real positivo M fixado. Para isso, vejamos que dado $\varepsilon > 0$, existe uma partição P_ε de X tal que $V(F; P_\varepsilon) > M - \varepsilon$. Note que existe um número natural positivo m tal que $m/n > M$ e considere um subconjunto de tamanho m de D_n:

$$\{x_1 < x_2 < \ldots < x_m\} \subset D_n.$$

Da definição de $L_{x_i}^+$ segue que existe $y_i \in X$ com $x_i < y_i$ e tal que

$$|F(y_i) - L_{x_i}^+| < \varepsilon/m,$$

para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Dessa forma, ficamos com:

$$|F(y_i) - F(x_i)| > 1/n - \varepsilon/m,$$

para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Note que podemos assumir que $y_i < x_{i+1}$, para todo i e seja P_ε uma partição de X que contém o seguinte conjunto:

$$\{x_1 < y_1 < x_2 < \ldots < x_{m-1} < y_{m-1} < x_m < y_m\}.$$

Dessa forma, temos que:

$$V(F; P_\varepsilon) \geq \sum_{i=1}^{m} |F(y_i) - F(x_i)| > m/n - \varepsilon > M - \varepsilon.$$

$\square$

Agora, sabemos o suficiente sobre as funções de variação limitada para enunciar e provar o Teorema 2.4.20. No restante dessa seção, vamos nos restringir ao caso em que o conjunto totalmente ordenado é uma reta compacta. Como dito no início dessa seção, vamos mostrar que se K é uma reta compacta, então o espaço $M(K)$ pode ser identificado com o espaço das funções de variação limitada e contínuas à direita definidas em K e tomando valores em $\mathbb{R}$. Fixada uma reta compacta K, denotaremos por $\mathrm{BV}(K)$ o conjunto das funções de variação limitada definidas em K e tomando valores em $\mathbb{R}$ e denotaremos por $\mathrm{NBV}(K)$ o subconjunto de $\mathrm{BV}(K)$ formado pelas funções que são contínuas à direita. Note que $\mathrm{BV}(K)$ é um espaço vetorial real, se munido das operações de soma e produto por escalar ponto a ponto. Além disso, vale que $\mathrm{NBV}(K)$ é um subespaço vetorial de $\mathrm{BV}(K)$.

Observação 2.4.13. Na Proposição 2.4.7, mostramos que todo elemento de $\mathrm{BV}(K)$ se escreve como uma diferença de duas funções crescentes e limitadas. Na verdade, temos que $\mathrm{BV}(K)$ coincide com o conjunto $\mathcal{A}$ das funções definidas em K e tomando valores em $\mathbb{R}$ que se escrevem como uma diferença de duas funções crescentes e limitadas. O fato que $\mathcal{A}$ está contido em $\mathrm{BV}(K)$, segue da observação que $\mathrm{BV}(K)$ contém as funções crescentes e limitadas e é um espaço vetorial.

Agora, vamos definir uma norma no espaço $\mathrm{NBV}(K)$. Note que a função $\|.\|_{\mathrm{BV}} : \mathrm{BV}(K) \to [0,+\infty[$ definida como $\|F\|_{\mathrm{BV}} = |F(0)| + V(F)$, para toda $F \in \mathrm{BV}(K)$, é uma norma em $\mathrm{BV}(K)$ e portanto, sua restrição a $\mathrm{NBV}(K)$ também é uma norma. Chamamos a função $\|.\|_{\mathrm{BV}}$ de *norma da variação total*. Nosso objetivo é construir uma isometria linear entre o espaço $\mathrm{NBV}(K)$ munido da norma da variação total e o espaço $M(K)$. Note que dada uma medida μ em $M(K)$, uma maneira natural de definir uma função $F_\mu : K \to \mathbb{R}$ associada a essa medida é declarar que $F_\mu(t) = \mu\big([0,t]\big)$, para todo $t \in K$. No próximo lema, veremos que a função F_μ assim definida possui variação limitada e é contínua à direita.

LEMA 2.4.14. *Sejam K uma reta compacta, μ uma medida de Borel com sinal e finita em K e defina a função $F_\mu : K \to \mathbb{R}$ como:*

$$F_\mu(t) = \mu\big([0,t]\big), \ \forall t \in K. \tag{2.4.13}$$

Se μ é regular, então F_μ pertence a $\mathrm{NBV}(K)$.

DEMONSTRAÇÃO. Inicialmente, vamos mostrar que a função F_μ é contínua à direita. Seja t um ponto de K que não é isolado à direita e fixe $\varepsilon > 0$. Da regularidade de μ segue que existe $s \in K$ tal que $t < s$ e $|\mu|\big(\,]t,s]\,\big) < \varepsilon$. A continuidade á direita de F_μ no ponto t é estabelecida observando-se que se $t' \in [t,s[$, então $|F_\mu(t') - F_\mu(t)| < \varepsilon$. Agora, vejamos que F_μ é uma função de variação limitada. Considere

$$P = \{0 = t_0 < \ldots < t_k = \max K\}$$

uma partição de K e calcule:

$$\begin{aligned} V(F_\mu;P) &= \sum_{j=0}^{k-1} |F_\mu(t_{j+1}) - F_\mu(t_j)| = \sum_{j=0}^{k-1} |\mu\big(\,]t_j,t_{j+1}]\,\big)| \\ &\le \sum_{j=0}^{k-1} |\mu|\big(\,]t_j,t_{j+1}]\,\big) = |\mu|\big(\,]0,\max K]\,\big), \end{aligned}$$

o que implica que:

$$V(F_\mu) \le |\mu|\big(\,]0,\max K]\,\big) < +\infty. \tag{2.4.14}$$

□

Note que o Lema 2.4.14 implica que o operador $T : M(K) \to \mathrm{NBV}(K)$ obtido declarando-se que:

$$T(\mu) = F_\mu, \ \forall \mu \in M(K), \tag{2.4.15}$$

está bem definido. Além disso, usando a desigualdade (2.4.14), obtemos que:

$$\begin{aligned} \|F_\mu\|_{\mathrm{BV}} &= |F_\mu(0)| + V(F_\mu) \le |\mu\big(\{0\}\big)| + |\mu|\big(\,]0,\max K]\,\big) \\ &= |\mu|\big(\{0\}\big) + |\mu|\big(\,]0,\max K]\,\big) = |\mu|(K) = \|\mu\|. \end{aligned}$$

Dessa forma, o operador T definido como (2.4.15) é limitado e satisfaz:

$$\|T(\mu)\|_{\mathrm{BV}} \leq \|\mu\|, \ \forall \mu \in M(K). \tag{2.4.16}$$

Agora, vamos construir uma inversa linear e limitada para o operador T. Faremos isso associando a cada elemento F de $\mathrm{NBV}(K)$ a medida μ_F em $M(K)$ que representa o funcional linear dado pela integração de Riemann–Stieltjes dos elementos de $C(K)$ com respeito à função F. Na Definição 2.4.15, introduzimos o conceito de soma de Riemann–Stieltjes.

Definição 2.4.15. Dadas funções $f, F : K \to \mathbb{R}$ e uma partição P de K, definimos a *soma de Riemann–Stieltjes de f com respeito a F e à partição P*, denotada por $S(f, F; P)$, como:

$$S(f, F; P) = f(0)F(0) + \sum_{j=0}^{k-1} f(t_{j+1})\big(F(t_{j+1}) - F(t_j)\big) \in \mathbb{R},$$

onde $P = \{0 = t_0 < \ldots < t_k = \max K\}$.

Um fato interessante sobre as funções de variação limitada é que se $F : K \to \mathbb{R}$ é uma função de variação limitada e $f : K \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então a rede $\big(S(f, F; P)\big)_{P \in C}$ de números reais é uma rede de Cauchy, onde C denota a coleção de todas as partições de K munida da ordem parcial da inclusão de conjuntos. Esse é o conteúdo do Lema 2.4.16 abaixo.

Lema 2.4.16. *Sejam K uma reta compacta, $F : K \to \mathbb{R}$ uma função de variação limitada e $f : K \to \mathbb{R}$ uma função. Se f é contínua, então a rede $\big(S(f, F; P)\big)_{P \in C}$ é uma rede de Cauchy.*

Demonstração. Fixado $\varepsilon > 0$, como a função f é contínua, o Lema 2.2.8 garante que existe uma partição P_0 de K tal que se $]t_j, t_{j+1}[\neq \emptyset$, então $\mathit{diam}\big(f[t_j, t_{j+1}]\big) < \varepsilon / V(F)$, para todo $j \in \{0, \ldots, k-1\}$, onde:

$$P_0 = \{0 = t_0 < \ldots < t_k = \max K\}.$$

Para concluir nosso resultado, note que se P é uma partição de K que contém P_0, então:

$$|S(f, F; P) - S(f, F; P_0)| < \varepsilon.$$

□

Note que como $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo, o Lema 2.4.16 implica que se $F : K \to \mathbb{R}$ é uma função de variação limitada e $f : K \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então a rede $\big(S(f, F; P)\big)_{P \in C}$ é convergente. Chamamos o limite da rede $\big(S(f, F; P)\big)_{P \in C}$ de *integral de Riemann–Stieltjes de f com respeito a F* e denotamos esse limite por $\int_K f \mathrm{d}F$. No próximo lema, veremos que a função que a cada elemento f de $C(K)$ associa a integral de Riemann–Stieltjes de f com respeito a uma função de variação limitada fixada é um funcional linear contínuo em $C(K)$.

LEMA 2.4.17. *Sejam K uma reta compacta e $F : K \to \mathbb{R}$ uma função. Se F tem variação limitada, então a função:*

$$C(K) \ni f \mapsto \int_K f \mathrm{d}F \in \mathbb{R} \tag{2.4.17}$$

pertence a $C(K)^*$.

DEMONSTRAÇÃO. A linearidade da função é facilmente verificada. Vejamos que o funcional é limitado. Fixadas uma função contínua $f : K \to \mathbb{R}$ e uma partição P de K, vale que $|S(f, F; P)| \leq \|F\|_{\mathrm{BV}} \|f\|_\infty$. De fato:

$$\begin{aligned} |S(f, F; P)| &\leq |f(0)||F(0)| + \|f\|_\infty \sum_{j=0}^{k-1} |F(t_{j+1}) - F(t_j)| \\ &\leq \|f\|_\infty \big(|F(0)| + V(F; P)\big) \leq \|F\|_{\mathrm{BV}} \|f\|_\infty, \end{aligned}$$

onde $P = \{0 = t_0 < \ldots < t_k = \max K\}$. Dessa forma, temos que:

$$\Big| \int_K f \mathrm{d}F \Big| = \lim_{P \in C} |S(f, F; P)| \leq \|F\|_{\mathrm{BV}} \|f\|_\infty. \tag{2.4.18}$$

Portanto, o funcional linear definido por (2.4.17) é limitado e sua norma é majorada por $\|F\|_{\mathrm{BV}}$. □

Finalmente, podemos definir a inversa do operador T. Fixada uma função $F : K \to \mathbb{R}$ de variação limitada, considere a função definida por (2.4.17). O Lema 2.4.17 garante que essa função é um elemento de $C(K)^*$ e portanto, o Teorema de representação de Riesz nos diz que existe uma única medida μ_F em $M(K)$ que representa esse funcional. Em outras palavras, a medida μ_F é o único elemento de $M(K)$ que satisfaz:

$$\int_K f \mathrm{d}\mu_F = \int_K f \mathrm{d}F, \tag{2.4.19}$$

para toda função contínua $f : K \to \mathbb{R}$. Denote por S a função definida como:

$$\mathrm{NBV}(K) \ni F \mapsto \mu_F \in M(K). \tag{2.4.20}$$

No que segue, veremos que S é um operador limitado e é a inversa do operador T. A linearidade de S é facilmente verificada. Além disso, note que a desigualdade (2.4.18) e o fato da medida μ_F satisfazer a equação (2.4.19) implicam que o operador S é limitado e que vale:

$$\|S(F)\| \leq \|F\|_{\mathrm{BV}}, \ \forall F \in \mathrm{NBV}(K). \tag{2.4.21}$$

Embora, a cada função de variação limitada $F : K \to \mathbb{R}$ possamos associar o elemento μ_F de $M(K)$ que satisfaz a equação (2.4.19), para garantir a injetividade do operador S, temos que nos restringir às funções contínuas à direita. Nos Lemas 2.4.18 e 2.4.19, mostraremos que o operador S é a inversa do operador T.

LEMA 2.4.18. *Sejam K uma reta compacta e $T : M(K) \to \mathrm{NBV}(K)$ e $S : \mathrm{NBV}(K) \to M(K)$ os operadores definidos por* (2.4.15) *e* (2.4.20)*, respectivamente. Se μ é um elemento de $M(K)$, então $S\big(T(\mu)\big) = \mu$.*

DEMONSTRAÇÃO. Recorde que $T(\mu) = F_\mu$, onde $F_\mu(t) = \mu\big([0,t]\big)$, para todo $t \in K$. Note que a conclusão segue se mostrarmos que:

$$\int_K f\mathrm{d}\mu = \int_K f\mathrm{d}F_\mu, \tag{2.4.22}$$

para toda $f \in C(K)$. Para isso, vamos mostrar que fixada $f \in C(K)$, vale que $\Big|\int_K f\mathrm{d}\mu - \int_K f\mathrm{d}F_\mu\Big| < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$. Inicialmente, afirmamos que dado $\varepsilon > 0$, existe uma partição P_1 de K tal que:

$$\Big|\int_K f\mathrm{d}\mu - S(f, F_\mu; P)\Big| < \varepsilon/2, \tag{2.4.23}$$

para toda partição P de K que contém P_1. De fato, fixada uma partição P de K, escreva:

$$P = \{0 = t_0 < \ldots < t_k = \max K\}$$

e defina a função simples $g_P : K \to \mathbb{R}$ declarando que $g_P(0) = f(0)$ e $g_P|_{]t_j,t_{j+1}]} \equiv f(t_{j+1})$, $j = 0, \ldots, k-1$. Note que $S(f, F_\mu; P) = \int_K g_P\mathrm{d}\mu$ e portanto:

(2.4.24)

$$\Big|\int_K f\mathrm{d}\mu - S(f, F_\mu; P)\Big| \le \int_K |f - g_P|\mathrm{d}|\mu| \le \max_{0 \le j \le k-1} \big(diam(f|_{]t_j,t_{j+1}]})\big)\|\mu\|.$$

Tome P_1 como sendo a partição que o Lema 2.2.8 nos dá para a função contínua f e o número real positivo $\varepsilon/2\|\mu\|$. Então, a desigualdade (2.4.24) implica que (2.4.23) vale para toda partição P de K que contém P_1. Da definição da integral de Riemann–Stieltjes segue que existe uma partição P_2 de K tal que:

$$\Big|\int_K f\mathrm{d}F_\mu - S(f, F_\mu; P)\Big| < \varepsilon/2, \tag{2.4.25}$$

para toda partição P de K que contém P_2. Se definirmos $Q = P_1 \cup P_2$, então as desigualdades (2.4.23) e (2.4.25) implicam que:

$$\Big|\int_K f\mathrm{d}F_\mu - \int_K f\mathrm{d}\mu\Big| \le \Big|\int_K f\mathrm{d}F_\mu - S(f, F_\mu; Q)\Big| + \Big|S(f, F_\mu; Q) - \int_K f\mathrm{d}\mu\Big| < \varepsilon.$$

Isso estabelece nosso resultado. □

LEMA 2.4.19. *Sejam K uma reta compacta e $T : M(K) \to \mathrm{NBV}(K)$ e $S : \mathrm{NBV}(K) \to M(K)$ os operadores definidos por* (2.4.15) *e* (2.4.20)*, respectivamente. Se F é um elemento de* $\mathrm{NBV}(K)$*, então $T\big(S(F)\big) = F$.*

DEMONSTRAÇÃO. Recorde que $S(F) = \mu_F$, onde μ_F é o único elemento de $M(K)$ que satisfaz a igualdade (2.4.19) e note que a conclusão segue se mostrarmos que $F(t) = \mu_F\big([0,t]\big)$, para todo $t \in K$. Primeiro, vamos analisar o caso em que t é isolado à direita em K. Nesse caso, temos que a função característica do intervalo $[0,t]$ pertence a $C(K)$ e portanto:

$$\mu_F\big([0,t]\big) = \int_K \chi_{[0,t]}\mathrm{d}\mu_F = \int_K \chi_{[0,t]}\mathrm{d}F. \tag{2.4.26}$$

Por outro lado, se P é uma partição de K que contém t, então vale que $S(\chi_{[0,t]}, F; P) = F(t)$, o que implica que:

$$\int_K \chi_{[0,t]}\mathrm{d}F = F(t), \tag{2.4.27}$$

já que a coleção de todas as partições de K que contém t é um subconjunto cofinal da coleção de partições de K. Das equações (2.4.27) e (2.4.26) segue que $F(t) = \mu_F\big([0,t]\big)$. Agora, vamos mostrar o resultado no caso em que t não é isolado à direita em K. Para isso, vamos verificar que:

$$\big|F(t) - \mu_F\big([0,t]\big)\big| < \varepsilon, \quad \text{para todo } \varepsilon > 0.$$

Fixado $\varepsilon > 0$, da regularidade de μ_F segue que existe $s \in K$ com $t < s$ tal que $|\mu_F|\big(\,]t,s]\,\big) < \varepsilon/3$. Além disso, como a função F é contínua à direita em t, a Proposição 2.4.11 garante que a função V_F também é contínua à direita em t e portanto, existe $r \in\,]t,s]$ tal que $V_F(r) - V_F(t) < \varepsilon/3$. De acordo com o Lema de Urysohn, existe uma função contínua $f : K \to [0,1]$ tal que $f|_{[0,t]} \equiv 1$ e $f|_{[r,\max K]} \equiv 0$. Da definição da função f vem que:

$$\int_K f\mathrm{d}\mu_F = \mu_F\big([0,t]\big) + \int_{]t,r]} f\mathrm{d}\mu_F. \tag{2.4.28}$$

Além disso:

$$\Big|\int_{]t,r]} f\mathrm{d}\mu_F\Big| \le \int_{]t,r]} \mathrm{d}|\mu_F| = |\mu_F|\big(\,]t,r]\,\big) \le |\mu_F|\big(\,]t,s]\,\big) < \varepsilon/3. \tag{2.4.29}$$

Note que se P é uma partição de K que contém os pontos t e r, então:

$$\Big|\sum_{j=0}^{k-1} f(t_{j+1})\big(F(t_{j+1}) - F(t_j)\big)\Big| < \varepsilon/3, \tag{2.4.30}$$

onde $P \cap [t,r] = \{t = t_0 < \ldots < t_k = r\}$. De fato, calculemos:

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{j=0}^{k-1} f(t_{j+1})\big(F(t_{j+1}) - F(t_j)\big)\Big| &\le \sum_{j=0}^{k-1} |F(t_{j+1}) - F(t_j)| \\ &= V\big(F|_{[t,r]}; P\cap[t,r]\big) \\ &\le V\big(F|_{[t,r]}\big) = V_F(r) - V_F(t) < \varepsilon/3.\end{aligned}$$

Finalmente, da definição da integral de Riemann–Stieltjes segue que existe uma partição P_0 de K tal que $\{t,r\} \subset P_0$ e $\Big|\int_K f\mathrm{d}F - S(f,F;P_0)\Big| < \varepsilon/3$.

Além disso:

$$S(f,F;P_0)=F(t)+\sum_{j=0}^{k-1} f(t_{j+1})\big(F(t_{j+1})-F(t_j)\big), \tag{2.4.31}$$

onde $P_0\cap[t,r]=\{t=t_0<\ldots<t_k=r\}$.

Usando as equações (2.4.31) e (2.4.28), obtemos a igualdade (*) abaixo e concluímos nossa tese:

$$\begin{aligned}
&\Big|F(t)-\mu_F\big([0,t]\big)\Big| \\
&\overset{(*)}{=} \Big|S(f,F;P_0)-\sum_{j=0}^{k-1} f(t_{j+1})\big(F(t_{j+1})-F(t_j)\big)-\int_K f\,\mathrm{d}\mu_F+\int_{]t,r]} f\,\mathrm{d}\mu_F\Big| \\
&\qquad \overset{(2.4.30)}{<} \Big|S(f,F;P_0)-\int_K f\,\mathrm{d}\mu_F\Big|+\Big|\int_{]t,r]} f\,\mathrm{d}\mu_F\Big|+\varepsilon/3 \\
&\qquad\qquad \overset{(2.4.29)}{<} \Big|S(f,F;P_0)-\int_K f\,\mathrm{d}\mu_F\Big|+2\varepsilon/3<\varepsilon.
\end{aligned}$$

Note que na última desigualdade, usamos o fato que $\int_K f\mathrm{d}\mu_F=\int_K f\mathrm{d}F$ e a definição de P_0. □

Por fim, as desigualdades (2.4.16) e (2.4.21) implicam que T preserva norma. Dessa forma, com o feito até aqui, estabelecemos a prova do Teorema 2.4.20 abaixo.

TEOREMA 2.4.20. *Seja K uma reta compacta. A função:*

$$M(K)\ni\mu\mapsto F_\mu\in NBV(K) \tag{2.4.32}$$

é uma isometria linear, onde $F_\mu(t)=\mu\big([0,t]\big)$, para todo $t\in K$ e o espaço NBV(K) *está munido da norma da variação total.* □

OBSERVAÇÃO 2.4.21. Analogamente ao discutido na Observação 2.3.18, dada uma reta compacta K, definimos a *topologia fraca** em NBV(K) como sendo a topologia induzida pela isometria $S:\mathrm{NBV}(K)\to M(K)$ dada pelo Teorema 2.4.20, se considerarmos o espaço $M(K)$ munido de sua topologia fraca*. Ou seja, a topologia fraca* em NBV(K) é a menor topologia em NBV(K) que faz com que a função $S:\mathrm{NBV}(K)\to\big(M(K),w^*\big)$ seja contínua. Na verdade, se τ denota a topologia fraca* em NBV(K), então a função $S:\big(\mathrm{NBV}(K),\tau\big)\to\big(M(K),w^*\big)$ é um homeomorfismo e portanto, temos que uma rede $(F_\lambda)_\lambda$ de elementos de NBV(K) converge na topologia τ para $F\in\mathrm{NBV}(K)$ se, e somente se, $\big(S(F_\lambda)\big)_\lambda$ converge para $S(F)$ na topologia frca* de $M(K)$.

Terminamos a seção, provando algumas propriedades do espaço dual de $C(K)$, no contexto de retas compactas. Na Proposição 2.4.25, caracterizamos a convergência fraca* de redes limitadas em $M(K)$, onde K é uma reta compacta zero-dimensional. Para isso, precisamos dos dois lemas a seguir.

Lema 2.4.22. *Seja K um espaço compacto Hausdorff. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) *O conjunto:*

$$\{\chi_C : C \text{ é um subconjunto aberto-fechado de } K\} \tag{2.4.33}$$

é linearmente denso em $C(K)$;

(b) *K é zero-dimensional.*

Demonstração. Suponha que K seja zero-dimensional e vamos mostrar que vale (a). Note que a conclusão segue se mostrarmos que fixados $f \in C(K)$ e $\varepsilon > 0$, existe uma função g no subespaço vetorial gerado pelo conjunto (2.4.33) e tal que $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$. Como f é uma função limitada, existem um inteiro positivo n e intervalos abertos $\big(\,]a_j, b_j[\,\big)_{j=1,\dots,n}$ de $\mathbb{R}$ tais que $a_j < b_j$, $b_j - a_j < \varepsilon$, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ e $f[K] \subset \bigcup_{j=1}^n]a_j, b_j[$. Para cada j, denotemos por U_j o subconjunto aberto $f^{-1}\big[\,]a_j, b_j[\,\big]$ de K. Sem perda de generalidade, podemos supor que cada U_j é não vazio. Do fato de K ser zero-dimensional segue que, fixado j, existe um conjunto Λ_j tal que $U_j = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_j} C_\lambda$, onde cada C_λ é um subconjunto aberto-fechado de K. Dessa forma, temos que $K = \bigcup_{j=1}^n \bigcup_{\lambda \in \Lambda_j} C_\lambda$. Como K é compacto, isso implica que $K = \bigcup_{i=1}^m A_i$, onde m é um inteiro positivo, cada A_i é um subconjunto aberto-fechado de K, $A_i \cap A_l = \emptyset$, se $i \neq l$ e fixado i, existe um $j_i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $A_i \subset U_{j_i}$. Finalmente, tome $p_{j_i} \in U_{j_i}$ e defina $g = \sum_{i=1}^m f(p_{j_i}) \chi_{A_i}$. Para concluir a tese, observe que g pertence ao subespaço vetorial gerado pelo conjunto (2.4.33) e que $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$.

Agora, assuma (a) e vamos mostrar que K é zero-dimensional. Para isso, devemos provar que dados um aberto U de K e um ponto p de U, existe um subconjunto aberto-fechado C de K tal que $p \in C$ e $C \subset U$. Do fato de K ser normal e T_1 segue que existe um subconjunto fechado F de K tal que $p \in F$ e $F \subset U$. Dessa forma, o Lema de Urysohn garante que existe um função contínua $f : K \to [0, 1]$ tal que $f|_F \equiv 1$ e $f|_{U^C} \equiv 0$. Assim, a condição (a) implica que existe uma função g no subespaço vetorial gerado pelo conjunto (2.4.33) tal que:

$$\|f - g\|_\infty < 1/2. \tag{2.4.34}$$

Note que a função g pode ser escrita como $g = \sum_{j=1}^n \lambda_j \chi_{C_j}$, onde n é um inteiro positivo, $\lambda_j \in \mathbb{R}$, cada C_j é um subconjunto aberto-fechado de K, $C_j \cap C_i = \emptyset$, se $j \neq i$ e $K = \bigcup_{j=1}^n C_j$. Logo, existe um único $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $p \in C_j$. Vamos mostrar que $C_j \subset U$. Suponha, por absurdo, que $C_j \cap U^C \neq \emptyset$. Se $x \in C_j \cap U^C$, então temos que $|\lambda_j| < 1/2$, pois vale a desigualdade (2.4.34) e $f(x) = 0$. Por outro lado, como p pertence a C_j, a desigualdade (2.4.34) também implica que $|1 - \lambda_j| < 1/2$. Essa contradição mostra que $C_j \subset U$ e assim, estabelecemos nosso resultado. $\square$

Observação 2.4.23. Note que se K é um espaço compacto Hausdorff, então o subespaço de $C(K)$ formado pelas funções simples coincide com o subespaço vetorial de $C(K)$ gerado pelo conjunto (2.4.33). Portanto, o Lema 2.4.22 acima implica que K é zero-dimensional se, e somente se, o subespaço vetorial de $C(K)$ formado pelas funções simples é denso em $C(K)$.

LEMA 2.4.24. *Seja K uma reta compacta zero-dimensional. O conjunto:*

$$\{\chi_{[0,t]} : \ t \text{ é isolado à direita em } K\}$$

é linearmente denso em $C(K)$.

DEMONSTRAÇÃO. De acordo com o Lema 2.4.22, o resultado segue se mostrarmos que se C é um subconjunto aberto-fechado de K, então:

$$\chi_C \in span\{\chi_I : \ I \text{ é um intervalo aberto-fechado de } K\} \tag{2.4.35}$$

e que se I é um intervalo aberto-fechado de K, então:

$$\chi_I \in span\{\chi_{[0,t]} : t \text{ é isolado à direita em } K\}. \tag{2.4.36}$$

Inicialmente, vamos mostrar que vale (2.4.35). Fixado um subconjunto aberto-fechado C de K, sabemos que C se escreve como a união disjunta de suas componentes convexas. Como K é completo e as componentes convexas de C têm a pvi, a Proposição 2.1.17 garante que essas componentes convexas são intervalos de K. Além disso, de acordo com a Proposição 2.1.19, temos que as componentes convexas de C são subconjuntos aberto-fechados de K, já que C é aberto-fechado. Escreva $C = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$, onde os intervalos aberto-fechados I_λ são as componentes convexas de C. Da compacidade de C, segue que existe um subconjunto finito F de Λ tal que $C = \bigcup_{\lambda\in F} I_\lambda$ e portanto, vale que $\chi_C = \sum_{\lambda\in F} \chi_{I_\lambda}$. Isso estabelece (2.4.35). Agora, vejamos que vale (2.4.36). Se I é um intervalo aberto-fechado de K, então vale que $I = [0, b]$, $I = \,]a, b]$ ou $I = \,]a, \max K]$, onde a e b são isolados à direita em K. Finalmente, note que se $I = \,]a, b]$, então $\chi_I = \chi_{[0,b]} - \chi_{[0,a]}$ e se $I = \,]a, \max K]$, então $\chi_I = \chi_K - \chi_{[0,a]}$. □

PROPOSIÇÃO 2.4.25. *Sejam K uma reta compacta zero-dimensional, μ um elemento de $M(K)$ e $(\mu_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma rede limitada em $M(K)$. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) *$(\mu_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge para μ na topologia fraca* de $M(K)$;*
(b) *$\mu_\lambda\big([0,t]\big) \longrightarrow \mu\big([0,t]\big)$, para todo t isolado à direita em K;*
(c) *$F_{\mu_\lambda}(t) \longrightarrow F_\mu(t)$, para todo t isolado à direita em K, onde F_{μ_λ} e F_μ são os elementos de $\mathrm{NBV}(K)$ associados a μ_λ e a μ, respectivamente, através da isometria dada no Teorema 2.4.20.*

DEMONSTRAÇÃO. A equivalência entre (a) e (b) segue dos Lemas 1.1.9 e 2.4.24. A equivalência entre (b) e (c) segue das definições de F_μ e F_{μ_λ}. □

No contexto das retas compactas que não são zero-dimensionais, não temos uma caracterização tão boa quanto a Proposição 2.4.25 da convergência fraca* de redes limitadas em $M(K)$ e em $\mathrm{NBV}(K)$. No Corolário 2.4.28, apresentaremos uma caracterização da convergência fraca* de redes limitadas em $M(K)$ em termos da convergência fraca* em $M(L)$ e em $M\big(\phi^{-1}(t)\big)$, para t em L, onde L é outra reta compacta e $\phi : K \to L$ é uma função contínua crecente e sobrejetora. Analogamente à Proposição 2.4.25, estabeleceremos esse critério de convergência, usando o fato que um determinado subconjunto de $C(K)$ é linearmente denso em $C(K)$.

DEFINIÇÃO 2.4.26. Fixadas retas compactas K e L e $\phi : K \to L$ uma função contínua, crescente e sobrejetora, denotamos por $R_t : K \to \phi^{-1}(t)$ a *retração canônica* de K no intervalo fechado $\phi^{-1}(t)$ de K, ou seja:

$$\begin{aligned} R_t(s) &= \min \phi^{-1}(t), \quad \text{se } s \in \big[0, \min \phi^{-1}(t)\big[, \\ &= s, \quad \text{se } s \in \phi^{-1}(t), \\ &= \max \phi^{-1}(t), \quad \text{se } t \in \big]\max \phi^{-1}(t), \max K\big]. \end{aligned}$$

PROPOSIÇÃO 2.4.27. *Sejam K e L retas compactas e $\phi : K \to L$ uma função contínua, crescente e sobrejetora. O conjunto:*

$$\phi^* C(L) \cup \bigcup_{t \in Q(\phi)} R_t^* C\big(\phi^{-1}(t)\big) \tag{2.4.37}$$

é linearmente denso em $C(K)$, onde R_t está descrito na Definição 2.4.26 e $\phi^* : C(L) \to C(K)$ e $R_t^* : C\big(\phi^{-1}(t)\big) \to C(K)$ denotam os operadores de composição de ϕ e R_t, respectivamente.

DEMONSTRAÇÃO. A Proposição 2.2.12 diz que o conjunto das funções crescentes e contínuas é linearmente denso em $C(K)$. Assim, basta tomarmos uma função crescente arbitrária $f \in C(K)$ e mostrarmos que ela pertence ao fecho do subespaço vetorial gerado pelo conjunto (2.4.37). Para cada $t \in L$, escreva $\phi^{-1}(t) = [a_t, b_t]$ e seja g_t o único elemento de $R_t^* C\big(\phi^{-1}(t)\big)$ que coincide com $f - f(a_t)$ em $[a_t, b_t]$. Então:

$$\sum_{t \in Q(\phi)} \|g_t\|_\infty = \sum_{t \in Q(\phi)} \big(f(b_t) - f(a_t)\big) \overset{(*)}{\leq} f(\max K) - f(0) < +\infty. \tag{2.4.38}$$

Note que a desigualdade (*) vale, pois f é uma função de variação limitada e sua variação total é $f(\max K) - f(0)$. Dessa forma, a série $\sum_{t \in Q(\phi)} g_t$ converge para alguma $g \in C(K)$. Note que g pertence ao fecho do subespaço gerado por $\bigcup_{t \in Q(\phi)} R_t^* C\big(\phi^{-1}(t)\big)$. Além disso, a função $f - g$ é constante em $[a_t, b_t]$, para todo $t \in Q(\phi)$, o que implica que $f - g \in \phi^* C(L)$. □

COROLÁRIO 2.4.28. *Sejam K e L retas compactas e $\phi : K \to L$ uma função contínua, crescente e sobrejetora. Para cada t em L, considere o operador R_t como descrito na Definição 2.4.26. Se $(\mu_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é uma rede limitada em $M(K)$ e μ é um elemento de $M(K)$, então as seguintes condições são equivalentes:*

(a) *a rede $(\mu_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ converge para μ na topologia fraca* de $M(K)$;*
(b) *a rede $(\phi_* \mu_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ converge para $\phi_* \mu$ na topologia fraca* de $M(L)$ e a rede $\big((R_t)_* \mu_\lambda\big)_{\lambda \in \Lambda}$ converge para $(R_t)_* \mu$ na topologia fraca* de $M\big(\phi^{-1}(t)\big)$, para todo $t \in Q(\phi)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Note que o Corolário 2.3.23 garante que (a) implica (b), mesmo no caso em que a rede $(\mu_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ não é limitada. O fato que (b) implica (a) segue da Proposição 2.4.27 e do Lema 1.1.9. □

Uma outra consequência interessante da Proposição 2.4.27 é o Corolário 2.4.29 abaixo, que é um bom critério para se estabelecer a metrizabilidade de K em termos da metrizabilidade de L e das fibras $\phi^{-1}(t)$, para $t \in L$.

COROLÁRIO 2.4.29. *Sejam K e L retas compactas e $\phi : K \to L$ uma função contínua, crescente e sobrejetora. Vale que K é metrizável se, e somente se, L é metrizável, o conjunto $Q(\phi)$ é enumerável e $\phi^{-1}(t)$, munido da topologia induzida de K, é metrizável, para todo $t \in Q(\phi)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que K seja metrizável. Nesse caso, o espaço $C(K)$ é separável e como $\phi^* : C(L) \to C(K)$ é uma imersão isométrica, temos que $C(L)$ também é separável. O que implica que L é metrizável. Fixado $t \in L$, temos que $\phi^{-1}(t)$ é metrizável, pois é um subespaço de K. Finalmente, considere os seguintes subconjuntos de L:

$$A = \{t \in L : |\phi^{-1}(t)| = 2\} \ \text{ e } \ B = \{t \in L : |\phi^{-1}(t)| > 2\}$$

e note que $Q(\phi) = A \cup B$. Dessa forma, para concluir que $Q(\phi)$ é enumerável, devemos mostrar que os conjuntos A e B são enumeráveis. Note que se t pertence a A, então $\min \phi^{-1}(t)$ é isolado à direita em K e portanto, do fato de K possuir uma base enumerável de abertos e do Lema 2.1.25 segue que A é enumerável. Note também que se t pertence a B, então o intervalo aberto $\big]\min \phi^{-1}(t), \max \phi^{-1}(t)\big[$ é não vazio, logo a separabilidade de K implica que B é enumerável. A recíproca é obtida, notando-se que nossas hipóteses implicam que o conjunto (2.4.37) é separável e a Proposição 2.4.27 garante que esse conjunto é linearmente denso em $C(K)$. □

Note que usando o Corolário 2.4.29, temos uma nova prova do fato que se X é um subconjunto enumerável de $[0,1]$, então $\mathrm{DA}(X)$ é metrizável (Proposição 2.1.26). Para ver isso, basta considerar a primeira projeção $\pi_1 : \mathrm{DA}(X) \to [0,1]$.

OBSERVAÇÃO 2.4.30. Se $\phi : K \to L$ é uma função contínua entre retas compactas K e L, de acordo com a Proposição 2.3.22, temos que o operador transposto de ϕ^*, denotado por $\phi_* : M(K) \to M(L)$ é dado por $\phi_*\mu(B) = \mu\big(\phi^{-1}[B]\big)$, para toda medida μ em $M(K)$ e todo boreliano B de L. Dessa forma, se denotarmos por F_μ e $F_{\phi_*\mu}$ os elementos de $\mathrm{NBV}(K)$ e $\mathrm{NBV}(L)$ associados a μ e a $\phi_*\mu$ respectivamente, através da isometria dada no Teorema 2.4.20, então ficamos com:

$$F_{\phi_*\mu}(t) = \phi_*\mu\big([0,t]\big) = \mu\big(\phi^{-1}[0,t]\big),$$

para todo $t \in L$. Portanto, se ϕ também é crescente e sobrejetora, então:

$$F_{\phi_*\mu}(t) = \mu\big(\phi^{-1}[0,t]\big) = \mu\big([0, \max \phi^{-1}(t)]\big) = F_\mu\big(\max \phi^{-1}(t)\big), \tag{2.4.39}$$

para todo $t \in L$ e $\mu \in M(K)$. Além disso, note que se $\phi : K \to L$ é contínua, crescente e sobrejetora e F e F' são elementos de $\mathrm{NBV}(L)$ e $\mathrm{NBV}(K)$, respectivamente, tais que $F(t) = F'\big(\max \phi^{-1}(t)\big)$, para todo $t \in L$, então temos que $F = \phi_* F'$.

Agora, vamos mostrar na Proposição 2.4.32 que toda medida de Borel regular e finita numa reta compacta tem suporte separável. Isso será uma consequência do próximo lema.

Lema 2.4.31. *Sejam L uma reta compacta e μ um elemento de $M(L)$. Se μ é uma medida não negativa e $\mu(I) > 0$, para todo intervalo aberto e não vazio I de L, então L é separável.*

Demonstração. Inicialmente, note que o conjunto E formado pelos pontos isolados de L é enumerável. De fato, se t é um ponto isolado de L, então $\{t\}$ é um intervalo aberto e não vazio e portanto, nossa hipótese implica que $\mu\big(\{t\}\big) > 0$. Além disso, do fato de μ ser finita segue que o conjunto dos pontos t de L tais que $\mu\big(\{t\}\big) > 0$ é enumerável. Denote por F o elemento de $\mathrm{NBV}(L)$ associado à medida μ através da isometria linear apresentada no Teorema 2.4.20. O fato de μ ser não negativa implica que F é crescente. Além disso, temos que dados $t, s \in L$, se $t < s$ e s não é o sucessor de t, então $F(t) < F(s)$. De fato, se s não é o sucessor de t, então o intervalo aberto $]t, s[$ é não vazio. Logo, temos que $\mu\big(\,]t, s[\,\big) > 0$ e portanto, ficamos com:

$$F(s) = \mu\big([0, s]\big) = F(t) + \mu\big(\,]t, s]\,\big) > F(t).$$

Como $F[L]$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$, vale que $F[L]$ é separável, se munido da topologia induzida de $\mathbb{R}$. Seja $\{u_n : n \geq 1\}$ um subconjunto denso de $F[L]$ e fixado $n \geq 1$, escolha um elemento t_n de L tal que $F(t_n) = u_n$. Defina o seguinte subconjunto enumerável de L:

$$D = E \cup \{t_n : n \geq 1\} \cup \{0, \max L\}.$$

Vamos mostrar que D é denso em L. Note que a conclusão segue se mostrarmos que todo intervalo aberto e não vazio I de L possui um elemento de D. Sabemos que $I = [0, b[$, $I = \,]a, \max L]$ ou $I = \,]a, b[$, onde a e b pertencem a L e $a < b$. Nos dois primeiros casos, é claro que $I \cap \{0, \max L\} \neq \emptyset$. Falta analisar o caso em que $I = \,]a, b[$, com $a < b$. Nesse caso, vamos mostrar que $I \cap E \neq \emptyset$ ou $]F(a), F(b)[\, \cap F[L] \neq \emptyset$. Suponha que $I \cap E = \emptyset$ e note que o fato de I ser não vazio implica que $F(a) < F(b)$. Seja $t \in \,]a, b[$ e suponha que $F(t) \notin \,]F(a), F(b)[$. Como a função F é crescente, temos que $F(t) = F(a)$ ou $F(t) = F(b)$. Suponha, sem perda de generalidade, que $F(t) = F(a)$. Isso implica que t é o sucessor de a e assim, t não é isolado à direita, pois $t \notin E$. Dessa forma, existem elementos s_1, s_2 e s_3 de L com $t < s_3 < s_2 < s_1 < b$, o que implica que $F(a) = F(t) < F(s_2) < F(b)$. Logo, temos que $]F(a), F(b)[\, \cap F[L] \neq \emptyset$. Portanto, da densidade de $\{u_n : n \geq 1\}$ na imagem de F segue que existe $n \geq 1$ tal que $u_n \in \,]F(a), F(b)[\, \cap F[L]$.

Para concluir a prova, note que o fato de F ser crescente implica que $t_n \in \,]a, b[$. $\square$

PROPOSIÇÃO 2.4.32. *Seja K uma reta compacta. Se μ é um elemento de $M(K)$, então o suporte de μ é separável, se munido da topologia de subespaço.*

DEMONSTRAÇÃO. Denote por L o suporte de μ. Sabemos que L é um subconjunto fechado de K e portanto, é uma reta compacta, se munida da restrição da ordem de K. Seja $\mu|_L$ a restrição de μ à σ-álgebra dos borelianos de L. De acordo com a Proposição 2.3.24, temos que $\mu|_L \in M(L)$. Além disso, é fácil ver que o suporte da medida $\mu|_L$ é todo o L. Assim, se definirmos ν como sendo a variação total de $\mu|_L$, então ν satisfaz as hipóteses do Lema 2.4.31 e portanto, a reta compacta L é separável. Finalmente, como K é um conjunto totalmente ordenado completo e L é um subconjunto fechado de K, a Proposição 2.1.12 garante que a topologia induzida pela restrição da ordem de K a L e a topologia de subespaço coincidem em L. $\square$

CAPÍTULO 3

Caracterização de funções crescentes com a c_0EP

O objetivo desse capítulo é estudar a propriedade da c_0-extensão no contexto de subálgebras de Banach do espaço de funções contínuas de uma reta compacta. Como discutido no Apêndice A, as subálgebras de Banach com unidade de $C(K)$ são da forma $\phi^*C(L)$, para algum par (L, ϕ), onde L é um espaço compacto Hausdorff e $\phi : K \to L$ é uma função contínua e sobrejetora. O principal resultado desse capítulo é o Teorema 3.1.7 que estabelece uma condição necessária e suficiente para que a subálgebra $\phi^*C(L)$ tenha a c_0EP em $C(K)$, no caso em que K e L são retas compactas e $\phi : K \to L$ é uma função contínua, crescente e sobrejetora. Na Seção 3.2, estudamos em mais detalhes o caso em que a reta compacta L é separável. Nesse caso, temos no Teorema 3.2.1 uma simplificação da caracterização apresentada no Teorema 3.1.7. Por fim, analisamos uma questão que surge naturalmente em face do Teorema 3.2.1 e provamos que sua resposta é independente dos axiomas de ZFC. Ao longo desse capítulo, K e L sempre denotarão retas compactas e $\phi : K \to L$ uma função contínua, crescente e sobrejetora.

3.1. Caracterização de funções crescentes com a c_0EP

Uma das peças fundamentais na prova do Teorema 3.1.7 é a Proposição 3.1.4 que é um critério para a extensão a $C(K)$ de operadores limitados definidos na subálgebra $\phi^*C(L)$ e tomando valores em c_0. Dessa forma, iniciamos a seção com a prova dessa proposição. A seguir, apresentamos alguns lemas que serão usados na demonstração da Proposição 3.1.4. Na Seção 2.4, vimos que as funções de variação limitada apresentam muitas propriedades de regularidade. O Lema 3.1.1 é mais um resultado nesse sentido. Dado um conjunto X, sempre denotaremos a coleção de subconjuntos finitos de X por $\wp_{\text{fin}}(X)$.

LEMA 3.1.1. *Seja $F : L \to \mathbb{R}$ uma função e para cada ponto $t > 0$ isolado à esquerda em L, denote por t^- o antecessor de t em L. Se F tem variação limitada, então o conjunto:*

$$S = \{t \in L : t \neq 0,\ t \text{ é isolado à esquerda e } F(t) \neq F(t^-)\}$$

é enumerável.

Demonstração. Note que se A pertence a $\wp_{\mathrm{fin}}(S)$, então o conjunto $\{0, \max L\} \cup \bigcup_{t\in A}\{t, t^-\}$ é uma partição de L. Logo, temos que:

$$\sum_{t\in A} |F(t) - F(t^-)| \leq V(F).$$

Além disso:

$$\sum_{t\in S} |F(t) - F(t^-)| = \sup_{A\in\wp_{\mathrm{fin}}(S)} \sum_{t\in A} |F(t) - F(t^-)| \leq V(F) < \infty,$$

pois F tem variação limitada. O que implica que S é enumerável. □

Lema 3.1.2. *Se $(F_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência fraca*-nula em* $\mathrm{NBV}(L)$*, então o conjunto de pontos externos t de L em que $F_n(t) \not\longrightarrow 0$ é enumerável.*

Demonstração. Dado um elemento t de L, se t é um ponto isolado à esquerda de L e $t > 0$, então denote por t^- o antecessor de t. Como cada F_n tem variação limitada, o Lema 3.1.1 implica que a conclusão segue se mostrarmos que R está contido em:

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} \{t \in L : t \neq 0,\ t \text{ é isolado à esquerda e } F_n(t) \neq F_n(t^-)\}, \tag{3.1.1}$$

onde R denota o conjunto dos pontos externos t de L tais que $t \neq 0$ e $F_n(t) \not\longrightarrow 0$. Note que se t é um ponto isolado à direita, então o intervalo $[0, t]$ é um subconjunto aberto-fechado de L e portanto, $\chi_{[0,t]} \in C(L)$. Além disso, se para cada $n \geq 1$, μ_n denota o elemento de $M(L)$ associado a F_n, através da isometria dada no Teorema 2.4.20, então temos que:

$$F_n(t) = \mu_n\big(\chi_{[0,t]}\big) = \mu_n\big([0,t]\big) \longrightarrow 0.$$

Dessa forma, R está contido no conjunto dos pontos isolados à esquerda de L tais que $F_n(t) \not\longrightarrow 0$. Finalmente, para concluir nosso resultado, observe que se t é um ponto isolado à esquerda de L e $t > 0$, então o antecessor t^- de t é isolado à direita em L e portanto, vale que $F_n(t^-) \longrightarrow 0$. □

Lema 3.1.3. *Seja $F : L \to \mathbb{R}$ um elemento de* $\mathrm{NBV}(L)$*. Se definirmos a função $G : K \to \mathbb{R}$ como $G = F \circ \phi$, então G pertence a* $\mathrm{NBV}(K)$ *e* $\|G\|_{\mathrm{BV}} = \|F\|_{\mathrm{BV}}$.

Demonstração. A continuidade à direita de G segue facilmente da continuidade à direita de F e do fato de ϕ ser contínua, crescente e sobrejetora. Agora, vamos mostrar que $\|G\|_{\mathrm{BV}} = \|F\|_{\mathrm{BV}}$, o que implicará que G possui variação limitada. Note que como $G(0) = F\big(\phi(0)\big) = F(0)$, para estabelecer nosso resultado, basta verificarmos que $V(G) = V(F)$. Inicialmente, vejamos que $V(G) \leq V(F)$. Dada uma partição:

$$P = \{0 = s_0 < \ldots < s_n = \max K\}$$

de K, usando a função ϕ, produzimos uma partição Q de L, definindo:

$$Q = \{0 = \phi(s_0) \leq \phi(s_1) \leq \ldots \leq \phi(s_n) = \max L\}.$$

Dessa forma, ficamos com:

$$\begin{aligned} V(G;P) = \sum_{j=0}^{n-1} |G(s_{j+1}) - G(s_j)| &= \sum_{j=0}^{n-1} |F\big(\phi(s_{j+1})\big) - F\big(\phi(s_j)\big)| \\ &= V(F;Q) \leq V(F). \end{aligned}$$

O que implica que $V(G) \leq V(F)$. Por outro lado, dada uma partição Q de L, também podemos definir uma partição P de K usando Q e ϕ. De fato, fixe $Q = \{0 = t_0 < \ldots < t_n = \max L\}$ e para cada $j = 1, \ldots, n-1$, tome $s_j \in K$ tal $\phi(s_j) = t_j$. Finalmente, tome $s_0 = 0$ e $s_n = \max K$ e defina P como sendo o conjunto $\{0 = s_0 < \ldots < s_n = \max K\}$. Logo:

$$\begin{aligned} V(F;Q) &= \sum_{j=0}^{n-1} |F(t_{j+1}) - F(t_j)| = \sum_{j=0}^{n-1} |F\big(\phi(s_{j+1})\big) - F\big(\phi(s_j)\big)| \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} |G(s_{j+1}) - G(s_j)| = V(G;P) \leq V(G), \end{aligned}$$

e portanto, vale que $V(F) \leq V(G)$. $\square$

PROPOSIÇÃO 3.1.4. *Seja $T : C(L) \to c_0$ um operador limitado associado a uma sequência fraca*-nula $(F_n)_{n\geq 1}$ em* NBV(L). *As seguintes condições são equivalentes:*

(a) *Existe um operador limitado $T' : C(K) \to c_0$ tal que $T' \circ \phi^* = T$;*
(b) *O conjunto dos pontos $t \in Q(\phi)$ em que $F_n(t) \not\to 0$ é enumerável;*
(c) *O conjunto dos pontos $t \in Q_0(\phi)$ em que $F_n(t) \not\to 0$ é enumerável;*
(d) *Existe um operador limitado $T' : C(K) \to c_0$ tal que $T' \circ \phi^* = T$ e $\|T'\| \leq 2\|T\|$.*

DEMONSTRAÇÃO. A equivalência entre (b) e (c) segue diretamente do Lema 3.1.2. Para cada $t \in L$, escreva $\phi^{-1}(t) = [a_t, b_t]$. Agora, assuma (a) e vamos provar (b). O operador T' está associado a uma sequência fraca*-nula $(F'_n)_{n\geq 1}$ em NBV(K). Note que a igualdade $T' \circ \phi^* = T$ implica que:

$$F'_n(b_t) = F_n(t), \ \forall n \geq 1 \text{ e } \forall t \in L. \tag{3.1.2}$$

De fato, é fácil ver que a igualdade $T' \circ \phi^* = T$ implica que:

$$F_n = \phi_* F'_n, \ \forall n \geq 1. \tag{3.1.3}$$

Além disso, fixado n, segue da Observação 2.4.30 e da equação (3.1.3) que $F_n(t) = F'_n(b_t)$, para todo $t \in L$. Fixado $n \geq 1$, se μ'_n corresponde a F'_n, através da isometria dada no enunciado do Teorema 2.4.20, então temos que $\sum_{t\in L} |\mu'_n|\big([a_t, b_t]\big) \leq \|\mu'_n\| < +\infty$ e portanto, o conjunto:

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} \{t \in L : |\mu'_n|\big([a_t, b_t]\big) > 0\} \tag{3.1.4}$$

é enumerável. Note que a conclusão segue se mostrarmos que dado $t \in Q(\phi)$, se t não pertence ao conjunto (3.1.4), então $F_n(t) \longrightarrow 0$. De fato, seja t um elemento de $Q(\phi)$ que não pertence ao conjunto (3.1.4) e considere $f : K \to [0,1]$ uma função contínua que satisfaz $f|_{[0,a_t]} \equiv 1$ e $f|_{[b_t,\max K]} \equiv 0$, cuja existência é garantida pelo Lema de Urysohn. A conclusão segue da equação (3.1.2) e do fato que:

$$F_n'(b_t) = \int_K f \mathrm{d}\mu_n' \longrightarrow 0,$$

pois a sequência $(\mu_n')_{n\geq 1}$ é fraca*-nula. Agora, assuma (b) e vamos provar que vale (d). Para cada $n \geq 1$, defina $G_n = F_n \circ \phi$. De acordo com o Lema 3.1.3, temos que G_n pertence a $\mathrm{NBV}(K)$ e $\|G_n\|_{\mathrm{BV}} = \|F_n\|_{\mathrm{BV}}$. Denote por $S : C(K) \to l_\infty$ o operador limitado associado à sequência limitada $(G_n)_{n\geq 1}$. Note que $G_n(b_t) = F_n(t)$, para todo $n \geq 1$ e $t \in L$, o que implica que $S \circ \phi^* = T$, como discutido na Observação 2.4.30. Portanto, a conclusão segue se mostrarmos que o quociente $C(K)/S^{-1}[c_0]$ é separável. De fato, se $C(K)/S^{-1}[c_0]$ é separável, então a Proposição 1.1.13 garante que $S|_{S^{-1}[c_0]}$ admite uma extensão $T' : C(K) \to c_0$ com $\|T'\| \leq 2\|S\|$ e portanto, vale que $T' \circ \phi^* = T$ e $\|T'\| \leq 2\|S\| = 2\|T\|$. De acordo com a Proposição 2.4.27, temos que o conjunto:

$$\phi^* C(L) \cup \bigcup_{t \in Q(\phi)} R_t^* C\big([a_t, b_t]\big) \tag{3.1.5}$$

é linearmente denso em $C(K)$. Dessa forma, para concluirmos a prova, basta checarmos que a imagem do conjunto (3.1.5) pela aplicação quociente $C(K) \to C(K)/S^{-1}[c_0]$ é separável. Inicialmente, note que $\phi^* C(L)$ está contido em $S^{-1}[c_0]$, já que $S \circ \phi^* = T$. Assim, nosso plano para concluir o resultado é mostrar que a imagem de $R_t^* C\big([a_t, b_t]\big)$ pela aplicação quociente $C(K) \to C(K)/S^{-1}[c_0]$ tem dimensão finita para todo $t \in Q(\phi)$ e que $R_t^* C\big([a_t, b_t]\big) \subset S^{-1}[c_0]$, para todo $t \in Q(\phi) \setminus E$, onde o conjunto enumerável E é definido como:

$$E = \{t \in Q(\phi) : F_n(t) \not\longrightarrow 0\}.$$

Para cada $n \geq 1$, denote por ν_n o elemento de $M(K)$ associado a G_n, através da isometria dada no enunciado do Teorema 2.4.20. Agora, fixados $n \geq 1$ e $t \in Q(\phi)$, denote por H_n o elemento de $\mathrm{NBV}\big([a_t, b_t]\big)$ associado à medida $(R_t)_* \nu_n$, através da isometria dada no enunciado do Teorema 2.4.20. Usando a equação (2.4.39) da Observação 2.4.30 para a medida ν_n e a função contínua, crescente e sobrejetora $R_t : K \to [a_t, b_t]$, obtemos:

$$H_n(s) = G_n\big(\max R_t^{-1}(s)\big), \ \forall s \in [a_t, b_t] \text{ e } n \geq 1.$$

O que implica que:

$$(R_t)_* \nu_n = F_n(t)\delta_{a_t} + \big(F_n(\max L) - F_n(t)\big)\delta_{b_t},$$

para todo $n \geq 1$ e $t \in Q(\phi)$. Assim, para $g \in C\big([a_t, b_t]\big)$, temos que:

$$S\big(R_t^*(g)\big) = \Big(F_n(t)g(a_t) + \big(F_n(\max L) - F_n(t)\big)g(b_t)\Big)_{n\geq 1} \in \ell_\infty. \tag{3.1.6}$$

Note que a equação (3.1.6) implica que se $t \in Q(\phi) \setminus E$, então $S\big(R_t^*(g)\big)$ pertence a c_0, já que a sequência $(F_n(\max L))_{n\geq 1}$ também converge para 0. Finalmente, vejamos que a imagem de $R_t^* C\big([a_t, b_t]\big)$ pela aplicação quociente $C(K) \to C(K)/S^{-1}[c_0]$ tem dimensão finita para todo $t \in Q(\phi)$. Para isso, note que de acordo com a equação (3.1.6), se g é um elemento de $C\big([a_t, b_t]\big)$ que satisfaz $g(a_t) = g(b_t) = 0$, então $S\big(R_t^*(g)\big) = 0$ e portanto, a imagem do subespaço fechado:

$$\{g \in C\big([a_t, b_t]\big) : g(a_t) = g(b_t) = 0\} \tag{3.1.7}$$

pelo operador R_t^* está contida no $\operatorname{Ker} S$. Além disso, temos que o subespaço (3.1.7) tem codimensão finita em $C\big([a_t, b_t]\big)$. $\square$

Observação 3.1.5. A Proposição 3.1.4 também garante que se $\phi^* C(L)$ tem a c_0EP em $C(K)$, então $\phi^* C(L)$ tem a 2-c_0EP em $C(K)$.

Para enunciarmos o Teorema 3.1.7, introduzimos a seguinte definição.

Definição 3.1.6. Sejam K e L retas compactas e $\phi : K \to L$ uma função contínua, crescente e sobrejetora. Dizemos que ϕ tem a *propriedade da c_0-extensão* (abreviadamente c_0EP) se, e somente se, a subálgebra $\phi^* C(L)$ tem a c_0EP em $C(K)$.

Teorema 3.1.7. *Sejam K e L retas compactas. Uma função contínua, crescente e sobrejetora $\phi : K \to L$ possui a c_0EP se, e somente se, a seguinte condição vale: Dado A um subconjunto G_δ e separável de L, se todo ponto de A é um ponto de acumulação bilateral de A, relativamente a L, então $A \cap Q(\phi) = A \cap Q_0(\phi)$ é enumerável.*

Devido à complexidade da prova do Teorema 3.1.7, optamos por apresentá-la no final dessa seção, depois de estarmos em posse de todos os lemas necessários. Note que a idéia central na prova do Teorema 3.1.7 é a relação entre as sequências fraca*-nulas no dual do espaço de funções contínuas de uma reta compacta e os subconjuntos borelianos da mesma. Mais precisamente, veremos no Lema 3.1.11 que se H é uma reta compacta separável e A é um subconjunto G_δ de H, que satisfaz algumas condições, então existe uma sequência fraca*-nula $(F_n)_{n\geq 1}$ em $\mathrm{NBV}(H)$ tal que A coincide com a união do conjunto dos pontos t de H em que $F_n(t) \not\to 0$ com um conjunto enumerável. Esse resultado é uma consequência do fato que existe uma sobrejeção contínua, crescente e com boas propriedades $\psi : H \to [0, 1]$ e do Lema 3.1.9 que estabelece o resultado no caso em que H é o intervalo $[0, 1]$.

Lema 3.1.8. *Sejam U um aberto relativo a $[0, 1[$ e um número real $\varepsilon > 0$ fixado. Existe uma sequência $\big([a_k, b_k[\big)_{k\geq 1}$ de intervalos dois a dois disjuntos com $0 \leq a_k \leq b_k \leq 1$, para todo $k \geq 1$ e tal que:*

(a) *$U = \bigcup_{k=1}^{+\infty} [a_k, b_k[$;*
(b) *$b_k - a_k < \varepsilon$, para todo $k \geq 1$;*

(c) $b_k - a_k \longrightarrow 0$.

Demonstração. Primeiro, vamos reduzir o caso geral ao caso em que U é conexo. Se U tem apenas uma quantidade finita de componentes conexas, então aplique o resultado para cada componente conexa. Se U tem uma quantidade infinita de componentes conexas, então essa quantidade é enumerável, já que $[0,1[$ é separável e as componentes conexas de U são abertos disjuntos de $[0,1[$ [1]. Nesse caso, escreva as componentes conexas de U como $\{U_n : n \geq 1\}$ e aplique o resultado para cada aberto conexo U_n de $[0,1[$ e o número real positivo ε/n. Agora, vamos mostrar o resultado no caso em que U é conexo. Note que o fato de U ser conexo implica que U é um intervalo de $[0,1[$. Se $U =]a,b[$, então escreva $U = \bigcup_{k=1}^{+\infty} [u_{k+1}, u_k[$, onde $(u_k)_{k\geq 1}$ é uma sequência estritamente decrescente de pontos de $[0,1]$ que converge para a com $u_1 = b$ e $u_k - u_{k+1} < \varepsilon$, para todo $k \geq 1$. Finalmente, se $U = [0,b[$, então escreva:

$$U = \bigcup_{k=1}^{n} [u_{k-1}, u_k[\,,$$

onde $\{0 = u_0 < u_1 < \ldots < u_n = b\} \subset [0,1]$ e $u_k - u_{k-1} < \varepsilon$, para $k = 1, \ldots, n$. Para $k > n$, tome $u_k = b$ e note que a sequência de intervalos $\big([u_{k-1}, u_k[\big)_{k\geq 1}$ satisfaz a tese do presente lema. □

Lema 3.1.9. *Seja B um subconjunto G_δ de $[0,1[$. Existe uma sequência fraca*-nula $(G_n)_{n\geq 1}$ em* NBV$\big([0,1]\big)$ *tal que* $B = \{u \in [0,1] : G_n(u) \not\longrightarrow 0\}$.

Demonstração. Escreva $B = \bigcap_{j=1}^{+\infty} U_j$, onde $(U_j)_{j\geq 1}$ é uma sequência decrescente de conjuntos abertos relativamente a $[0,1[$. Para cada $j \geq 1$, aplique o Lema 3.1.8 com $U = U_j$ e $\varepsilon = 1/j$, obtendo uma sequência de intervalos dois a dois disjuntos $([a_{jk}, b_{jk}[)_{k\geq 1}$. Note que o elemento de NBV$\big([0,1]\big)$ que corresponde à medida $\delta_{a_{jk}} - \delta_{b_{jk}}$ de $M\big([0,1]\big)$, através da isometria dada no enunciado do Teorema 2.4.20, é a função característica do intervalo $[a_{jk}, b_{jk}[$. Denote por $F_{jk} \in$ NBV$\big([0,1]\big)$ a função característica do intervalo $[a_{jk}, b_{jk}[$ e para cada $n \geq 1$, defina a função $G_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ como $G_n = F_{j(n)k(n)}$, onde $n \mapsto \big(j(n), k(n)\big)$ é uma enumeração arbitrária de todos os pares de inteiros positivos. Note que a sequência $(G_n)_{n\geq 1}$ é fraca*-nula, já que os elementos de $C\big([0,1]\big)$ são funções uniformemente contínuas e $b_{j(n)k(n)} - a_{j(n)k(n)} \xrightarrow{\mathrm{n}} 0$. Além disso, é fácil ver que:

$$B = \{u \in [0,1] : G_n(u) \not\longrightarrow 0\}.$$

□

[1] Note que se $\mathcal{X}$ é um espaço topológico, então as *componentes conexas de* $\mathcal{X}$ são as classes de equivalência da relação obtida declarando-se que $x \sim y$ se, e somente se, existe um subconjunto conexo de $\mathcal{X}$ que contém x e y. Logo, nesse caso particular, as componentes conexas de U são abertas relativamente a U, já que U é localmente conexo.

Recorde que dados conjuntos X e Y, uma função $\psi : X \to Y$ e um subconjunto C de X, dizemos que C é *ψ-saturado* se, e somente se, fixado um conjunto de nível B da ψ, vale que C é disjunto de B ou C contém B. Além disso, sabemos que se X e Y forem espaços topológicos e a função ψ for contínua, então a imagem direta de um boreliano de X por ψ não é necessariamente um boreliano de Y. No entanto, no próximo lema, mostraremos que, sob certas hipóteses sobre ψ, imagens diretas de subconjuntos G_δ e ψ-saturados de X pela função ψ são subconjuntos G_δ de Y.

LEMA 3.1.10. *Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ espaços topológicos e $\psi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ uma sobrejeção contínua e fechada. Se C é um subconjunto G_δ e ψ-saturado de $\mathcal{X}$, então $\psi[C]$ é um subconjunto G_δ de $\mathcal{Y}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Como C é um subconjunto G_δ de $\mathcal{X}$, temos que $\mathcal{X}\setminus C$ é um subconjunto F_σ de $\mathcal{X}$. Logo, do fato de ψ ser fechada, vem que $\psi[\mathcal{X}\setminus C]$ é um F_σ. Para concluir a prova, note que $\mathcal{Y} \setminus \psi[C] = \psi[\mathcal{X} \setminus C]$, pois ψ é sobrejetora e C é ψ-saturado. $\square$

LEMA 3.1.11. *Sejam H uma reta compacta separável e A um subconjunto G_δ de H formado apenas por pontos internos de H. Então, existe uma sequência fraca*-nula $(F_n)_{n\geq 1}$ em $\mathrm{NBV}(H)$ tal que A é a união do conjunto $\{t \in H : F_n(t) \not\to 0\}$ com um conjunto enumerável.*

DEMONSTRAÇÃO. Se H é enumerável, então tome $F_n = 0$, para todo n. Caso contrário, a Proposição 2.1.45 garante que existe um função contínua, crescente e sobrejetora $\psi : H \to [0, 1]$ tal que $\psi^{-1}(u)$ é enumerável, para todo $u \in [0, 1]$. Se definirmos o conjunto E como:

$$E = \{u \in [0, 1] : |\psi^{-1}(u)| > 2\},$$

então o fato de A ser formado apenas por pontos internos de H e o Corolário 2.1.46 implicam que:

$$A \subset \psi^{-1}\big[\,]0, 1[\, \setminus Q(\psi)\big] \cup \psi^{-1}[E]. \tag{3.1.8}$$

Da inclusão (3.1.8) segue que o conjunto $A\setminus\psi^{-1}[E]$ é ψ-saturado e portanto, temos que $A \setminus \psi^{-1}[E] = \psi^{-1}[B]$, onde B é o subconjunto de $]0, 1[\, \setminus Q(\psi)$ definido como $B = \psi\big[A \setminus \psi^{-1}[E]\big]$. Afirmamos que B é um subconjunto G_δ de $[0, 1[$. De fato, o Corolário 2.1.46 garante que o conjunto E é enumerável, o que implica que $\psi^{-1}[E]$ é enumerável, já que os conjuntos de nível da ψ são enumeráveis. Logo, como A é um subconjunto G_δ de H e $\psi^{-1}[E]$ é enumerável, temos que $A \setminus \psi^{-1}[E]$ é um subconjunto G_δ de H. Portanto, a conclusão segue se aplicarmos o Lema 3.1.10 para a função contínua, sobrejetora e fechada ψ e o conjunto ψ-saturado $A \setminus \psi^{-1}[E]$. Seja $(G_n)_{n\geq 1}$ a sequência dada pelo Lema 3.1.9 e defina $F_n = G_n \circ \psi$, para todo $n \geq 1$. De acordo com o Lema 3.1.3, temos que F_n pertence a $\mathrm{NBV}(H)$ e $\|F_n\|_{\mathrm{BV}} = \|G_n\|_{\mathrm{BV}}$, para todo n. Portanto, vale que a sequência $(F_n)_{n\geq 1}$ é limitada em $\mathrm{NBV}(H)$. É fácil ver que:

$$\psi^{-1}[B] = \{t \in H : F_n(t) \not\to 0\}.$$

Dessa forma, para concluir a prova, resta mostrar que a sequência $(F_n)_{n\geq 1}$ é fraca*-nula. Para isso, podemos usar o Corolário 2.4.28, já essa sequência é limitada. Para cada $n \geq 1$, denote por $\mu_n \in M(H)$ e $\nu_n \in M\big([0,1]\big)$ as medidas que correspondem a F_n e G_n, respectivamente, através da isometria dada no enunciado do Teorema 2.4.20. Dado $u \in [0,1]$, escreva $\psi^{-1}(u) = [a_u, b_u]$ e note que $G_n(u) = F_n(b_u)$, para todo $u \in [0,1]$. De acordo com a Observação 2.4.30, isso implica que $\psi_*\mu_n = \nu_n$ e portanto, a sequência $\big(\psi_*(\mu_n)\big)_{n\geq 1}$ é fraca*-nula em $M\big([0,1]\big)$. Finalmente, fixado $u \in [0,1]$, denote por $R_u : H \to [a_u, b_u]$ a retração canônica de H em $[a_u, b_u]$. Aplicando-se a equação (2.4.39) da Observação 2.4.30 para a função contínua, crescente e sobrejetora $R_u : H \to [a_u, b_u]$ e a medida μ_n, obtemos que:

$$(R_u)_*\mu_n = G_n(u)\delta_{a_u} + \big(G_n(1) - G_n(u)\big)\delta_{b_u}. \tag{3.1.9}$$

Note que do fato de B ser disjunto de $Q(\psi)$, segue que se u pertence a $Q(\psi)$, então a equação (3.1.9) implica que a sequência $\big((R_u)_*\mu_n\big)_{n\geq 1}$ converge em norma para 0. De fato, se u não pertence a B, então $G_n(u) \longrightarrow 0$ e além disso, $G_n(1) \longrightarrow 0$, pois a sequência $(G_n)_{n\geq 1}$ é fraca*-nula e 1 é um ponto isolado à direita de $[0,1]$. □

Agora, veremos no Lema 3.1.12, como associar um boreliano a uma sequência de elementos no dual do espaço de funções contínua de uma reta compacta. Para isso, recorde que dado um espaço topológico $\mathcal{X}$, dizemos que um subconjunto C de $\mathcal{X}$ é um *subconjunto $G_{\delta\sigma}$ de $\mathcal{X}$* se, e somente se, C se escreve como uma união enumerável de subconjuntos G_δ de $\mathcal{X}$.

LEMA 3.1.12. *Sejam $\mathcal{X}$ um espaço topológico e $(F_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de funções $F_n : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ que possuem no máximo uma quantidade enumerável de pontos de descontinuidade. Então, o conjunto $\{p \in \mathcal{X} : F_n(p) \not\to 0\}$ é a união de um subconjunto $G_{\delta\sigma}$ de $\mathcal{X}$ com um conjunto enumerável.*

DEMONSTRAÇÃO. Inicialmente, fixe $n, m \geq 1$, denote por D_{nm} o conjunto $\{p \in \mathcal{X} : |F_n(p)| > 1/m\}$ e note que se p pertence a D_{nm} e não pertence ao interior de D_{nm}, então a função F_n é descontínua em p. Portanto, nossa hipótese implica que D_{nm} se escreve como a união de um subconjunto aberto de $\mathcal{X}$ com um conjunto enumerável. Dessa forma, fixados $m, k \geq 1$, podemos escrever:

$$\bigcup_{n\geq k}^{+\infty} D_{nm} = A_{mk} \cup E_{mk}, \tag{3.1.10}$$

onde A_{mk} é um subconjunto aberto de $\mathcal{X}$ e E_{mk} é enumerável. Além disso, é fácil ver que:

$$\{p \in \mathcal{X} : F_n(p) \not\to 0\} = \bigcup_{m=1}^{+\infty} \bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} D_{nm}. \tag{3.1.11}$$

Finalmente, a conclusão segue das equações (3.1.10) e (3.1.11) e da observação que fixado $m \geq 1$, o conjunto $\bigcap_{k=1}^{+\infty}(A_{mk} \cup E_{mk})$ é a união de um subconjunto G_δ de $\mathcal{X}$ com um conjunto enumerável, já que:

$$\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_{mk} \subset \bigcap_{k=1}^{+\infty}(A_{mk} \cup E_{mk}) \subset \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_{mk} \cup \bigcup_{k=1}^{+\infty} E_{mk}.$$

□

Os próximos dois resultados resolvem problemas técnicos que enfrentaremos para demonstrar o Teorema 3.1.7.

LEMA 3.1.13. *Sejam $(\mu_n)_{n\geq 1}$ uma sequência fraca*-nula em $M(L)$ e H um subconjunto fechado de L que contém $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \operatorname{supp} \mu_n$. Se F_n corresponde a μ_n, através da isometria dada no enunciado do Teorema 2.4.20, então $F_n(t) \longrightarrow 0$, para todo $t \in L \setminus H$.*

DEMONSTRAÇÃO. Fixe $t \in L \setminus H$ e note que se $[0, t] \cap H = \emptyset$, então o fato que $\operatorname{supp} \mu_n$ está contido em H e o Corolário 2.3.13 implicam que $\mu_n\big([0, t]\big) = 0$ e portanto, temos que $F_n(t) = 0$, para todo $n \geq 1$. Caso contrário, seja s o máximo de $[0, t] \cap H$. Então:

$$F_n(t) = \mu_n\big([0, s] \cap H\big), \ \forall n \geq 1. \tag{3.1.12}$$

Fixado $n \geq 1$, denote por $\mu_n|_H$ a restrição da medida μ_n à σ-álgebra dos borelianos de H. De acordo com a Proposição 2.3.24, temos que $\mu_n|_H$ pertence a $M(H)$. Além disso, como H contém $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \operatorname{supp} \mu_n$, a Proposição 2.3.25 garante que a sequência $(\mu_n|_H)_{n\geq 1}$ é fraca*-nula em $M(H)$. Portanto, como vale a equação (3.1.12), nossa conclusão segue se mostrarmos que s é um ponto isolado à direita de H, relativamente a H. Para ver que s é um ponto isolado à direita de H, relativamente a H, note que t testemunha que s é um ponto isolado à direita de H, relativamente a L. Logo, a Proposição 2.1.12 garante que s é isolado à direita em H, relativamente a H, já que L é completo e H é um subconjunto fechado de L. □

LEMA 3.1.14. *Sejam H uma reta compacta separável e C um subconjunto de H. Se C é formado somente por pontos internos de H, então existe um subconjunto A de C tal que $C \setminus A$ é enumerável e todo ponto de A é um ponto de acumulação bilateral de A, relativamente a H.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja A o conjunto dos pontos de condensação bilateral de C, relativamente a H. Note que a conclusão segue se mostrarmos que $C \setminus A$ é enumerável. Escreva $C \setminus A = S_+ \cup S_-$, onde S_+ (resp., S_-) denota o conjunto dos pontos de C que não são pontos de condensação à direita (resp., à esquerda) de C, relativamente a H. Portanto, para concluir nosso resultado, basta mostrarmos que S_+ e S_- são enumeráveis. Vejamos que S_+ é enumerável. A prova de que S_- é enumerável é feita de forma análoga. Para cada $t \in S_+$, seja t' um elemento de H tal que $t' > t$ e $C \cap \,]t, t'[$ é enumerável. Além disso, do fato de C ser formado apenas por pontos internos de H segue que o intervalo $]t, t'[$ é não vazio. Definindo o conjunto

$W = \bigcup_{t\in S_+}]t, t'[$, é fácil ver que os intervalos abertos $]t, t'[$, com $t \in S_+ \setminus W$, são dois a dois disjuntos. Dessa forma, a separabilidade de H implica que $S_+ \setminus W$ é enumerável. Finalmente, afirmamos que $C \cap W$ é enumerável e portanto, temos que $S_+ \cap W$ é enumerável. De fato, note que a seguinte coleção é uma cobertura aberta de $C \cap W$:

$$\mathfrak{U} = \{C \cap \,]t, t'[\, : t \in S_+\}.$$

Portanto, o fato que H é uma reta compacta separável e a Proposição 2.1.34 implicam que $C \cap W$ é Lindelöf e assim, temos que $\mathfrak{U}$ admite uma subcobertura enumerável. Logo, a conclusão segue do fato que se t pertence a S_+, então o conjunto $C \cap \,]t, t'[$ é enumerável. □

Finalmente, apresentamos a prova do Teorema 3.1.7.

Prova do Teorema 3.1.7. Suponha que ϕ tenha a c_0EP e seja A um subconjunto G_δ e separável de L tal que todo ponto de A é um ponto de acumulação bilateral de A, relativamente a L. Inicialmente, note que como todo ponto de A é um ponto de acumulação bilateral de A, relativamente a L, temos que todo ponto de A é um ponto interno de L, o que implica que $A \cap Q(\phi) = A \cap Q_0(\phi)$. Assim, para estabelecermos nosso resultado, basta mostrarmos que o conjunto $A \cap Q(\phi)$ é enumerável. Denote o fecho de A por H e note que, se H estiver munido da restrição da ordem de L, então H é uma reta compacta separável e A é um subconjunto G_δ de H formado apenas por pontos internos de H. Seja $(F_n)_{n\geq 1}$ a sequência fraca*-nula em $\mathrm{NBV}(H)$ dada pelo Lema 3.1.11. Ou seja, vale que:

$$A = \{t \in H : F_n(t) \not\to 0\} \cup E, \tag{3.1.13}$$

onde E é um conjunto enumerável. Para cada $n \geq 1$, denote por μ_n a medida em $M(H)$ que corresponde a F_n, através da isometria dada no Teorema 2.4.20, e por $\bar{\mu}_n$ a extensão de μ_n a L que é identicamente nula fora de H. De acordo com a Proposição 2.3.27, temos que cada $\bar{\mu}_n$ pertence a $M(L)$ e o Corolário 2.3.28 garante que a sequência $(\bar{\mu}_n)_{n\geq 1}$ é fraca*-nula em $M(L)$. Portanto, se $\overline{F}_n$ denota o elemento de $\mathrm{NBV}(L)$ que corresponde a $\bar{\mu}_n$, através da isometria dada no enunciado do Teorema 2.4.20, então a sequência $(\overline{F}_n)_{n\geq 1}$ é fraca*-nula em $\mathrm{NBV}(L)$. Como ϕ tem a c_0EP, a Proposição 3.1.4 nos diz que o conjunto $\{t \in Q(\phi) : \overline{F}_n(t) \not\to 0\}$ é enumerável. Finalmente, note que a função $\overline{F}_n$ é uma extensão de F_n, para todo $n \geq 1$ e portanto, temos que o conjunto $\{t \in Q(\phi) \cap H : F_n(t) \not\to 0\}$ é enumerável. Assim, concluímos nossa prova, já que a equação (3.1.13) implica que:

$$A \cap Q(\phi) = \{t \in H \cap Q(\phi) : F_n(t) \not\to 0\} \cup \big(E \cap Q(\phi)\big).$$

Reciprocamente, seja $T : C(L) \to c_0$ um operador limitado associado a uma sequência fraca*-nula $(\mu_n)_{n\geq 1}$ em $M(L)$. Para cada $n \geq 1$, denote por F_n o elemento de $\mathrm{NBV}(L)$ que corresponde a μ_n, através da isometria dada no enunciado do Teorema 2.4.20 e note que de acordo com a Proposição 3.1.4, para concluirmos a prova do teorema, basta mostrarmos que o conjunto

$\{t \in Q(\phi) : F_n(t) \not\to 0\}$ é enumerável. Como cada F_n tem variação limitada, a Proposição 2.4.12 garante que F_n tem no máximo uma quantidade enumerável de pontos de descontinuidade e portanto, o Lema 3.1.12 implica que podemos escrever $\{t \in L : F_n(t) \not\to 0\}$ como a união de $\bigcup_{m=1}^{+\infty} C_m$ com um conjunto enumerável, onde cada C_m é um subconjunto G_δ de L. Dessa forma, a conclusão segue se mostrarmos que o conjunto $C_m \cap Q(\phi)$ é enumerável, para todo $m \geq 1$. Fixe $m \geq 1$ e note que se H é o fecho de $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \operatorname{supp} \mu_n$, então segue do Lema 3.1.13 que C_m está contido em H. Além disso, observe que se H estiver munida da restrição da ordem de L, então podemos assumir, sem perda de generalidade, que C_m é formado apenas por pontos internos de H. De fato, a Proposição 2.3.25 garante que a sequência $(\mu_n|_H)_{n\geq 1}$ é fraca*-nula em $M(H)$, onde $\mu_n|_H$ denota a restrição da medida μ_n á σ-álgebra dos borelianos de H. Assim, usando o Lema 3.1.2 e o fato que $F_n|_H$ é o elemento de $\mathrm{NBV}(H)$ correspondente à medida $\mu_n|_H$, através da isometria dada no enunciado do Teorema 2.4.20, obtemos que o conjunto:

$$\{t \in H : t \text{ é um ponto externo de } H \text{ e } F_n(t) \not\to 0\}$$

é enumerável. Note que isso implica que apenas uma quantidade enumerável de elementos de C_m podem ser pontos externos de H. Portanto, podemos assumir que C_m é formado apenas por pontos internos de H. Dessa forma, como a Proposição 2.4.32 garante que H é separável, aplicando o Lema 3.1.14 para o conjunto C_m, obtemos um subconjunto A_m de C_m tal que $C_m \setminus A_m$ é enumerável e todo ponto de A_m é um ponto de acumulação bilateral de A_m, relativamente a H. Logo, note que a conclusão segue se mostrarmos que o conjunto $A_m \cap Q(\phi)$ é enumerável. Segue do fato que C_m é um G_δ de L e que A_m é coenumerável em C_m que A_m é um subconjunto G_δ de L. Além disso, o Corolário 2.1.14 garante que todo ponto de A_m é um ponto de acumulação bilateral de A_m, relativamente a L. Finalmente, a separabilidade hereditária da reta compacta separável H implica que A_m é separável. Portanto, nossa hipótese garante que $A_m \cap Q(\phi)$ é enumerável. □

3.2. O caso separável

Como dito no início desse capítulo, nessa seção, vamos estudar em mais detalhes o problema da c_0EP para as subálgebras $\phi^*C(L)$ de $C(K)$, no caso em que a reta L é separável. Inicialmente, observamos que nesse caso, a caracterização apresentada no Teorema 3.1.7 pode ser simplificada. Esse é o conteúdo do próximo teorema.

TEOREMA 3.2.1. *Sejam K e L retas compactas, com L separável. Uma função contínua, crescente e sobrejetora $\phi : K \to L$ tem a c_0EP se, e somente se, vale a seguinte condição: Dado C um subconjunto G_δ de L, se todo ponto de C for um ponto interno de L, então $C \cap Q(\phi) = C \cap Q_0(\phi)$ é enumerável.*

DEMONSTRAÇÃO. Para estabelecer o resultado, note que a Proposição 2.1.38 garante que todo subespaço de L é separável. Além disso, o Lema

3.1.14 nos diz que se C é um subconjunto de L formado apenas por pontos internos de L, então existe um subconjunto A de C tal que A é coenumerável em C e todo ponto de A é um ponto de acumulação bilateral de A, relativamente a L. Portanto, a conclusão segue do Teorema 3.1.7. $\square$

Note que o Teorema 3.2.1 implica que se o conjunto $Q_0(\phi)$ é enumerável, então a função ϕ tem a c_0EP. Portanto, é natural nos perguntarmos se a recíproca dessa afirmação é verdadeira. Ou seja, vale que se a função $\phi : K \to L$ tem a c_0EP, então o conjunto $Q_0(\phi)$ é enumerável? No restante dessa seção, investigaremos essa questão. Para isso, introduzimos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 3.2.2. Sejam K e L retas compactas e $\phi : K \to L$ uma função contínua, crescente e sobrejetora. Dizemos que a função ϕ é *de tipo enumerável* se, e somente se, o conjunto $Q_0(\phi)$ é enumerável.

No próximo exemplo, veremos que existem funções que possuem a c_0EP e não são de tipo enumerável.

EXEMPLO 3.2.3. Seja X um subconjunto de $[0,1]$ tal que $[0,1] \setminus X$ é não enumerável e no entanto, $[0,1] \setminus X$ não contém nenhum subconjunto fechado não enumerável de $[0,1]$ ([**15**, Example 8.24]). Portanto, temos que $[0,1]\setminus X$ não contém nenhum subconjunto boreliano não enumerável de $[0,1]$ ([**15**, Theorem 13.6]). Considere as retas compactas separáveis $K = \mathrm{DA}$ e $L = \mathrm{DA}(X)$ e seja $\phi : K \to L$ a sobrejeção contínua e crescente associada à inclusão $X \subset [0,1]$. Note que $Q_0(\phi) = \big(]0,1[\setminus X\big) \times \{0\}$ e portanto, a função ϕ não é de tipo enumerável. Agora, vamos mostrar que ϕ tem a c_0EP. Para isso, vamos usar o Teorema 3.2.1, já que a reta compacta L é separável. Na verdade, veremos que todo subconjnto G_δ de L formado apenas por pontos internos de L é enumerável. Seja C um subconjunto G_δ de L formado apenas por pontos internos de L, ou seja:

$$C \subset \big(]0,1[\setminus X\big) \times \{0\}. \tag{3.2.1}$$

Da inclusão (3.2.1) segue que C é um conjunto π_1-saturado e portanto, vale que $C = \pi_1^{-1}[B]$, onde o conjunto $B \subset\,]0,1[\setminus X$ é definido como $B = \pi_1[C]$. Além disso, o Lema 3.1.10 aplicado à função contínua, sobrejetora e fechada π_1 e ao conjunto G_δ e π_1-saturado C de L nos dá que B é um subconjunto G_δ de $[0,1]$. Assim, da definição de X segue que o conjunto B é enumerável e portanto, temos que C é enumerável.

Note que, de acordo com o exemplo acima, não vale que toda função contínua, crescente e sobrejetora entre as retas compactas K e L que possui a c_0EP é de tipo enumerável, mesmo no caso em que L é separável. No entanto, o conjunto usado no Exemplo 3.2.3 para a construção de L é bastante "estranho". De fato, ele não pode ser boreliano e, assumindo a existência de certos grandes cardinais, ele não pode pertencer à hierarquia projetiva ([**15**, Theorem 38.17] e [**22**]). Dessa forma, é natural nos perguntarmos se sob certas hipóteses de regularidade sobre a reta compacta L, vale que toda função contínua, crescente e sobrejetora $\phi : K \to L$ com a c_0EP é de tipo enumerável. Note que dado um subconjunto X de $[0,1]$, o conjunto dos pontos internos da reta compacta $\mathrm{DA}(X)$ coincide com $\big(\,]0,1[\setminus X\big)\times\{0\}$. Portanto, a estranheza do conjunto X usado no Exemplo 3.2.3 se reflete na estrututa do conjunto dos pontos internos de $\mathrm{DA}(X)$. Mais precisamente, na Proposição 3.2.4, veremos que o conjunto dos pontos internos de $\mathrm{DA}(X)$ é um boreliano se, e somente se, X é um subconjunto boreliano de $[0,1]$. Observe que a peça fundamental da demonstração da Proposição 3.2.4 é o fato que a imagem inversa de um boreliano de L por uma função crescente definida numa reta compacta e tomando valores em L é um boreliano, se L for separável. Esse é o conteúdo do Lema 3.2.6, cuja prova é apresentada depois da Proposição 3.2.4.

Proposição 3.2.4. *Seja X um subconjunto de $[0,1]$. O conjunto dos pontos internos de $\mathrm{DA}(X)$ é um subconjunto boreliano de $\mathrm{DA}(X)$ se, e somente se, X é um boreliano de $[0,1]$.*

Demonstração. Suponha que X seja um subconjunto boreliano de $[0,1]$ e note que o conjunto dos pontos internos de $\mathrm{DA}(X)$ coincide com $\big(\,]0,1[\setminus X\big)\times\{0\}$. Além disso, se $\pi_1:\mathrm{DA}(X)\to[0,1]$ denota a primeira projeção, então temos que:

$$\big(\,]0,1[\setminus X\big)\times\{0\}=\pi_1^{-1}\big[\,]0,1[\setminus X\big]. \tag{3.2.2}$$

Portanto, segue da equação (3.2.2) e do fato que a imagem inversa de um boreliano por uma função contínua é um boreliano que o conjunto dos pontos internos de $\mathrm{DA}(X)$ é um boreliano. Reciprocamente, suponha que o conjunto dos pontos internos de $\mathrm{DA}(X)$ seja um boreliano e note que $]0,1[\setminus X$ é a imagem inversa do conjunto dos pontos internos de $\mathrm{DA}(X)$ pela função crescente $\lambda:[0,1]\to\mathrm{DA}(X)$ definida como $\lambda(u)=(u,0)$, para todo $u\in[0,1]$. Logo, como $\mathrm{DA}(X)$ é separável, o Lema 3.2.6 garante que a função λ é mensurável, se $[0,1]$ e $\mathrm{DA}(X)$ estiverem munidos de suas σ-álgebras de Borel. Portanto, temos que $]0,1[\setminus X$ é um subconjunto boreliano de $[0,1]$. $\square$

Agora, vamos demonstrar o Lema 3.2.6. Na verdade, esse resultado será uma consequência do Lema 3.2.5 que garante que toda função crescente $\lambda:K\to L$ é mensurável, se K estiver munida de sua σ-álgebra de Borel e L de sua σ-álgebra de Baire. Recorde que dado um espaço topológico $\mathcal{X}$, a *σ-álgebra de Baire* de $\mathcal{X}$ é a σ-álgebra de subconjuntos de $\mathcal{X}$ induzida pelas funções contínuas definidas em $\mathcal{X}$ e tomando valores em $\mathbb{R}$. Em outras palavras, a σ-álgebra de Baire de $\mathcal{X}$ é a menor σ-álgebra de subconjuntos de $\mathcal{X}$ que faz com que toda função contínua definida em $\mathcal{X}$ e tomando valores em $\mathbb{R}$ seja mensurável. Se $\mathcal{A}$ denota a σ-álgebra de Baire de $\mathcal{X}$, então afirmamos que $\mathcal{A}$ coincide com a σ-álgebra gerada pelo conjunto:

$$\{f^{-1}(0)\text{ tal que }f:\mathcal{X}\to\mathbb{R}\text{ é uma função contínua}\}. \tag{3.2.3}$$

De fato, é claro que a σ-álgebra gerada por (3.2.3) está contida em $\mathcal{A}$. Por outro lado, note que se $f:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$ é uma função contínua e c é um número real, então a função $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = \min\big(0, f(x) - c\big)$, para todo $x \in \mathcal{X}$, também é contínua. Além disso, é fácil ver que:

$$\{x \in \mathcal{X} : f(x) \geq c\} = g^{-1}(0). \tag{3.2.4}$$

Como a igualdade (3.2.4) vale para todo número real c fixado, temos que a função f é mensurável com respeito à σ-álgebra gerada pelo conjunto (3.2.3). Portanto, a conclusão segue da minimalidade da σ-álgebra de Baire. Finalmente, note que segue facilmente do discutido acima que a σ-álgebra de Baire $\mathcal{A}$ possui a seguinte propriedade: Dados um espaço mensurável $(Y, \mathcal{C})$ e uma função $\lambda : (Y, \mathcal{C}) \to (X, \mathcal{A})$, vale que λ é mensurável se, e somente se, a função $f \circ \lambda : (Y, \mathcal{C}) \to \mathbb{R}$ é mensurável, para toda função contínua $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$.

LEMA 3.2.5. *Sejam K e L retas compactas e $\lambda : K \to L$ uma função. Se K está munida de sua σ-álgebra de Borel, L de sua σ-álgebra de Baire e λ é crescente, então λ é uma função mensurável.*

DEMONSTRAÇÃO. Como discutido acima, a conclusão segue se mostrarmos que para toda função contínua $f : L \to \mathbb{R}$, vale que $f \circ \lambda : K \to \mathbb{R}$ é Borel-mensurável. Note que a Proposição 2.2.12 garante que o conjunto das funções contínuas e crescentes é linearmente denso em $C(L)$. Portanto, como o limite pontual de funções mensuráveis é mensurável, basta mostrarmos que se $f : L \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e crescente, então a função $f \circ \lambda : K \to \mathbb{R}$ é Borel-mensurável. Finalmente, fixe uma função crescente $f : L \to \mathbb{R}$ e observe que para todo $c \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{s \in K : (f \circ \lambda)(s) \leq c\}$ é um intervalo de K e portanto, um boreliano. Isso estabelece nosso resultado. $\square$

Note que se um espaço topológico $\mathcal{X}$ é perfeitamente normal, então suas σ-álgebras de Baire e de Borel coincidem. De fato, é claro que a σ-álgebra de Baire está sempre contida na σ-álgebra de Borel de um espaço topológico. Para ver a outra inclusão, recorde que todo subconjunto fechado de um espaço perfeitamente normal $\mathcal{X}$ é da forma $f^{-1}(0)$, para alguma função contínua $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$. Portanto, como a Proposição 2.1.36 garante que toda reta compacta separável é perfeitamente normal, temos que as σ-álgebras de Baire e de Borel de uma reta compacta separável coincidem. Dessa forma, o seguinte lema é uma consequência do Lema 3.2.5.

LEMA 3.2.6. *Sejam K e L retas compactas e $\lambda : K \to L$ uma função crescente. Se K e L estiverem munidas de suas σ-álgebras de Borel e a reta compacta L for separável, então a função λ é mensurável.* $\square$

Tendo em vista o discutido acima, decidimos considerar a seguinte noção de regularidade para as retas compactas separáveis.

DEFINIÇÃO 3.2.7. Uma reta compacta separável L é dita Borel regular se, e somente se, o conjunto de seus pontos internos é um boreliano de L.

Dessa forma, gostaríamos de investigar se uma função contínua, crescente e sobrejetora $\phi : K \to L$ com a c_0EP, é necessariamente de tipo enumerável, no caso em que reta a compacta L é separável e Borel-regular. Surpreendentemente, como veremos a seguir, a resposta para essa questão é independente dos axiomas de ZFC. Mais precisamente, mostraremos na Proposição 3.2.8, que assumindo a Hipótese do contínuo (CH), existem retas compactas separáveis K e L, com L Borel-regular e uma função $\phi : K \to L$ contínua, crescente e sobrejetora que possui a c_0EP, mas não é de tipo enumerável. Finalmente, na Proposição 3.2.10, veremos que sob o Axioma de Martin e a negação da Hipótese do contínuo (MA+$\neg$ CH), toda função contínua, crescente e sobrejetora $\phi : K \to L$ com a c_0EP é de tipo enumerável, no caso em que L é Borel-regular. Observamos que no Apêndice C, apresentamos uma pequena discussão sobre o Axioma de Martin.

Note que precisamos da Hipótese do contínuo na prova da Proposição 3.2.8 para concluir que a cardinalidade da coleção dos subconjuntos G_δ de $[0,1]$ que estão contidos num subconjunto não enumerável de $[0,1]$ é ω_1. De fato, seja Y um subconjunto não enumerável de $[0,1]$ e observe que como todo ponto de $[0,1]$ é um G_δ, temos que a coleção dos subconjuntos G_δ de $[0,1]$ contidos em Y tem cardinalidade maior ou igual a ω_1. Por outro lado, do fato de $[0,1]$ possuir uma base enumerável de abertos segue que a coleção dos subconjuntos G_δ de $[0,1]$ tem cardinalidade menor ou igual a 2^ω. Portanto, assumindo a Hipótese do contínuo, concluímos que a cardinalidade da coleção dos subconjuntos G_δ de $[0,1]$ contidos em Y é ω_1.

Proposição 3.2.8. *Assuma CH. Existem retas compactas separáveis K e L, com L Borel-regular, e uma função contínua, crescente e sobrejetora $\phi : K \to L$ que tem a c_0EP, mas não é de tipo enumerável.*

Demonstração. Seja X um subconjunto boreliano de $[0,1]$ que não é um conjunto $F_{\sigma\delta}$, ou seja, o complementar de X não é um subconjunto $G_{\delta\sigma}$ de $[0,1]$ ([**15**, Theorem 22.4]). Note que o conjunto $]0,1[\setminus X$ é não enumerável. De fato, se esse conjunto fosse enumerável, então ele seria um $G_{\delta\sigma}$ de $[0,1]$, já que todo ponto de $[0,1]$ é um G_δ. No entanto, isso não pode acontecer, já que estamos supondo que o conjunto X não é um $F_{\sigma\delta}$. Logo, do discutido acima vem que, se assumirmos a Hipótese do contínuo, então a cardinalidade da coleção de subconjuntos G_δ de $[0,1]$ que estão contidos em $]0,1[\setminus X$ é ω_1 e portanto, podemos enumerar essa coleção como:

$$\{B_\alpha : \alpha < \omega_1\}.$$

Além disso, do fato de $]0,1[\setminus X$ não ser um subconjunto $G_{\delta\sigma}$ de $[0,1]$ segue que dado $\alpha < \omega_1$, o conjunto dos pontos de $]0,1[\setminus X$ que não pertencem a $\bigcup_{\beta<\alpha}(B_\beta \cup \{u_\beta\})$ é não vazio. Dessa forma, podemos definir, por recursão, uma família $(u_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ de elementos distintos de $]0,1[\setminus X$ tal que, para todo $\alpha < \omega_1$, o ponto u_α não pertence ao conjunto $\bigcup_{\beta<\alpha}(B_\beta \cup \{u_\beta\})$. Defina $S = \{u_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, as retas compactas separáveis $K = \mathrm{DA}(X \cup S)$ e $L = \mathrm{DA}(X)$ e considere $\phi : K \to L$ a função contínua, crescente e sobrejetora associada à inclusão $X \subset X \cup S$. De acordo com a Proposição 3.2.4, temos que a reta compacta separável L é Borel-regular. Além disso, vale que

$Q_0(\phi) = S \times \{0\}$, e portanto ϕ não é de tipo enumerável. Finalmente, usando o Teorema 3.2.1, vamos mostrar que ϕ tem a c_0EP. Seja C um subconjunto G_δ de L formado apenas por pontos internos de L. Ou seja, vale que:

$$C \subset \big(\,]0,1[\setminus X\big) \times \{0\}. \tag{3.2.5}$$

Observe que se $\pi_1 : \mathrm{DA}(X) \to [0,1]$ denota a primeira projeção, então a inclusão (3.2.5) implica que C é um conjunto π_1-saturado e portanto, temos que $C = \pi_1^{-1}[B]$, onde o conjunto $B \subset\,]0,1[\setminus X$ é definido como $B = \pi_1[C]$. Portanto, aplicando o Lema 3.1.10 para a função contínua, sobrejetora e fechada π_1 e o conjunto G_δ e π_1-saturado C, obtemos que B é um subconjunto G_δ de $[0,1]$. Dessa forma, existe um ordinal enumerável α tal que $B = B_\alpha$. Finalmente, a enumerabilidade do conjunto $C \cap Q_0(\phi)$ segue do fato que $S \cap B_\alpha \subset \{u_\beta : \beta \leq \alpha\}$ e da igualdade:

$$C \cap Q_0(\phi) = (B_\alpha \cap S) \times \{0\}.$$

□

Agora, vamos apresentar a prova da Proposição 3.2.10. Note que o coração dessa proposição é o Lema 3.2.9 abaixo. Na verdade, como discutido no Apêndice C, vale que dado um cardinal infinito κ, se assumirmos MA(κ), então todo subconjunto de ω^ω com cardinalidade menor ou igual a κ está contido num subconjunto σ-compacto de ω^ω. Como veremos, para provar a Proposição 3.2.10, precisamos assumir apenas MA(ω_1).

LEMA 3.2.9. *Assuma MA(ω_1). Todo subconjunto de ω^ω com cardinalidade menor ou igual a ω_1 está contido num subconjunto σ-compacto de ω^ω.*

DEMONSTRAÇÃO. Veja a Proposição C.7. □

PROPOSIÇÃO 3.2.10. *Assuma MA(ω_1). Sejam K e L retas compactas e $\phi : K \to L$ uma função contínua, crescente e sobrejetora. Se ϕ tem a c_0EP e L é separável e Borel-regular, então ϕ é de tipo enumerável.*

DEMONSTRAÇÃO. A conclusão é trivial se L é enumerável. Assuma que L é não enumerável e suponha, por absurdo, que ϕ não seja de tipo enumerável. Nosso plano é mostrar que isso implica que existe um subconjunto G_δ de L formado apenas por pontos internos de L cuja intersecção com $Q_0(\phi)$ é não enumerável. Dessa forma, do fato de L ser separável e do Teorema 3.2.1 seguirá que ϕ não tem a c_0EP. Note que a Proposição 2.1.45 garante que existe uma sobrejeção contínua e crescente $\psi : L \to [0,1]$ tal que $\psi^{-1}(u)$ é enumerável, para todo $u \in [0,1]$. Afirmamos que o conjunto $]0,1[\setminus Q(\psi)$ é um subconjunto boreliano de $[0,1]$. De fato, é fácil ver que todo elemento do conjunto $\psi^{-1}\big[\,]0,1[\setminus Q(\psi)\big]$ é um ponto interno de L e assim, segue do Corolário 2.1.46 que o conjunto dos pontos internos de L é a união de $\psi^{-1}\big[\,]0,1[\setminus Q(\psi)\big]$ com um conjunto enumerável. Portanto, como L é Borel-regular, vale que $\psi^{-1}\big[\,]0,1[\setminus Q(\psi)\big]$ é um subconjunto boreliano de L. Finalmente, de acordo com o Lema 3.2.6, temos que $]0,1[\setminus Q(\psi)$ é um subconjunto boreliano de $[0,1]$, já que é a imagem inversa do conjunto $\psi^{-1}\big[\,]0,1[\setminus Q(\psi)\big]$ por uma inversa à direita e crescente $\lambda : [0,1] \to L$ de ψ. Além disso, note que como $Q_0(\phi)$ está contido no conjunto dos pontos internos de L, o Corolário 2.1.46 garante que:

$$Q_0(\phi) \subset \psi^{-1}\big[\,]0,1[\setminus Q(\psi)\big] \cup D, \tag{3.2.6}$$

onde D é um conjunto enumerável. Logo, o conjunto $]0,1[\setminus Q(\psi)$ não é vazio, já que se ele fosse vazio, então a equação (3.2.6) implicaria que $Q_0(\phi)$ é enumerável, o que contradiz nossa hipótese de absurdo. Dessa forma, o conjunto boreliano e não vazio $]0,1[\setminus Q(\psi)$ é a imagem de uma função contínua $\theta : \omega^\omega \to [0,1]$ ([**15**, Theorem 13.7]). Da inclusão (3.2.6) vem que o conjunto $Q_0(\phi) \setminus D$ é ψ-saturado, o que implica que $Q_0(\phi) \setminus D = \psi^{-1}[S]$, onde o conjunto $S \subset\,]0,1[\setminus Q(\psi)$ é definido como $S = \psi\big[Q_0(\phi) \setminus D\big]$. Assim, nossa hipótese de absurdo garante que S é um subconjunto não enumerável da imagem de θ e portanto, existe $M \subset \omega^\omega$ tal que $|M| = \omega_1$, $\theta|_M$ é injetora e $\theta[M] \subset S$. De acordo com o Lema 3.2.9, temos que M está contido num subconjunto σ-compacto de ω^ω e portanto, existe um subconjunto compacto $\mathcal{K}$ de ω^ω tal que $|M \cap \mathcal{K}| = \omega_1$. Então, $\theta[\mathcal{K}]$ é um subconjunto compacto de $]0,1[\setminus Q(\psi)$ e $S \cap \theta[\mathcal{K}]$ é não enumerável. Para concluir o resultado, note que se definirmos $C = \psi^{-1}\big[\theta[\mathcal{K}]\big]$, então C é um subconjunto G_δ de L formado apenas por pontos internos de L cuja intersecção com $Q_0(\phi)$ é não enumerável. Para ver que essa intersecção é não enumerável, observe que o conjunto $\psi^{-1}\big[\theta[\mathcal{K}] \cap S\big]$ é não enumerável e que:

$$\psi^{-1}\big[\theta[\mathcal{K}] \cap S\big] = \psi^{-1}\big[\theta[\mathcal{K}]\big] \cap \psi^{-1}[S] \subset C \cap Q_0(\phi).$$

□

CAPÍTULO 4

A propriedade de Sobczyk para retas compactas

Note que se um espaço de Banach X tem a c_0EP separável, então toda cópia isomorfa de c_0 em X é complementada. Dizemos que um espaço de Banach X possui a *propriedade de Sobczyk* se, e somente se, toda cópia isomorfa de c_0 em X é complementada. O principal objetivo desse capítulo é mostrar que se K é uma reta compacta, então o espaço $C(K)$ tem a propriedade de Sobczyk. É interessante observar que se K é uma reta compacta, então o espaço $C(K)$ pode não ter a c_0EP separável, no entanto, esse espaço sempre possui a propriedade de Sobczyk. Como veremos, o fato do espaço $C(K)$ ter a propriedade de Sobczyk segue do resultado que todo subespaço de $C(K)$ com dual separável tem a c_0EP em $C(K)$, se K for uma reta compacta. A Seção 4.2 é devotada à prova desse resultado. Na Seção 4.1, apresentamos uma caracterização das retas compactas cujos espaços de funções contínuas têm a c_0EP e a c_0EP separável.

4.1. Caracterização de retas compactas com a c_0EP

O objetivo dessa seção é apresentar uma caracterização das retas compactas cujos espaços de funções contínuas possuem a c_0EP e a c_0EP separável (Teorema 4.1.2). Recorde que no Corolário 1.2.5, vimos que se um compacto Hausdorff K é $\aleph_0$-monolítico, então $C(K)$ possui a c_0EP separável. No Teorema 4.1.2, vamos mostrar que as únicas retas compactas cujos espaços de funções contínuas possuem a c_0EP separável são as $\aleph_0$-monolíticas. Além disso, veremos que se K é uma reta compacta, então a c_0EP e a c_0EP separável são propriedades equivalentes para o espaço $C(K)$. Na prova do Teorema 4.1.2, usaremos o Lema 4.1.1 abaixo, que garante que se X é um subconjunto não enumerável de $[0,1]$, então o espaço $C\big(\mathrm{DA}(X)\big)$ não possui a c_0EP separável. Faremos isso mostrando que a subálgebra separável $\pi_1^*C\big([0,1]\big)$ não possui a c_0EP em $C\big(\mathrm{DA}(X)\big)$, onde $\pi_1 : \mathrm{DA}(X) \to [0,1]$ denota a primeira projeção.

LEMA 4.1.1. *Se X é um subconjunto não enumerável de $[0,1]$, então a subálgebra $\pi_1^*C\big([0,1]\big)$ não tem a c_0EP em $C\big(\mathrm{DA}(X)\big)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\big([a_n, b_n[\big)_{n\geq 1}$ uma sequência de intervalos contidos em $[0,1]$ tal que $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ e todo ponto de $[0,1[$ pertence a uma quantidade infinita de $[a_n, b_n[$. Se para cada $n \geq 1$, definirmos a medida μ_n em $M\big([0,1]\big)$ como $\mu_n = \delta_{a_n} - \delta_{b_n}$, então a continuidade uniforme dos elementos de $C\big([0,1]\big)$ vai implicar que a sequência $(\mu_n)_{n\geq 1}$ é fraca*-nula em $M\big([0,1]\big)$. Para cada $n \geq 1$, denote por $F_n \in \mathrm{NBV}\big([0,1]\big)$ a função que corresponde a μ_n, através da isometria dada no enunciado do Teorema 2.4.20. Note que F_n é a função característica do intervalo $[a_n, b_n[$, para todo n e que $Q(\pi_1) = X$. Portanto, temos que:

$$X \setminus \{1\} \subset \{u \in Q(\pi_1) : F_n(u) \not\longrightarrow 0\}.$$

Logo, o conjunto $\{u \in Q(\pi_1) : F_n(u) \not\longrightarrow 0\}$ é não enumerável. Dessa forma, a Proposição 3.1.4 implica que se $T : C\big([0,1]\big) \to c_0$ é o operador associado à sequência fraca*-nula $(F_n)_{n\geq 1}$, então o operador:

$$T \circ (\pi_1^*)^{-1} : \pi_1^* C\big([0,1]\big) \longrightarrow c_0$$

não admite extensão limitada a $C\big(\mathrm{DA}(X)\big)$. $\square$

Agora, vamos apresentar o Teorema 4.1.2. Note que a idéia central na prova de que o espaço de funções contínuas de uma reta compacta $\aleph_0$-monolítica possui a c_0EP, é o fato que as medidas de Borel finitas e regulares numa reta compacta possuem suportes separáveis. Na verdade, a prova de que a condição (a) implica a condição (b) no Teorema 4.1.2 pode ser facilmente adaptada para uma prova de que se K é um compacto Hausdorff cujo espaço de funções contínuas possui a c_0EP separável e o suporte de todo elemento de $M(K)$ é separável, então $C(K)$ tem a c_0EP.

TEOREMA 4.1.2. *Seja K uma reta compacta. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) *K é $\aleph_0$-monolítica;*
(b) *$C(K)$ tem a c_0EP;*
(c) *$C(K)$ tem a c_0EP separável.*

DEMONSTRAÇÃO. Assuma (a) e vamos provar (b). Seja $T : X \to c_0$ um operador limitado definido num subespaço fechado X de $C(K)$. Se considerarmos T com contradomínio em l_∞, então a Proposição 1.1.1 garante que T possui uma extensão de Hahn–Banach $S : C(K) \to l_\infty$. Note que a Proposição 1.1.13 implica que a conclusão segue se mostrarmos que o quociente $C(K)/S^{-1}[c_0]$ é separável. Denote por $(\mu_n)_{n\geq 1}$ a sequência limitada em $M(K)$ associada ao operador S. De acordo com a Proposição 2.4.32, temos que $\operatorname{supp}\mu_n$ é separável, para todo n. Portanto, o fecho F de $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \operatorname{supp}\mu_n$ também é separável. Logo, a condição (a) garante que F é metrizável. Por outro lado, da definição de F segue que se f é uma função em $C(K)$ que é identicamente nula em F, então $S(f) = 0$. O que implica que o subespaço $C(K|F)$ de $C(K)$ formado pelas funções que se anulam em F está contido em $S^{-1}[c_0]$. Assim, para concluir que $C(K)/S^{-1}[c_0]$ é separável, basta mostrarmos que o quociente $C(K)/C(K|F)$ é separável. Mas, esse último quociente é separável, já que ele é isomorfo a $C(F)$ e F é metrizável. Claramente, (b) implica (c). Agora, vamos assumir (c) e provar (a). Assumindo, por contradição, que K não é $\aleph_0$-monolítica, segue da Proposição 2.1.48 que K contém uma cópia homeomorfa da reta compacta $\mathrm{DA}(X)$, onde X é um subconjunto não enumerável de $[0,1]$. Além disso, de acordo com o Corolário 2.2.16, $C(K)$ contém uma cópia isomorfa do espaço $C(F)$, onde F é o subconjunto de K homeomorfo a $\mathrm{DA}(X)$. Portanto, vale que $C(K)$ possui uma cópia isomorfa de $C\big(\mathrm{DA}(X)\big)$. Finalmente, do fato da propriedade da c_0-extensão separável ser hereditária para subespaços fechados segue que se $C(K)$ tivesse a c_0EP separável, então $C\big(\mathrm{DA}(X)\big)$ também teria essa propriedade. Mas, isso contradiz o Lema 4.1.1 e estabelece nosso resultado. □

Observação 4.1.3. Na Observação 1.1.17, vimos que espaços de Banach que são subespaços de espaços WCG possuem a c_0EP. No entanto, a recíproca não vale. Na verdade, o Teorema 4.1.2 implica que não vale nem mesmo que um espaço de Banach com a c_0EP é necessariamente isomorfo a um subespaço de um espaço WCG. De fato, note que de acordo com a Proposição B.4, se um espaço de Banach da forma $C(K)$ é isomorfo a um subespaço de um WCG, então ele próprio é WCG. Além disso, sabemos que dado um compacto K, vale que o espaço $C(K)$ é WCG se, e somente se, K é um compacto de Eberlein ([**10**, Theorem 14.9]). Finalmente, a conclusão segue se aplicarmos o Teorema 4.1.2 para as retas compactas $\aleph_0$-monolíticas que não são compactos de Eberlein. Note que na Proposição B.11, exibimos uma classe de retas compactas que são $\aleph_0$-monolíticas e não são compactos de Eberlein.

4.2. A propriedade de Sobczyk

Como dito no início desse capítulo, essa seção é dedicada à prova do Teorema 4.2.4, que diz que se K é uma reta compacta, então todo subespaço fechado e com dual separável de $C(K)$ tem a c_0EP em $C(K)$. Note que isso implica que toda cópia isomorfa de c_0 em $C(K)$ é complementada. Em outras palavras, o espaço de funções contínuas de uma reta compacta possui a propriedade de Sobczyk.

Definição 4.2.1. Dado um espaço de Banach X, dizemos que X possui a *propriedade de Sobczyk* se, e somente se, toda cópia isomorfa de c_0 em X é complementada.

A prova do Teorema 4.2.4 depende dos Lemas 4.2.2 e 4.2.3. Note que o Lema 4.2.2 introduz no problema da extensão de operadores definidos num subespaço separável de $C(K)$ uma subálgebra de Banach de $C(K)$ com boas propriedades e que nos permitirá concluir o resultado usando o Lema 4.2.3.

Lema 4.2.2. *Sejam K uma reta compacta zero-dimensional e X um subespaço fechado de $C(K)$. Se X é separável, então existem uma reta compacta metrizável e zero-dimensional L e uma função contínua, crescente e sobrejetora $\phi : K \to L$ tal que X está contido em $\phi^*C(L)$.*

Demonstração. Como K é uma reta compacta zero-dimensional, o Lema 2.4.24 garante que o conjunto:

$$\{\chi_{[0,s]} : s \text{ é isolado à direita em } K\} \tag{4.2.1}$$

é linearmente denso em $C(K)$. Portanto, segue da separabilidade de X que existe um subconjunto enumerável E de (4.2.1) tal que X está contido no subespaço de Banach de $C(K)$ gerado por E. Assim, de acordo com as Proposições A.12 e A.14, a subálgebra de Banach com unidade e separável de $C(K)$ gerada por E é da forma $\phi^*C(L)$, onde L é um espaço compacto metrizável e $\phi : K \to L$ é uma função contínua e sobrejetora. Além disso, como os elementos de E são funções simples, a Proposição A.15 garante que o espaço L é zero-dimensional. Finalmente, o fato que os elementos de E são funções monótonas e a Proposição A.16 implicam que $\phi^{-1}(y)$ é um intervalo fechado de K, para todo $y \in L$. Portanto, o Corolário 2.1.42 garante que existe uma única ordem total em L cuja topologia da ordem coincide com a topologia original de L e a função $\phi : K \to L$ é crescente, se L estiver munida dessa ordem. □

O Lema 4.2.3 é um resultado sobre a decomposição de operadores. Note que ele é a parte realmente complicada da prova do Teorema 4.2.4. Dessa forma, a seguir, vamos enunciar o Lema 4.2.3 e apresentar a prova do Teorema 4.2.4 usando esse lema. Depois, nos dedicaremos à demonstração do Lema 4.2.3.

LEMA 4.2.3. *Sejam K e L retas compactas zero-dimensionais, X um espaço de Banach com dual separável e $\phi : K \to L$ uma função contínua, crescente e sobrejetora. Assuma que L seja metrizável. Dados operadores limitados $T : C(L) \to c_0$ e $R : X \to C(L)$ e números reais $\varepsilon, \varepsilon' > 0$, existem operadores limitados $T' : C(K) \to c_0$ e $S : C(L) \to c_0$ tais que:*

$$T = T' \circ \phi^* + S,$$
$$\|T'\| \leq (4 + \varepsilon')\|T\|, \quad \|S\| \leq (1 + \varepsilon')\|T\| \quad e \quad \|S \circ R\| \leq \varepsilon.$$

TEOREMA 4.2.4. *Se K é uma reta compacta, então todo subespaço de Banach de $C(K)$ com dual separável tem a c_0EP em $C(K)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Primeiro, observamos que basta provar o teorema no caso em que a reta compacta K é zero-dimensional. De fato, suponha que tenhamos estabelecido o resultado para as retas compactas zero-dimensionais e seja K uma reta compacta arbitrária. Recorde que a Proposição 2.1.29 garante que o conjunto $K \times \{0, 1\}$, munido da ordem lexicográfica, é uma reta compacta zero-dimensional. Dessa forma, a conclusão segue do fato que a primeira projeção $\pi_1 : K \times \{0, 1\} \to K$ induz uma imersão isométrica de $C(K)$ em $C\big(K \times \{0, 1\}\big)$, através do operador de composição $\pi_1^* : C(K) \to C\big(K \times \{0, 1\}\big)$. No que segue, K é uma reta compacta zero-dimensional e X é um subespaço de Banach de $C(K)$ com dual separável. Nosso objetivo é mostrar que o operador de restrição $\mathfrak{r} : \mathcal{B}\big(C(K), c_0\big) \to \mathcal{B}(X, c_0)$ é sobrejetor. Note que para isso, basta mostrarmos que existe um número real positivo s, tal que o fecho da imagem da bola unitária fechada de $\mathcal{B}\big(C(K), c_0\big)$ por $\mathfrak{r}$ contém a bola aberta de $\mathcal{B}(X, c_0)$ com centro 0 e raio s ([**9**, Lemma 2.23]). Como veremos a seguir, podemos tomar

$s = \frac{1}{8}$. Considere a reta compacta metrizável e zero-dimensional L e a função contínua, crescente e sobrejetora $\phi : K \to L$ dadas pelo Lema 4.2.2 e denote por $R : X \to C(L)$ a restrição a X da isometria $(\phi^*)^{-1} : \phi^* C(L) \to C(L)$. Fixado $T_0 \in \mathcal{B}(X, c_0)$ com $\|T_0\| < \frac{1}{8}$, vejamos que T_0 pertence ao fecho da imagem da bola unitária fechada de $\mathcal{B}\big(C(K), c_0\big)$ pelo operador $\mathfrak{r}$. Para isso, vamos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe $T' \in \mathcal{B}\big(C(K), c_0\big)$ tal que $\|T'\| \leq 1$ e $\|\mathfrak{r}(T') - T_0\| \leq \varepsilon$. Fixado $\varepsilon > 0$, note que como $C(L)$ é separável, a Proposição 1.1.13 garante que existe $T \in \mathcal{B}\big(C(L), c_0\big)$ tal que $\|T\| \leq 2\|T_0\| < \frac{1}{4}$ e $T \circ R = T_0$. Finalmente, aplique o Lema 4.2.3 com um $\varepsilon' > 0$ tal que $(4 + \varepsilon')\|T\| \leq 1$ e note que o operador $T' \in \mathcal{B}\big(C(K), c_0\big)$ obtido satisfaz $\|T'\| \leq 1$ e $\|\mathfrak{r}(T') - T_0\| = \|S \circ R\| \leq \varepsilon$. □

COROLÁRIO 4.2.5. *Se K é uma reta compacta, então o espaço $C(K)$ tem a propriedade de Sobczyk.* □

OBSERVAÇÃO 4.2.6. Note que a prova do Teorema 4.2.4 mostra que se K é uma reta compacta e X é um subespaço de Banach de $C(K)$ com dual separável, então X tem a $(8 + \varepsilon)$-c_0EP em $C(K)$, para todo $\varepsilon > 0$. De fato, nessa prova, vimos que a bola aberta de $\mathcal{B}(X, c_0)$ com centro 0 e raio $1/8$ está contida no fecho da imagem por $\mathfrak{r}$ da bola fechada de $\mathcal{B}\big(C(K), c_0\big)$ com centro 0 e raio 1. Portanto, fixado um número real positivo δ, temos que a bola aberta de $\mathcal{B}(X, c_0)$ com centro 0 e raio $1/8$ está contida no fecho da imagem por $\mathfrak{r}$ do bola aberta de $\mathcal{B}\big(C(K), c_0\big)$ com centro 0 e raio $(1 + \delta)$. Logo, segue de ([**9**, Lemma 2.23]) que se $T : X \to c_0$ é um operador limitado que satisfaz $\|T\| < 1/8$, então existe um operador $T' : C(K) \to c_0$ tal que T' estende T e $\|T'\| < (1 + \delta)$. Finalmente, dados $\varepsilon > 0$ e um operador limitado $S : X \to c_0$, escolhendo-se convenientemente o número real positivo δ, obtemos um operador $S' : C(K) \to c_0$ tal que S' estende S e $\|S'\| \leq (8 + \varepsilon)\|S\|$. Também observamos que em ([**6**, Theorem 3.1]), mostramos que sob a hipótese adicional de X ser uma subálgebra de Banach com unidade de $C(K)$, a constante 8 pode ser substituida por 2, ou seja, se X é uma subálgebra de Banach com unidade de $C(K)$ que possui dual separável, então X tem a $(2 + \varepsilon)$-c_0EP em $C(K)$, para todo $\varepsilon > 0$. No entanto, não sabemos se a constante 8 pode ser melhorada na prova do Teorema 4.2.4.

No que segue, trabalharemos para provar o Lema 4.2.3. Como discutido no Capítulo 1, os operadores limitados definidos num espaço de Banach e tomando valores em c_0 estão em bijeção com as sequências fraca*-nulas no dual desse espaço. Portanto, se esse espaço de Banach for da forma $C(K)$, então os operadores limitados definidos nele e tomando valores em c_0 podem ser identificados com sequências fraca*-nulas de medidas em $M(K)$. Assim, na verdade, o Lema 4.2.3 é um resultado sobre a decomposição de medidas de Borel. Nós obtivemos o Lema 4.2.3 como uma consequência do Lema 4.2.7 abaixo. Portanto, a seguir, enunciaremos o Lema 4.2.7 e o usaremos para concluir o Lema 4.2.3. Depois, desenvolveremos os resultados necessários para a demonstração do Lema 4.2.7.

LEMA 4.2.7. *Sejam L uma reta compacta zero-dimensional e metrizável, $(\mu_n)_{n\geq 1}$ uma sequência fraca*-nula em $M(L)$ com $\sup_{n\geq 1}\|\mu_n\| \leq 1$, X um espaço de Banach com dual separável e $R : X \to C(L)$ um operador limitado. Dados $\varepsilon, \varepsilon' > 0$, existem sequências fraca*-nulas $(\mu'_n)_{n\geq 1}$ e $(\nu_n)_{n\geq 1}$ em $M(L)$ tais que:*

(a) $\mu_n = \mu'_n + \nu_n$, *para todo* $n \geq 1$*;*
(b) $\|\nu_n\| \leq 1 + \varepsilon'$ *e* $\|\mu'_n\| \leq 2 + \varepsilon'$*, para todo* $n \geq 1$*;*
(c) $\|R^*(\nu_n)\| \leq \varepsilon$*, para todo* $n \geq 1$*;*
(d) $\mu'_n\big([0, t]\big) \longrightarrow 0$*, para todo* t *fora de um conjunto enumerável.*

Prova do Lema 4.2.3. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\|T\| = 1$. Denote por $(\mu_n)_{n\geq 1}$ a sequência fraca*-nula em $M(L)$ associada a T e note que aplicando o Lema 4.2.7, obtemos sequências fraca*-nulas $(\mu'_n)_{n\geq 1}$ e $(\nu_n)_{n\geq 1}$ satisfazendo (a)—(d). Sejam $T'_0 : C(L) \to c_0$ e $S : C(L) \to c_0$ os operadores limitados associados as sequências $(\mu'_n)_{n\geq 1}$ e $(\nu_n)_{n\geq 1}$, respectivamente. Dessa forma, o item (a) garante que $T = T'_0 + S$, o item (b) nos diz que:

$$\|T'_0\| \leq 2 + \varepsilon', \quad \|S\| \leq 1 + \varepsilon'$$

e o item (c) nos dá $\|S \circ R\| \leq \varepsilon$. Finalmente, note que o item (d) e a Proposição 3.1.4 produzem um operador limitado $T' : C(K) \to c_0$ que satisfaz $\|T'\| \leq 2\|T'_0\|$ e $T' \circ \phi^* = T'_0$. □

Agora, nosso objetivo é provar o Lema 4.2.7. Recorde que no Lema 4.1.1, vimos que o espaço de funções contínuas da reta compacta $\mathrm{DA}(X)$ não possui a c_0EP separável, no caso em que o subconjunto X de $[0, 1]$ é não enumerável. No entanto, o Teorema 4.2.4 garante que se X é um subespaço de Banach com dual separável do espaço de funções contínuas de uma reta compacta, então X possui a c_0EP nesse espaço. Portanto, podemos nos perguntar quais propriedades adicionamos aos espaços separáveis quando exigimos que seus duais sejam separáveis e que nos permitem estender operadores definidos nesses espaços e tomando valores em c_0. Como veremos a seguir, um ponto fundamental na prova do Lema 4.2.7 é que se X é um espaço de Banach com dual separável e $R : X \to C(L)$ é um operador limitado, então uma certa hierarquia decrescente de subconjuntos fechados de L definida através de uma função que representa o operador R se estabiliza no conjunto vazio. Na verdade, a hipótese que usamos sobre o espaço de Banach X é que ele seja fraca*-fragmentável.

DEFINIÇÃO 4.2.8. Dado um espaço de Banach X, dizemos que X é *fraca*-fragmentável* se para todo subconjunto não vazio e limitado B de X^* e todo $\varepsilon > 0$, existe um subconjunto U de B não vazio e fraca*-aberto, relativamente a B, tal que $\mathrm{diam}(U) < \varepsilon$.

Recorde que dizemos que um espaço de Banach X é Asplund se, e somente se, todo subespaço de Banach separável de X tem dual separável.

É um resultado bem conhecido que um espaço de Banach X é fraca*-fragmentável se, e somente se, X é Asplund ([**10**, Theorem 11.8]). No Lema 4.2.9, provaremos que se X é Asplund, então X é fraca*-fragmentável, no caso particular em que o espaço X é separável. Note que dado um espaço de Banach X, um elemento $x \in X$ e um número real $r > 0$, denotamos por $B[x;r]$ a bola fechada de X com centro x e raio r.

LEMA 4.2.9. *Seja X um espaço de Banach. Se X^* é separável, então X é fraca*-fragmentável.*

DEMONSTRAÇÃO. Inicialmente, note que basta mostrarmos o resultado para subconjuntos de X^* não vazios e compactos na topologia fraca*. De fato, suponha que tenhamos mostrado o resultado para subconjuntos não vazios e compactos na topologia fraca* e seja B um subconjunto não vazio e limitado de X^*. Defina $F = \overline{B}^{w^*}$ e note que F é compacto na topologia fraca*. Finalmente, se V é um subconjunto aberto de (F, w^*), não vazio e com $\operatorname{diam}(V) < \varepsilon$, então $U = V \cap B$ é um conjunto não vazio e aberto, relativamente a (B, w^*), com $\operatorname{diam}(U) < \varepsilon$. Seja B um subconjunto não vazio e compacto na topologia fraca* de X^*. Note que dado $\varepsilon > 0$, da separabilidade de X^* segue que existe um subconjunto enumerável D de X^* tal que $X^* = \bigcup_{u \in D} B[u;\varepsilon]$ e portanto, temos que:

$$B = \bigcup_{u \in D} \big(B[u;\varepsilon] \cap B\big). \tag{4.2.2}$$

Finalmente, como cada $B[u;\varepsilon]$ é fraca*-fechado e (B, w^*) é um espaço de Baire [1], a equação (4.2.2) implica que existe $u \in D$ tal que o interior de $B[u;\varepsilon] \cap B$, relativamente a (B, w^*), é não vazio, o que conclui a nossa prova. □

Nesse ponto, desejamos associar a um operador limitado R definido num espaço de Banach X e tomando valores num espaço de funções contínuas de um compacto uma função ψ^R definida nesse compacto e tomando valores em X^*. Mais precisamente, dados um espaço de Banach X, um espaço compacto Hausdorff L e um operador limitado $R : X \to C(L)$, definimos a função $\psi^R : L \to X^*$ como $\psi^R = R^* \circ \delta$, onde $\delta : L \to M(L)$ é a função que a cada ponto p de L associa a medida δ_p de $M(L)$. Como discutido na Seção 2.3, a função δ é contínua, se o espaço $M(L)$ estiver munido da topologia fraca*. Portanto, a função $\psi^R : L \to (X^*, w^*)$ é contínua, já que R^* é contínuo se X^* e $M(L)$ estiverem munidos de suas topologias fraca*. Além disso, é fácil ver que:

$$\|R\| = \sup_{p \in L} \|\psi^R(p)\|.$$

[1] Dizemos que um espaço topológico $\mathcal{X}$ é um *espaço de Baire* se a união de uma família enumerável de subconjuntos fechados de $\mathcal{X}$ com interior vazio tem interior vazio. Na prova do Lema 4.2.9, estamos usando o fato que um espaço compacto Hausdorff é um espaço de Baire ([**34**, Corollary 25.4]).

Como dito anteriormente, para provar o Lema 4.2.7 é fundamental o fato que uma certa hierarquia decrescente de subconjuntos fechados de L se estabilize no conjunto vazio. Abaixo, definimos essa hierarquia num contexto mais geral que o caso que realmente nos interessa.

DEFINIÇÃO 4.2.10. Dados um espaço topológico $\mathcal{X}$, um espaço métrico M, uma função $\psi : \mathcal{X} \to M$ e um número real positivo δ, definimos, por recursão em α, os subconjuntos fechados H_α de $\mathcal{X}$ declarando que:

(i) $H_0 = \mathcal{X}$;
(ii) $H_{\alpha+1} = \{x \in H_\alpha : \operatorname{diam}\big(\psi[V]\big) \geq \delta$ para toda vizinhança V de x em $H_\alpha\}$;
(iii) $H_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} H_\beta$, se α é um ordinal limite.

Se existe um ordinal α tal que $H_\alpha = \emptyset$, então dizemos que o *δ-índice de oscilação de ψ* está bem definido e é o menor ordinal α tal que $H_\alpha = \emptyset$. Caso contrário, dizemos que o δ-índice de oscilação de ψ não está definido.

No Lema 4.2.11, veremos que se X é um espaço de Banach fraca*-fragmentável e $R : X \to C(L)$ é um operador limitado, então o δ-índice de oscilação da função $\psi^R : L \to (X^*, \|.\|)$ está bem definido.

LEMA 4.2.11. *Sejam X um espaço de Banach, L um espaço compacto Hausdorff, $R : X \to C(L)$ um operador limitado e $\delta > 0$. Se X é fraca*-fragmentável, então o δ-índice de oscilação da função $\psi^R : L \to (X^*, \|.\|)$ está bem definido.*

DEMONSTRAÇÃO. Considere $(H_\alpha)_{\alpha\in Ord}$ a família decrescente de subconjuntos fechados de L construída na Definição 4.2.10 para esse δ e a função $\psi^R : L \to (X^*, \|.\|)$. É claro que a conclusão segue se mostrarmos que se α é um ordinal tal que $H_\alpha \neq \emptyset$, então o conjunto $H_{\alpha+1}$ está propriamente contido em H_α. Fixe um ordinal α e suponha que $H_\alpha \neq \emptyset$. Note que da continuidade de ψ^R e do fato de H_α ser um espaço compacto segue que $\psi^R[H_\alpha]$ é um subconjunto fraca*-compacto de X^* e portanto, temos que $\psi^R[H_\alpha]$ é um subconjunto não vazio e limitado de X^*. Dessa forma, como X é fraca*-fragmentável, existe um subconjunto U de $\psi^R[H_\alpha]$ não vazio e fraca*-aberto, relativamente a $\psi^R[H_\alpha]$, com $\operatorname{diam}(U) < \delta$. Se definimos $V = (\psi^R|_{H_\alpha})^{-1}[U]$, então V é um subconjunto não vazio e aberto de H_α tal que $\operatorname{diam}\big(\psi^R[V]\big) < \delta$. Finalmente, da definição de $H_{\alpha+1}$ vem que V é disjunto de $H_{\alpha+1}$. □

OBSERVAÇÃO 4.2.12. Note que a hierarquia $(H_\alpha)_{\alpha\in Ord}$ de subconjuntos fechados de L discutida no Lema 4.2.11 está relacionada com o conceito de índice de Szlenk de um espaço de Banach. Recorde que dado um espaço de Banach X, definimos o *índice de Szlenk de X* como sendo o índice de oscilação da inclusão de (B_{X^*}, w^*) em $(X^*, \|.\|)$, onde o *índice de oscilação de uma função* é o supremo em δ dos δ-índices de oscilação dessa função. Portanto, o índice de Szlenk de um espaço de Banach X está bem definido se, e somente se, para todo $\delta > 0$, o δ-índice de oscilação da inclusão de (B_{X^*}, w^*) em $(X^*, \|.\|)$ estiver bem definido. Sabemos que o índice de Szlenk de um espaço de Banach está bem definido se, e somente se, o espaço é Asplund ([**21**, Theorem 2]) e que esse índice é enumerável se, e somente se, o espaço tem dual separável ([**21**, Theorem 1]). Além disso, vale que se X é um espaço de Banach cujo índice de Szlenk está bem definido, L é um compacto Hausdorff e $R : X \to C(L)$ é um operador limitado, então o índice de oscilação da função $\psi^R : L \to (X^*, \|.\|)$ está bem definido e é majorado pelo índice de Szlenk de X. Para ver que essa última afirmação é verdadeira, note que ela é um corolário do seguinte resultado, que é provado fazendo-se indução em α: Dados um número real positivo δ, espaços topológicos $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ e um espaço métrico M, se $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ é uma função contínua e $\phi : \mathcal{X} \to M$ é uma função, então para todo ordinal α, temos que $f[\mathcal{Y}_\alpha] \subset \mathcal{X}_\alpha$, onde $(\mathcal{Y}_\alpha)_{\alpha \in Ord}$ e $(\mathcal{X}_\alpha)_{\alpha \in Ord}$ são as hierarquias construídas na Definição 4.2.10 para esse δ e as funções $\phi \circ f : \mathcal{Y} \to M$ e $\phi : \mathcal{X} \to M$, respectivamente.

O nosso próximo passo rumo à demonstração do Lema 4.2.7 é o Lema 4.2.15, que diz que dada uma medida μ em $M(L)$, se a massa total dessa medida é nula, então a norma do funcional $R^*(\mu)$ de X^* pode ser majorada por uma constante que envolve a função ψ^R. A seguir, apresentamos os Lemas 4.2.13 e 4.2.14 que serão usados para provar esse resultado. Recorde que se L é um espaço compacto Hausdorff e μ é um elemento de $M(L)$, então dizemos que μ é uma *medida de probabilidade* se μ é não negativa e $\|\mu\| = 1$. No próximo lema, relacionamos o subconjunto de $M(L)$ das medidas de probabilidade, denotado por $\mathcal{P}(L)$, com o conjunto $\{\delta_p : p \in L\}$ das medidas de Dirac. Note que dados um espaço de Banach X e um subconjunto A de X^*, denotamos por $\overline{co}^{w^*}(A)$ o fecho na topologia fraca* da envoltória convexa de A.

LEMA 4.2.13. *Se L é um espaço compacto Hausdorff, então:*

(a) *$\mathcal{P}(L)$ é um subconjunto convexo e fraca*-fechado de $M(L)$;*
(b) $\mathcal{P}(L) = \overline{co}^{w^*}\big(\{\delta_p : p \in L\}\big)$.

DEMONSTRAÇÃO. É claro que $\mathcal{P}(L)$ é um subconjunto convexo de $M(L)$. Agora, vamos mostrar que ele também é um subconjunto fraca*-fechado de $M(L)$. Para isso, vejamos que seu complementar é um subconjunto fraca*-aberto de $M(L)$. Se μ é um elemento de $M(L)$ que não pertence a $\mathcal{P}(L)$, então vale que μ tem sinal ou μ é não negativa e sua norma é diferente de 1. Note que se μ tem sinal, então a Proposição 2.3.17 garante que o funcional de $C(L)^*$ que μ representa não é um funcional positivo, i.e., existe uma função $f \in C(L)$ tal que $f \geq 0$ e $\mu(f) < 0$, onde $\mu(f)$ denota o funcional que μ representa calculado na função f. Portanto, existe um número real positivo $\varepsilon > 0$ tal que $\mu(f) + \varepsilon < 0$. Dessa forma, temos que a vizinhança fraca* de μ definida como:

$$\{\nu \in M(L) : |\nu(f) - \mu(f)| < \varepsilon\}$$

é disjunta de $\mathcal{P}(L)$. Se μ é uma medida não negativa com $\|\mu\| \neq 1$, então temos que $\|\mu\| = \mu(1_{C(L)}) \neq 1$, onde $1_{C(L)} : L \to \mathbb{R}$ denota a função constante e igual a 1. Sem perda de generalidade, suponha que $1 < \mu(1_{C(L)})$

e portanto, existe um número real positivo ε tal que $1 < \mu(1_{C(L)}) - \varepsilon$. Note que a conclusão segue do fato que a vizinhança fraca* de μ definida como:

$$\{\nu \in M(L) : |\nu(1_{C(L)}) - \mu(1_{C(L)})| < \varepsilon\}$$

é disjunta de $\mathcal{P}(L)$. Agora, vamos provar que vale o item (b). Note que o conjunto das medidas de Dirac $\{\delta_p : p \in L\}$ está contido em $\mathcal{P}(L)$. Portanto, vale que:

$$\overline{co}^{w^*}\big(\{\delta_p : p \in L\}\big) \subset \mathcal{P}(L), \tag{4.2.3}$$

já que, de acordo com o item (a), $\mathcal{P}(L)$ é um subconjunto convexo e fraca*-fechado de $M(L)$. Por outro lado, suponha, por absurdo, que a inclusão em (4.2.3) seja própria, i.e., existe uma medida μ em $\mathcal{P}(L)$ que não pertence ao conjunto $\overline{co}^{w^*}\big(\{\delta_p : p \in L\}\big)$. Aplicando o Teorema de separação de Hahn–Banach ([**10**, Theorem 3.32(ii)]) para o espaço vetorial localmente convexo $M(L)$, munido da topologia fraca*, o conjunto convexo, não vazio e fraca*-fechado $\overline{co}^{w^*}\big(\{\delta_p : p \in L\}\big)$ e o elemento μ fora de $\overline{co}^{w^*}\big(\{\delta_p : p \in L\}\big)$, obtemos uma função contínua $f : L \to \mathbb{R}$ e um número real positivo ε tais que:

$$\varepsilon + f(p) = \varepsilon + \int_L f \mathrm{d}\delta_p < \int_L f \mathrm{d}\mu, \tag{4.2.4}$$

para todo $p \in L$. Logo, se definimos $c = \int_L f\mathrm{d}\mu$, então a equação (4.2.4) nos diz que $f < c - \varepsilon$ e portanto, como a medida μ é não negativa, temos que:

$$c = \int_L f\mathrm{d}\mu \leq \int_L (c - \varepsilon)\mathrm{d}\mu = c - \varepsilon,$$

já que μ é uma medida de probabilidade. Essa contradição estabelece nosso resultado. □

No Lema 4.2.14 abaixo, mostraremos que se X é um espaço de Banach, então o diâmetro do fecho na topologia fraca* da envoltória convexa de um subconjunto A de X^* coincide com o diâmetro de A.

LEMA 4.2.14. *Seja X um espaço de Banach. Se A é um subconjunto de X^*, então* $\mathrm{diam}(A) = \mathrm{diam}\big(\overline{co}^{w^*}(A)\big)$.

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que A seja limitado, denote seu diâmetro por r e note que, fixado $a \in A$, vale que $A \subset B[a;r]$. Portanto, temos que $\overline{co}^{w^*}(A) \subset B[a;r]$, já que $B[a;r]$ é um subconjunto convexo e fraca*-fechado de X^*. Dessa forma, a distância entre um ponto de A e um ponto de $\overline{co}^{w^*}(A)$ é menor ou igual a r. Finalmente, note que isso implica que se $c \in \overline{co}^{w^*}(A)$, então $A \subset B[c;r]$ e assim, usando novamente o fato que $B[c;r]$ é um subconjunto convexo e fraca*-fechado de X^*, concluímos que $\overline{co}^{w^*}(A) \subset B[c;r]$. □

Finalmente, podemos mostrar o Lema 4.2.15.

LEMA 4.2.15. *Sejam X um espaço de Banach, L um espaço compacto Hausdorff e $R : X \to C(L)$ um operador limitado. Se $\mu \in M(L)$ satisfaz $\mu(L) = 0$, então:*

$$\|R^*(\mu)\| \leq \frac{1}{2} \operatorname{diam}\big(\psi^R[\operatorname{supp}\mu]\big)\|\mu\|. \tag{4.2.5}$$

DEMONSTRAÇÃO. Note que, sem perda de generalidade, podemos assumir que $\operatorname{supp}\mu = L$. De fato, suponha que tenhamos mostrado o resultado para medidas cujo suporte é o espaço todo. Defina $H = \operatorname{supp}\mu$, $\mu' = \mu|_H$ e $R' = \rho_H \circ R$, onde $\rho_H : C(L) \to C(H)$ denota o operador de restrição e note que $\mu'(H) = 0$ e que $\operatorname{supp}\mu' = H$. Portanto, nossa hipótese implica que:

$$\|(R')^*(\mu')\| \leq \frac{1}{2} \operatorname{diam}\big(\psi^{R'}[H]\big)\|\mu'\|.$$

Dessa forma, obtemos a desigualdade (4.2.5), já que $\psi^{R'} = \psi^R|_H$, $\|\mu\| = \|\mu'\|$ e $(R')^*(\mu') = R^*(\mu)$. Seja μ um elemento de $M(L)$ tal que $\operatorname{supp}\mu = L$ e $\mu(L) = 0$ e considere (μ^+, μ^-) a decomposição de Jordan da medida μ. Note que $\mu^+(L) = \mu^-(L)$, já que $\mu(L) = 0$. Logo, usando o Corolário 2.3.7, concluímos que μ^+ e μ^- são medidas não negativas e com norma $\frac{1}{2}\|\mu\|$. É claro que podemos assumir que $\|\mu\| = 2$, o que implica que μ^+ e μ^- pertencem a $\mathcal{P}(L)$ e portanto, de acordo com o Lema 4.2.13 (b), temos que μ^+ e μ^- pertencem a $\overline{co}^{w^*}\big(\{\delta_p : p \in L\}\big)$. Do fato de R^* ser fraca*-contínuo e linear segue que $R^*(\mu^+)$ e $R^*(\mu^-)$ pertencem a $\overline{co}^{w^*}\big(\psi^R[L]\big)$. Finalmente, usando o Lema 4.2.14, obtemos que:

$$\|R^*(\mu)\| = \|R^*(\mu^+) - R^*(\mu^-)\| \leq \operatorname{diam}\big(\psi^R[L]\big).$$

□

Agora, vamos apresentar alguns resultados sobre medidas de Borel numa reta compacta, que serão usados para provar o Lema 4.2.7. O Lema 4.2.16 abaixo é um resultado simples e interessante sobre medidas de Borel regulares definidas num espaço compacto Hausdorff arbitrário K. Ele afirma que toda medida em $M(K)$ satisfaz a "aditividade irrestrita" para famílias de abertos dois a dois disjuntos.

LEMA 4.2.16. *Sejam K um compacto Hausdorff, μ um elemento de $M(K)$ e J um conjunto. Se $(U_j)_{j\in J}$ é uma família de abertos de K dois a dois disjuntos e tal que $\bigcup_{j\in J} U_j$ é um boreliano de K, então vale que:*

$$\mu\Big(\bigcup_{j\in J} U_j\Big) = \sum_{j\in J} \mu(U_j).$$

DEMONSTRAÇÃO. Note que dado um subconjunto J_0 de J, como os abertos U_j são dois a dois disjuntos, temos que:

$$\bigcup_{j\in J\setminus J_0} U_j = \Big(\bigcup_{j\in J} U_j\Big) \setminus \Big(\bigcup_{j\in J_0} U_j\Big). \tag{4.2.6}$$

Logo, se J_0 for enumerável, então do fato de $\bigcup_{j\in J} U_j$ ser um boreliano segue que $\bigcup_{j\in J\setminus J_0} U_j$ é um boreliano de K. Dessa forma, observe que a conclusão segue se mostrarmos que existe um subconjunto enumerável J_0 de J tal que $|\mu|\Big(\bigcup_{j\in J\setminus J_0} U_j\Big) = 0$. Para isso, vamos mostrar que existe um subconjunto enumerável J_0 de J tal que $|\mu|(U_j) = 0$, para todo $j \in J \setminus J_0$. Note que disso e da regularidade de μ vai seguir que $|\mu|\Big(\bigcup_{j\in J\setminus J_0} U_j\Big) = 0$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, da regularidade de μ vem que existe um subconjunto fechado M_ε de K tal que $M_\varepsilon \subset \bigcup_{j\in J\setminus J_0} U_j$ e:

$$|\mu|\Big(\bigcup_{j\in J\setminus J_0} U_j\Big) < |\mu|(M_\varepsilon) + \varepsilon. \tag{4.2.7}$$

Assim, como M_ε é compacto, existe um subconjunto finito F de $J \setminus J_0$ tal que $M_\varepsilon \subset \bigcup_{j\in F} U_j$ e portanto, obtemos que $|\mu|(M_\varepsilon) = 0$. Logo, a equação (4.2.7) nos diz que $|\mu|\Big(\bigcup_{j\in J\setminus J_0} U_j\Big) < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$, o que implica que $|\mu|\Big(\bigcup_{j\in J\setminus J_0} U_j\Big) = 0$. Finalmente, é claro que para mostrarmos que existe um subconjunto enumerável J_0 de J tal que $|\mu|(U_j) = 0$, se $j \in J\setminus J_0$, basta verificarmos que $\sum_{j\in J} |\mu|(U_j) < +\infty$. Fixado F em $\wp_{\mathrm{fin}}(J)$, calcule:

$$\sum_{j\in F} |\mu|(U_j) = |\mu|\big(\bigcup_{j\in F} U_j\big) \le \|\mu\|,$$

pois os abertos U_j são dois a dois disjuntos. O que implica que:

$$\sum_{j\in J} |\mu|(U_j) = \sup_{F\in\wp_{\mathrm{fin}}(J)} \sum_{j\in F} |\mu|(U_j) \le \|\mu\| < +\infty.$$

□

LEMA 4.2.17. *Sejam I uma reta compacta e H um subconjunto fechado e não vazio de I. Dado $\mu \in M(I)$, existe $\nu \in M(I)$ tal que:*

(A) $\operatorname{supp}\nu \subset H$;
(B) $\nu(I) = \mu(I)$;
(C) $\|\nu\| \le \|\mu\|$;
(D) $\nu\big([\min I, s]\big) = \mu\big([\min I, s]\big)$, *para todo* $s \in H \setminus \{\max H\}$.

A hipótese que $H \neq \emptyset$ pode ser retirada se $\mu(I) = 0$.

DEMONSTRAÇÃO. Note que se $H = \emptyset$ e $\mu(I) = 0$, então a medida identicamente nula satisfaz as condições (A)—(D). Agora, suponha que $H \neq \emptyset$ e denote por S o conjunto dos pontos de H que são isolados à esquerda em H, relativamente a H. Para cada $t \in S$, defina $I_t = [\min I, t[$, se $t = \min H$ e $I_t =]t^-, t[$, se $t \neq \min H$, onde t^- denota o antecessor de t em H. Defina ν como:

$$\nu = \mu_H + \sum_{t\in S} \mu(I_t)\delta_t + \mu\big(]\max H, \max I]\big)\delta_{\max H},$$

onde $\mu_H \in M(I)$ é dada por $\mu_H(B) = \mu(H \cap B)$, para todo boreliano B de I. Note que μ_H coincide com a extensão da medida $\mu|_H$ a I que é identicamente nula fora de H e portanto, segue das Proposições 2.3.24 e 2.3.27 que μ_H pertence a $M(I)$. Inicialmente, vejamos que ν está bem definida. Fixado $F \in \wp_{\text{fin}}(S)$, temos que:

$$\sum_{t\in F} |\mu(I_t)| \le \sum_{t\in F} |\mu|(I_t) = |\mu|\Big(\bigcup_{t\in F} I_t\Big) \le |\mu|(I) = \|\mu\|, \tag{4.2.8}$$

já que os intervalos I_t, $t \in S$, são dois a dois disjuntos. De (4.2.8) vem que:

$$\sum_{t\in S} |\mu(I_t)| = \sup_{F\in\wp_{\text{fin}}(S)} \sum_{t\in F} |\mu(I_t)| \le \|\mu\| < +\infty$$

e portanto, temos que $\sum_{t\in S} \mu(I_t)\delta_t$ converge em $M(I)$. Isso mostra que a medida ν está bem definida e pertence a $M(I)$. Agora, vamos checar que ν satisfaz as condições (A)—(D). A condição (A) segue do Corolário 2.3.13, já que $\nu(B) = 0$, para todo boreliano B de I contido em $I \setminus H$. Note que I é a união disjunta de H, dos intervalos I_t, $t \in S$, e do intervalo $]\max H, \max I]$. De fato, seja s um elemento de I que não pertence a $H \cup\,]\max H, \max I]$ e defina $t = \min\big(H \cap [s, \max I]\big)$. Assim, temos que t é um ponto isolado à esquerda de H, relativamente a I e portanto, a Proposição 2.1.12 garante que t pertence a S. Finalmente, a conclusão segue pois s pertence a I_t. Usando essa decomposição de I, obtemos que:

$$\bigcup_{t\in S} I_t = I \setminus \big(H \cup\,]\max H, \max I]\,\big),$$

o que implica que $\bigcup_{t\in S} I_t$ é um boreliano de I. Logo, usando o Lema 4.2.16, concluímos que a condição (B) é satisfeita. Agora, vamos provar que vale (C). De acordo com as Proposições 2.3.24 e 2.3.27, temos que $\|\mu_H\| = \|\mu|_H\| = |\mu|(H)$. Portanto:

$$\|\nu\| \le |\mu|(H) + \sum_{t\in S} \big|\mu(I_t)\big| + \big|\mu\big(\,]\max H, \max I]\,\big)\big|. \tag{4.2.9}$$

Usando que $|\mu(B)| \le |\mu|(B)$, para todo boreliano B de I em (4.2.9), obtemos:

$$\|\nu\| \le |\mu|(H) + \sum_{t\in S} |\mu|(I_t) + |\mu|\big(\,]\max H, \max I]\,\big), \tag{4.2.10}$$

o que implica a condição (C), já que I possui a decomposição descrita acima e o Lema 4.2.16 pode ser usado para a medida regular $|\mu|$. Finalmente, para estabelecer a condição (D), note que se $s \in H$, então:

$$[\min I, s] = \big([\min I, s] \cap H\big) \cup \bigcup_{t\le s} I_t.$$

□

Para enunciarmos o próximo lema e provarmos o Lema 4.2.7, é conveniente introduzirmos a seguinte terminologia. Um subconjunto finito P de uma reta compacta L é dito uma *divisão aberto-fechada de* L [2] se todos os elementos de P forem isolados à direita em L e $\max L \in P$. Se $P = \{b_1, \ldots, b_m\}$, com $b_1 < \ldots < b_m = \max L$, então escrevemos $\overline{P} = \{[0, b_1],]b_1, b_2], \ldots,]b_{m-1}, b_m]\}$; assim, $\overline{P}$ é uma partição de L em intervalos aberto-fechados. Para $t \in L$, denotamos por $\overline{P}(t)$ o único intervalo de $\overline{P}$ que contém t.

LEMA 4.2.18. *Sejam L uma reta compacta e P uma divisão aberto-fechada de L. Dada $\mu \in M(L)$, existe $\tilde{\mu} \in M(L)$ satisfazendo as condições:*

(i) $\tilde{\mu}(I) = 0$, *para todo* $I \in \overline{P}$;
(ii) $\tilde{\mu}\big([0, t]\big) = \mu\big([0, t]\big)$, *para todo* $t \in L \setminus P$;
(iii) $\|\tilde{\mu}\| \leq \|\mu\| + 2\sum_{b \in P} \big|\mu\big([0, b]\big)\big|$.

DEMONSTRAÇÃO. Defina $\tilde{\mu}$ como:

$$\tilde{\mu} = \mu - \sum_{b \in P} \mu\big([0, b]\big)\delta_b + \sum_{\substack{b \in P \\ b \neq \max L}} \mu\big([0, b]\big)\delta_{b^+},$$

onde b^+ denota o sucessor de b em L. As condições (i)—(iii) são facilmente verificadas. □

Agora, estamos em condições de apresentar a demonstração do Lema 4.2.7. Para facilitar a vida do leitor, enunciamos novamente esse resultado.

Lema 4.2.7. Sejam L uma reta compacta zero-dimensional e metrizável, $(\mu_n)_{n\geq 1}$ uma sequência fraca*-nula em $M(L)$ com $\sup_{n\geq 1} \|\mu_n\| \leq 1$, X um espaço de Banach com dual separável e $R : X \to C(L)$ um operador limitado. Dados $\varepsilon, \varepsilon' > 0$, existem sequências fraca*-nulas $(\mu'_n)_{n\geq 1}$ e $(\nu_n)_{n\geq 1}$ em $M(L)$ tais que:

(a) $\mu_n = \mu'_n + \nu_n$, para todo $n \geq 1$;
(b) $\|\nu_n\| \leq 1 + \varepsilon'$ e $\|\mu'_n\| \leq 2 + \varepsilon'$, para todo $n \geq 1$;
(c) $\|R^*(\nu_n)\| \leq \varepsilon$, para todo $n \geq 1$;
(d) $\mu'_n\big([0, t]\big) \longrightarrow 0$, para todo t fora de um conjunto enumerável.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $(H_\alpha)_{\alpha \in Ord}$ a família decrescente de subconjuntos fechados de L construída na Definição 4.2.10 para $\delta = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon'}$ e a função $\psi^R : L \to (X^*, \|.\|)$. Para cada intervalo aberto-fechado I de L, defina:

$$\alpha(I) = \min \big\{\alpha : \operatorname{diam}\big(\psi^R[H_\alpha \cap I]\big) < \delta\big\}. \tag{4.2.11}$$

Para ver que o ordinal $\alpha(I)$ está bem definido, note que o Lema 4.2.9 garante que X é fraca*-fragmentável e portanto, de acordo com o Lema 4.2.11, existe um ordinal α tal que $H_\alpha = \emptyset$. Note que como L possui uma base enumerável de abertos, o Lema 2.1.25 garante que L possui apenas uma quantidade

[2] Note que essa terminologia não coincide com a terminologia usada em ([**4**]). Mudamos a terminologia, para que ela ficasse coerente com a definição de partição de uma reta compacta que apresentamos no presente trabalho.

enumerável de pontos isolados à direita. Portanto, existe uma sequência crescente $(P_k)_{k\geq 1}$ de divisões aberto-fechadas de L tal que $\bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$ é igual ao conjunto dos pontos isolados à direita de L. Além disso, segue do fato que L é zero-dimensional que, para cada $t \in L$, o conjunto $\big\{\overline{P_k}(t) : k \geq 1\big\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de t. Como $(\mu_n)_{n\geq 1}$ é fraca*-nula, para cada $k \geq 1$, existe $n_k \geq 1$ tal que:

$$2 \sum_{b \in P_k} \big|\mu_n\big([0,b]\big)\big| \leq \varepsilon', \tag{4.2.12}$$

para todo $n \geq n_k$. É claro que a sequência $(n_k)_{k\geq 1}$ pode ser escolhida estritamente crescente. Agora, fixado $n \geq 1$, vamos definir as medidas ν_n e μ_n. Se $n < n_1$, coloque $\nu_n = 0$ e $\mu'_n = \mu_n$, assim as condições (a)—(c) valem. Caso contrário, seja k o único número inteiro positivo tal que $n_k \leq n < n_{k+1}$. Usando o Lema 4.2.18 com $\mu = \mu_n$ e a divisão aberto-fechada $P = P_k$, obtemos $\tilde{\mu}_n \in M(L)$ satisfazendo (i)—(iii). Para cada $I \in \overline{P_k}$, temos que $\tilde{\mu}_n(I) = 0$; assim, aplique o Lema 4.2.17 à reta compacta I, o subconjunto fechado $H_{\alpha(I)} \cap I$ de I e a medida $\tilde{\mu}_n|_I$, obtendo $\nu_n^I \in M(I)$ satisfazendo (A)—(D). Defina $\nu_n \in M(L)$ como sendo a única medida em $M(L)$ tal que $\nu_n|_I = \nu_n^I$, para todo $I \in \overline{P_k}(t)$ e defina $\mu'_n = \mu_n - \nu_n$. Note que se identificarmos cada medida ν_n^I com sua extensão a L que é identicamente nula fora de I, então vale que $\nu_n = \sum_{I \in \overline{P_k}} \nu_n^I$. Evidentemente, a condição (a) é satisfeita. Além disso, temos que:

$$\begin{aligned}\|\nu_n\| &\overset{(*)}{=} \sum_{I\in\overline{P_k}} \|\nu_n^I\| \overset{\text{(C)}}{\leq} \sum_{I\in\overline{P_k}} \|\tilde{\mu}_n|_I\| = \|\tilde{\mu}_n\| \\ &\overset{\text{(iii)}}{\leq} \|\mu_n\| + 2\sum_{b\in P_k} \big|\mu_n\big([0,b]\big)\big| \overset{(4.2.12)}{\leq} 1 + \varepsilon'.\end{aligned}$$

Note que na igualdade (*), usamos o fato que $\overline{P_k}$ é uma partição de L e as Proposições 2.3.24 e 2.3.27. O feito acima implica que $\|\mu'_n\| \leq 2 + \varepsilon'$ e portanto, estabelecemos a condição (b). Para provar (c), note que por (A), temos que $\operatorname{supp} \nu_n^I \subset H_{\alpha(I)} \cap I$; além disso:

$$\nu_n^I(I) \overset{\text{(B)}}{=} \tilde{\mu}_n(I) \overset{\text{(i)}}{=} 0. \tag{4.2.13}$$

Então, usando o Lema 4.2.15, obtemos que:

$$\begin{aligned}\|R^*(\nu_n)\| \leq \sum_{I\in\overline{P_k}} \|R^*(\nu_n^I)\| &\leq \frac{1}{2}\sum_{I\in\overline{P_k}} \operatorname{diam}\big(\psi^R[H_{\alpha(I)}\cap I]\big)\|\nu_n^I\| \\ &\overset{(4.2.11)}{\leq} \frac{1}{2}\,\delta\,\|\nu_n\| \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Agora, vamos provar que $(\nu_n)_{n\geq 1}$ (e portanto, $(\mu'_n)_{n\geq 1}$) é fraca*-nula em $M(L)$. Note que como L é zero-dimensional e $(\nu_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência limitada, de acordo com a Proposição 2.4.25, para estabelecer o resultado, basta verificarmos que $\nu_n\big([0,t]\big) \longrightarrow 0$, para todo $t \in L$ isolado à direita. Fixe $t \in L$ isolado à direita e seja k_0 um inteiro positivo tal que $t \in P_{k_0}$. Nosso plano é mostrar que para $n \geq n_{k_0}$, vale que $\nu_n\big([0,t]\big) = 0$. Fixado $n \geq n_{k_0}$, existe um único inteiro positivo k tal que $n_k \leq n < n_{k+1}$ e além disso, $k \geq k_0$. Logo, temos que $t \in P_k$ e portanto, o intervalo $[0,t]$ é uma união disjunta de elementos de $\overline{P_k}$. Dessa forma, usando a equação (4.2.13), obtemos que $\nu_n\big([0,t]\big) = 0$. Finalmente, vamos provar que vale a condição (d). Defina o subconjunto enumerável E de L como:

$$E = \big\{\max\big(H_{\alpha(I)} \cap I\big) : I \in \overline{P_k},\ k \geq 1 \text{ e } H_{\alpha(I)} \cap I \neq \emptyset\big\}.$$

Fixado $t \in L \setminus E$, afirmamos que $\mu'_n\big([0,t]\big) \longrightarrow 0$. De fato, fixe t em $L \setminus E$ e seja β o maior ordinal tal que $t \in H_\beta$. Para ver que o ordinal β existe, note que o menor ordinal α tal que $t \notin H_\alpha$ é um ordinal sucessor. Logo, temos que $t \notin H_{\beta+1}$ e portanto, existe uma vizinhança V de t em H_β tal que $\operatorname{diam}\big(\psi^R[V]\big) < \delta$. Como $\big\{\overline{P_k}(t) : k \geq 1\big\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de t em L, existe um $k_0 \geq 1$ tal que $H_\beta \cap \overline{P_{k_0}}(t) \subset V$. Note que a afirmação estará provada se mostrarmos que $\mu'_n\big([0,t]\big) = 0$, para $n \geq n_{k_0}$. Fixado $n \geq n_{k_0}$, existe $k \geq k_0$ tal que $n_k \leq n < n_{k+1}$. Se $I_t = \overline{P_k}(t)$, então temos que $I_t \subset \overline{P_{k_0}}(t)$, o que implica que $H_\beta \cap I_t \subset V$ e portanto, $\operatorname{diam}\big(\psi^R[H_\beta \cap I_t]\big) < \delta$. Assim, da equação (4.2.11) segue que $\alpha(I_t) \leq \beta$. Logo, como $t \in H_\beta$ e a família $(H_\alpha)_{\alpha \in Ord}$ é decrescente, temos que $t \in H_{\alpha(I_t)}$ e portanto, $t \in H_{\alpha(I_t)} \cap I_t$. Note que do fato de t não pertencer a E segue que t não pertence a P_k. De fato, como t não pertence a E, vale que $t \neq \max\big(H_{\alpha(I_t)} \cap I_t\big)$. Em particular, temos que $t \neq \max I_t$, o que implica que t não pertence a P_k. Assim, calculamos:

$$\nu_n\big([0,t]\big) \overset{(4.2.13)}{=} \nu_n^{I_t}\big([\min I_t, t]\big) \overset{\text{(D)}}{=} \tilde{\mu}_n\big([\min I_t, t]\big) \overset{\text{(i)}}{=} \tilde{\mu}_n\big([0,t]\big) \overset{\text{(ii)}}{=} \mu_n\big([0,t]\big).$$

Portanto, $\mu'_n\big([0,t]\big) = 0$. Isso prova a afirmação e assim, estabelecemos nosso resultado. $\square$

APÊNDICE A

Subálgebras de $C(K)$ e quocientes de K

O objetivo desse apêndice é estabelecer algumas relações entre as subálgebras de Banach do espaço $C(K)$, os quocientes de K e as relações de equivalência em K. Ao longo desse apêndice, K sempre denotará um espaço compacto Hausdorff. Inicialmente, vamos relembrar alguns conceitos.

DEFINIÇÃO A.1. Dados espaços topológicos $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$, dizemos que uma função sobrejetora $\phi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ é uma *função quociente* se, e somente se, a topologia quociente induzida por ϕ em $\mathcal{Y}$ coincide com a topologia original de $\mathcal{Y}$. Veja a definição de topologia quociente induzida por uma função na Observação 2.1.43.

É fácil ver que se K e L são espaços compactos Hausdorff, então toda função contínua e sobrejetora entre K e L é uma função quociente. Dessa forma, dizemos que o par (L, ϕ) é um *quociente de* K se, e somente se, L é um espaço compacto Hausdorff e $\phi : K \to L$ é uma função contínua e sobrejetora. Agora, vamos recordar as definições de álgebra e subálgebra de Banach.

DEFINIÇÃO A.2. Uma *álgebra de Banach real* $\mathfrak{B}$ é uma álgebra associativa sobre o corpo $\mathbb{R}$, munida de uma norma $\|.\|$ que faz com que $(\mathfrak{B}, \|.\|)$ seja um espaço de Banach e satisfaz $\|a.b\| \leq \|a\|\|b\|$, para todos $a, b \in \mathfrak{B}$. Dizemos que $\mathfrak{B}$ é uma *álgebra de Banach com unidade* se, e somente se, $\mathfrak{B}$ é uma álgebra de Banach e possui unidade $1_{\mathfrak{B}}$ satisfazendo $\|1_{\mathfrak{B}}\| \leq 1$.

Note que dada uma álgebra de Banach $\mathfrak{B}$ com unidade $1_{\mathfrak{B}}$, se $\mathfrak{B}$ não é o espaço nulo, então vale que $\|1_{\mathfrak{B}}\| = 1$. Facilmente se verifica que o espaço $C(K)$ é uma álgebra de Banach real comutativa e com unidade, se munido das operações de soma, produto por escalar e multiplicação ponto a ponto e da norma do supremo. Se K é não vazio, então a unidade de $C(K)$ é a função constante e igual a 1.

DEFINIÇÃO A.3. Dada uma álgebra de Banach $\mathfrak{B}$ (resp., com unidade $1_{\mathfrak{B}}$), uma subálgebra de Banach (resp., com unidade) de $\mathfrak{B}$ é um subconjunto de $\mathfrak{B}$ (resp., contendo $1_{\mathfrak{B}}$) que é uma álgebra de Banach, se munido da restrição das operações e da norma de $\mathfrak{B}$.

Nesse apêndice, veremos que as subálgebras de Banach com unidade de $C(K)$, as relações de equivalência em K e os quocientes de K estão intimamente relacionados. De forma imprecisa, podemos dizer que existem uma bijeção entre as relações de equivalência em K e os quocientes de K e uma bijeção entre os quocientes de K e as subálgebras de Banach com unidade de $C(K)$. No que segue, tornaremos essa última afirmação mais precisa.

Começamos investigando a relação entre os quocientes de K e as relações de equivalência em K. Note que se $\sim$ é uma relação de equivalência em K, então o quociente $K/\sim$ é um espaço compacto, se munido da topologia quociente, pois a aplicação quociente $q : K \to K/\sim$ é contínua e sobrejetora. No entanto, o quociente $K/\sim$ pode não ser um espaço Hausdorff. A Proposição A.5 garante que uma condição necessária e suficiente para que o quociente seja Hausdorff é que a relação $\sim$ seja fechada. Dizemos que uma relação binária em K é *fechada* se, e somente se, ela é um subconjunto fechado de $K \times K$, onde esse produto está munido da topologia produto. Para estabelecermos a Proposição A.5, precisamos do seguinte lema.

LEMA A.4. *Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ espaços topológicos e $\phi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ uma função quociente e fechada. Se o espaço $\mathcal{X}$ é T_1 e normal, então $\mathcal{Y}$ é T_1 e normal.*

DEMONSTRAÇÃO. Para ver que $\mathcal{Y}$ é T_1, note que dado $y \in \mathcal{Y}$, existe $x \in X$ tal que $\phi(x) = y$. Como $\mathcal{X}$ é T_1, temos que $\{x\}$ é fechado em $\mathcal{X}$ e portanto, $\phi\big[\{x\}\big] = \{y\}$ é fechado em $\mathcal{Y}$, já que ϕ é fechada. Agora, vamos mostrar que $\mathcal{Y}$ é normal. Sejam F e G dois fechados disjuntos de $\mathcal{Y}$. Da continuidade de ϕ segue que $\phi^{-1}[F]$ e $\phi^{-1}[G]$ são subconjuntos fechados de $\mathcal{X}$. Como $\mathcal{X}$ é normal, temos que existem subconjuntos abertos e disjuntos U e V de $\mathcal{X}$ tais que $\phi^{-1}[F] \subset U$ e $\phi^{-1}[G] \subset V$. Os abertos disjuntos que separarão F e G são $U' = \mathcal{Y} \setminus \phi[\mathcal{X} \setminus U]$ e $V' = \mathcal{Y} \setminus \phi[\mathcal{X} \setminus V]$. Note que U' e V' são subconjuntos abertos de $\mathcal{Y}$, já que U e V são abertos de $\mathcal{X}$ e a função ϕ é fechada. Para ver que F está contido em U', note que do fato de $\phi^{-1}[F]$ estar contido em U, segue que $\phi[\mathcal{X} \setminus U]$ é disjunto de F. O que implica que:

$$\phi[\mathcal{X} \setminus U] \subset \mathcal{Y} \setminus F. \tag{A.1}$$

Complementando (A.1), obtemos que F está contido em U'. Analogamente mostra-se que G está contido em V'. Agora, vamos mostrar que U' e V' são disjuntos. Do fato de U e V serem disjuntos, segue que:

$$\mathcal{X} = (\mathcal{X} \setminus U) \cup (\mathcal{X} \setminus V)$$

e portanto:

$$\mathcal{Y} = \phi\big[\mathcal{X} \setminus U\big] \cup \phi\big[\mathcal{X} \setminus V\big]. \tag{A.2}$$

Logo, complementando-se a igualdade (A.2), obtemos que $U' \cap V' = \emptyset$. □

PROPOSIÇÃO A.5. *Sejam K um espaço compacto Hausdorff e $\sim$ uma relação de equivalência em K. Vale que o espaço $K/\sim$, munido da topologia quociente, é Hausdorff se, e somente se, a relação $\sim$ é fechada.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que $K/\sim$ seja Hausdorff e vamos mostrar que a relação $\sim$ é fechada. Faremos isso verificando que o complementar de $\sim$ em $K \times K$ é aberto. Sejam x e y elementos de K que não são equivalentes, ou seja, $q(x) \neq q(y)$, onde $q : K \to K/\sim$ denota a aplicação quociente.

Como o quociente é Hausdorff, existem subconjuntos U e V abertos e disjuntos de $K/\sim$ tais que $q(x) \in U$ e $q(y) \in V$. Da definição da topologia quociente segue que $q^{-1}[U]$ e $q^{-1}[V]$ são abertos de K. A conclusão segue da observação que $q^{-1}[U] \times q^{-1}[V]$ é uma vizinhança de (x, y) no produto $K \times K$ que é disjunta de $\sim$. Agora, suponha que a relação $\sim$ seja fechada e vamos mostrar que $K/\sim$ é Hausdorff. De acordo com o Lema A.4, como K é T_1 e normal e q é uma função quociente, a conclusão segue se mostrarmos que a aplicação $q : K \to K/\sim$ é fechada. Seja F um subconjunto fechado de K, como $K/\sim$ está munido da topologia quociente, para mostrarmos que $q[F]$ é fechado, devemos mostrar que $q^{-1}\big[q[F]\big]$ é um subconjunto fechado de K. Faremos isso verificando que seu complementar é aberto. Fixado $x \notin q^{-1}\big[q[F]\big]$, do fato de $\sim$ ser fechada vem que dado $y \in F$, existem subconjuntos abertos U_y e V_y de K tais que $(x, y) \in U_y \times V_y$ e $U_y \times V_y$ é disjunto de $\sim$. Note que F é compacto e está contido em $\bigcup_{y \in F} V_y$. Logo, existe um subconjunto finito $\{y_1, \ldots, y_n\}$ de F tal que $F \subset \bigcup_{j=1}^{n} V_{y_j}$. Finalmente, a conclusão segue da observação que $\cap_{j=1}^{n} U_{y_j}$ é uma vizinhança aberta de x em K e disjunta de $q^{-1}\big[q[F]\big]$. □

Dessa forma, dada uma relação de equivalência fechada $\sim$ em K, se $q : K \to K/\sim$ denota a aplicação quociente, então o par $(K/\sim, q)$ é um quociente de K tal que os conjuntos de nível da função q coincidem com as classes de equivalência de $\sim$. Nesse caso, dizemos que $(K/\sim, q)$ é um quociente induzido por $\sim$.

DEFINIÇÃO A.6. Seja $\sim$ uma relação de equivalência fechada em K. Dizemos que um par (L, ϕ) é um *quociente de K induzido pela relação* $\sim$ se, e somente se, (L, ϕ) é um quociente de K e as classes de equivalência de $\sim$ coincidem com os conjuntos de nível da função ϕ.

Embora, fixada uma relação de equivalência fechada em K, não tenhamos a unicidade do quociente de K induzido por essa relação, na Proposição A.8, veremos o que acontece se tivermos dois quocientes induzidos pela mesma relação de equivalência. O ponto central na demonstração da Proposição A.8 é o Lema A.7 abaixo.

LEMA A.7. *Sejam (L, ϕ) e (H, ψ) dois quocientes de K. Se vale que $\phi(x) = \phi(y)$ se, e somente se, $\psi(x) = \psi(y)$, para todos x e y em K, então:*

$$\text{existe um homeomorfismo } h : H \to L \text{ tal que } \phi = h \circ \psi. \tag{A.3}$$

DEMONSTRAÇÃO. Note que nossa hipótese garante que a função ϕ passa ao quociente por ψ, ou seja, existe uma função $h : H \to L$ que satisfaz $\phi = h \circ \psi$. Nossa hipótese também garante que a função h é injetora. Como ψ é uma aplicação quociente e ϕ é contínua, temos que h é contínua. Além disso, h é sobrejetora, já que sua imagem coincide com a imagem de ϕ. Finalmente, do fato de h ser uma função bijetora e fechada segue que h é um homeomorfismo. □

PROPOSIÇÃO A.8. *Sejam K um espaço compacto Hausdorff e $\sim_1$ e $\sim_2$ relações de equivalência fechadas em K. Suponha que (L, ϕ) seja um quociente de K induzido por $\sim_1$ e (H, ψ) um quociente de K induzido por $\sim_2$. Vale que as relações de equivalência $\sim_1$ e $\sim_2$ coincidem se, e somente se, a condição* (A.3) *é satisfeita.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que as relações $\sim_1$ e $\sim_2$ coincidem e note que isso implica que $\phi(x) = \phi(y)$ se, e somente se, $\psi(x) = \psi(y)$, para todos x e y em K. Logo, o resultado segue diretamente do Lema A.7. Reciprocamente, seja $h : H \to L$ um homeomorfismo tal que $\phi = h \circ \psi$ e vamos mostrar que (L, ϕ) e (H, ψ) são quocientes induzidos pela mesma relação de equivalência. Para isso, basta mostrarmos que:

$$\big\{\phi^{-1}(y) : y \in L\big\} = \big\{\psi^{-1}(z) : z \in H\big\}. \tag{A.4}$$

Note que a igualdade (A.4) segue do fato que h é um homeomorfismo e de $\phi = h \circ \psi$. $\square$

Dessa forma, se $\mathfrak{A}$ denota a classe de todos os quocientes de K com os quocientes (L, ϕ) e (H, ψ) que satisfazem a condição (A.3) identificados, então a Proposição A.8 garante que a aplicação F que a cada relação de equivalência fechada em K associa a classe em $\mathfrak{A}$ dos quocientes induzidos por essa relação está bem definida. Na verdade, vale que a aplicação F é uma bijeção. Note que a injetividade de F também segue da Proposição A.8. Além disso, se (L, ϕ) é um quociente de K, então a relação binária em K definida como $x \sim y$ se, e somente se, $\phi(x) = \phi(y)$, para todos $x, y \in K$, é uma relação de equivalência fechada em K. Dizemos que essa é a *relação de equivalência em K induzida pelo quociente* (L, ϕ). Finalmente, é fácil ver que se (L, ϕ) é um quociente de K e $\sim$ é a relação de equivalência induzida em K por (L, ϕ), então os quocientes induzidos por $\sim$ pertencem à classe de equivalência de (L, ϕ) em $\mathfrak{A}$, o que implica que a aplicação F é sobrejetora.

Agora, vamos investigar a relação entre as subálgebras de Banach com unidade de $C(K)$ e os quocientes de K. Vamos mostrar que existe uma bijeção entre o conjunto de todas as subálgebras de Banach com unidade de $C(K)$ e a classe $\mathfrak{A}$ definida acima. Para isso, na próxima definição, relembramos o conceito de homomorfismo de álgebras de Banach com unidade.

DEFINIÇÃO A.9. Sejam $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{C}$ álgebras de Banach reais e $h : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ uma função. Dizemos que h é um *homomorfismo de álgebras de Banach* se, e somente se, h é um homomorfismo de álgebras reais e é contínuo, se $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{C}$ estiverem munidas da topologia da norma. Além disso, se $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{C}$ tiverem unidades $1_{\mathfrak{B}}$ e $1_{\mathfrak{C}}$, respectivamente e $h : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ for um homomorfismo de álgebras de Banach, então diremos que h é um *homomorfismo de álgebras de Banach com unidade* se, e somente se, $h(1_{\mathfrak{B}}) = 1_{\mathfrak{C}}$.

Note que se L é um espaço compacto Hausdorff e $\phi : K \to L$ é uma função contínua, então o operador de composição $\phi^* : C(L) \to C(K)$ de ϕ é um homomorfismo de álgebras de Banach com unidade e portanto, $\phi^* C(L)$ é uma subálgebra de Banach com unidade de $C(K)$. Em particular, se (L, ϕ) é um quociente de K, então $\phi^*C(L)$ é uma subálgebra de Banach com unidade de $C(K)$, pois toda função quociente é contínua. Dado um quociente (L, ϕ) de K, dizemos que $\phi^*C(L)$ é a *subálgebra de Banach induzida por* (L, ϕ). Na Proposição A.12, veremos que toda subálgebra de Banach com unidade de $C(K)$ é induzida por algum quociente de K. Para isso, precisaremos de mais algumas definições e do Teorema de Stone–Weierstrass. Analogamente ao conceito de subespaço de Banach gerado por um subconjunto de um espaço de Banach, temos o conceito de subálgebra de Banach gerada por um subconjunto de uma álgebra de Banach.

DEFINIÇÃO A.10. Se $\mathfrak{B}$ é uma álgebra de Banach (resp., com unidade $1_{\mathfrak{B}}$) e S é um subconjunto de $\mathfrak{B}$, então a *subálgebra de Banach (resp., com unidade) de* $\mathfrak{B}$ *gerada por* S é a menor subálgebra de Banach (resp., com unidade) de $\mathfrak{B}$ que contém S.

Recorde que se S é um subconjunto de $C(K)$, então dizemos que S *separa os pontos de* K se, e somente se, dados x e y em K com $x \neq y$, existe $f \in S$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

LEMA A.11. *(Teorema de Stone–Weierstrass) Sejam K um espaço compacto Hausdorff e S um subconjunto de $C(K)$. Se S contém a função constante igual a 1 e separa os pontos de K, então a subálgebra de Banach com unidade de $C(K)$ gerada por S é todo o $C(K)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Veja ([**34**, Theorem 44.5]). □

PROPOSIÇÃO A.12. *Seja K um espaço compacto Hausdorff. Se $\mathfrak{C}$ é uma subálgebra de Banach com unidade de $C(K)$, então existe um quociente (L, ϕ) de K tal que $\mathfrak{C}$ coincide com a subálgebra de Banach induzida por (L, ϕ).*

DEMONSTRAÇÃO. A subálgebra $\mathfrak{C}$ induz um relação de equivalência $\sim$ em K, definida como $x \sim y$ se, e somente se, $f(x) = f(y)$, para toda $f \in \mathfrak{C}$. Note que a continuidade dos elementos de $\mathfrak{C}$ implica que essa é uma relação de equivalência fechada e considere um quociente (L, ϕ) de K induzido por $\sim$. Vamos mostrar que (L, ϕ) induz a subálgebra $\mathfrak{C}$, ou seja:

$$\mathfrak{C} = \phi^*C(L).$$

Inicialmente, vejamos que $\mathfrak{C} \subset \phi^*C(L)$. Para isso, note que toda função f de $\mathfrak{C}$ passa ao quociente por ϕ, ou seja, existe $\bar{f} : L \to \mathbb{R}$ tal que $f = \bar{f} \circ \phi$. Além disso, como ϕ é uma função quociente e a função f é contínua, temos que $\bar{f}$ é contínua. Portanto, se f é um elemento de $\mathfrak{C}$, então $\bar{f}$ pertence a $C(L)$. Finalmente, note que:

$$\phi^*\bar{f} = f, \tag{A.5}$$

para toda $f \in \mathfrak{C}$, o que implica que $\mathfrak{C} \subset \phi^*C(L)$. Agora, vamos mostrar a outra inclusão. Defina o seguinte subconjunto de $C(L)$:

$$S = \{\bar{f} \in C(L) : f \in \mathfrak{C}\}.$$

Note que a função constante e igual a 1 pertence a S e S separa os pontos de L. Portanto, o Lema A.11 garante que a subálgebra de Banach com unidade de $C(L)$ gerada por S é todo o espaço $C(L)$. Logo, como ϕ^* é um homomorfismo de álgebras de Banach com unidade e $\mathfrak{C}$ é uma álgebra de Banach com unidade, para estabelecer nosso resultado, basta mostrarmos que $\phi^*[S] \subset \mathfrak{C}$. Mas, isso segue trivialmente da definição do conjunto S e de (A.5). □

Embora, fixada uma subálgebra de Banach com unidade de $C(K)$, não tenhamos a unicidade do quociente de K que induz essa subálgebra, vale o seguinte resultado.

PROPOSIÇÃO A.13. *Sejam K um espaço compacto Hausdorff e (L, ϕ) e (H, ψ) quocientes de K. Vale que (L, ϕ) e (H, ψ) induzem uma mesma subálgebra de Banach de $C(K)$ se, e somente se, a condição* (A.3) *é satisfeita.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que exista um homeomorfismo $h : H \to L$ satisfazendo $\phi = h \circ \psi$ e vamos mostrar que (L, ϕ) e (H, ψ) induzem uma mesma subálgebra de Banach com unidade de $C(K)$. Ou seja, devemos mostrar que:

$$\phi^* C(L) = \psi^* C(H). \tag{A.6}$$

Note que a igualdade (A.6) segue do fato que $\phi^* = \psi^* \circ h^*$ e do fato que o operador de composição $h^* : C(L) \to C(H)$ de h é uma isometria linear. Reciprocamente, se os quocientes (L, ϕ) e (H, ψ) induzem uma mesma subálgebra de Banach com unidade de $C(K)$, então a equação (A.6) vale. Note que a equação (A.6) implica que $\phi(x) = \phi(y)$ se, e somente se, $\psi(x) = \psi(y)$, para todos $x, y \in K$. De fato, observe que dados elementos x e y de K, como H é normal, o Lema de Urysohn implica que $\psi(x) = \psi(y)$ se, e somente se, $f\big(\psi(x)\big) = f\big(\psi(y)\big)$, para toda $f \in C(H)$. Assim, suponha que $\phi(x) = \phi(y)$, fixe $f \in C(H)$ e note que como $\psi^* C(H) \subset \phi^* C(L)$, existe $g \in C(L)$ tal que $\psi^* f = \phi^* g$. Portanto, ficamos com:

$$f\big(\psi(x)\big) = \phi^* g(x) = g\big(\phi(x)\big) = g\big(\phi(y)\big) = \psi^* f(y) = f\big(\psi(y)\big).$$

A prova de que se $\psi(x) = \psi(y)$, então $\phi(x) = \phi(y)$ é feita de forma análoga. Dessa forma, o resultado segue diretamente do Lema A.7. □

Note que a Proposição A.13 implica que a aplicação G que associa a cada classe de equivalência de um quociente (L, ϕ) em $\mathfrak{A}$ a subálgebra de Banach com unidade $\phi^* C(L)$ de $C(K)$ está bem definida. Na verdade, temos que G é uma bijeção entre a classe $\mathfrak{A}$ e o conjunto das subálgebras de Banach com unidade de $C(K)$. De fato, a Proposição A.13 também nos diz que a aplicação G é injetora e segue da Proposição A.12 que G é sobrejetora.

Concluímos esse apêndice mostrando como algumas propriedades da subálgebra de $C(K)$ induzida por um quociente de K se traduzem em propriedades desse quociente.

PROPOSIÇÃO A.14. *Sejam K um espaço compacto Hausdorff, $\mathfrak{C}$ uma subálgebra de Banach com unidade de $C(K)$ e (L,ϕ) um quociente de K que induz $\mathfrak{C}$. Vale que $\mathfrak{C}$ é separável se, e somente se, L é metrizável.*

DEMONSTRAÇÃO. A conclusão segue do fato que $\phi^*C(L)$ é linearmente isométrico a $C(L)$ e da observação que o espaço $C(L)$ é separável se, e somente se, o espaço L é metrizável ([**10**, Lemma 3.102]). □

No que segue diremos que um subconjunto S de $C(K)$ *gera* uma subálgebra de Banach com unidade $\mathfrak{C}$ de $C(K)$ se, e somente se, $\mathfrak{C}$ é a subálgebra de Banach com unidade gerada por S.

PROPOSIÇÃO A.15. *Sejam K um espaço compacto Hausdorff, $\mathfrak{C}$ uma subálgebra de Banach com unidade de $C(K)$ e (L,ϕ) um quociente de K que induz $\mathfrak{C}$. Vale que existe um subconjunto de $C(K)$ formado apenas por funções simples que gera $\mathfrak{C}$ se, e somente se, o espaço L é zero-dimensional.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja S um subconjunto de $C(K)$ formado apenas por funções simples. Suponha que S gera $\mathfrak{C}$ e vamos mostrar que o espaço L é zero-dimensional. Note que a Observação 2.4.23 garante que para isso, basta mostrarmos que o subespaço:

$$A = \{f \in C(L) : f \text{ é uma função simples}\}$$

é denso em $C(L)$. Como $\phi^*C(L)$ é a subálgebra de Banach com unidade de $C(K)$ gerada por S e $(\phi^*)^{-1} : \phi^*C(L) \to C(L)$ é um homomorfismo de álgebras de Banach com unidade, temos que a subálgebra de Banach com unidade de $C(L)$ gerada por $(\phi^*)^{-1}[S]$ é todo o espaço $C(L)$. Ou seja, vale que o conjunto:

$$\big\{f_1 \cdots f_n : n \geq 1, f_j \in (\phi^*)^{-1}[S], j = 1, \ldots, n\big\} \cup \big\{1_{C(L)}\big\} \tag{A.7}$$

é linearmente denso em $C(L)$, onde $1_{C(L)} : L \to \mathbb{R}$ denota a função constante e igual a 1. Dessa forma, a conclusão segue se mostrarmos que o conjunto (A.7) está contido no subespaço A. Para ver que os elementos do conjunto (A.7) são funções simples, note que um produto finito de funções simples é simples e que a sobrejetividade de ϕ implica que os elementos de $(\phi^*)^{-1}[S]$ também são funções simples. Reciprocamente, se L é zero-dimensional, então a Observação 2.4.23 garante que o subespaço A é denso em $C(L)$, o que implica que $\phi^*C(L)$ é a subálgebra de Banach com unidade de $C(K)$ gerada pelo conjunto $\phi^*[A]$. Finalmente, note que todos os elementos de $\phi^*[A]$ são funções simples. □

PROPOSIÇÃO A.16. *Sejam K uma reta compacta, $\mathfrak{C}$ uma subálgebra de Banach com unidade de $C(K)$ e (L,ϕ) um quociente de K que induz $\mathfrak{C}$. Vale que existe um subconjunto de $C(K)$ formado apenas por funções monótonas que gera $\mathfrak{C}$ se, e somente se, os conjuntos de nível da função ϕ são intervalos fechados de K.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja S um subconjunto de $C(K)$ formado apenas por funções monótonas. Suponha que $\mathfrak{C}$ seja a subálgebra de Banach com unidade de $C(K)$ gerada por S e vamos mostrar que os conjuntos de nível de ϕ são intervalos fechados de K. Como $\mathfrak{C}$ é induzida por (L, ϕ), temos que:

$$\mathfrak{C} = \phi^* C(L). \tag{A.8}$$

Fixado y em L, da continuidade de ϕ segue que $\phi^{-1}(y)$ é um subconjunto fechado de K. Como K é um conjunto totalmente ordenado e completo, a Proposição 2.1.17 garante que para estabelecermos que $\phi^{-1}(y)$ é um intervalo, basta mostrarmos que esse conjunto possui a pvi, relativamente a K. Sejam t e s elementos de K tais que $t < s$ e $\phi(t) = \phi(s) = y$ e r um elemento de K com $t < r < s$, vejamos que $\phi(r) = y$. Para isso, de acordo com o Lema de Urysohn, basta mostrarmos que $g(y) = g\big(\phi(r)\big)$, para toda função g de $C(L)$. Note que como $\phi(t) = \phi(s)$, a igualdade (A.8) implica que $f(t) = f(s)$, para toda $f \in \mathfrak{C}$. Portanto, vale que $f|_{[t,s]}$ é constante, para toda $f \in S$, já que os elementos de S são funções monótonas. Em particular, vale que $f(r) = f(t)$, para toda $f \in S$. Assim, como $\mathfrak{C}$ é a subálgebra de Banach com unidade de $C(K)$ gerada por S, temos que:

$$f(r) = f(t), \ \forall f \in \mathfrak{C}. \tag{A.9}$$

Dada $g \in C(L)$, a igualdade (A.8) garante que $\phi^* g$ pertence a $\mathfrak{C}$ e assim ficamos com:

$$g(y) = g\big(\phi(t)\big) = \phi^* g(t) \overset{\text{(A.9)}}{=} \phi^* g(r) = g\big(\phi(r)\big).$$

Reciprocamente, se $\phi^{-1}(y)$ é um intervalo fechado de K, para todo $y \in L$, então o Corolário 2.1.42 garante que existe uma ordem total em L que faz com que ϕ seja crescente e a topologia da ordem coincide com a topologia original de L. Logo, se considerarmos L munida dessa ordem total, então L é uma reta compacta e portanto, segue da Proposição 2.2.12 que o conjunto:

$$B = \{f \in C(L) : f \text{ é uma função crescente}\}$$

é linearmente denso em $C(L)$. Dessa forma, temos que a subálgebra de Banach com unidade de $C(K)$ gerada por $\phi^*[B]$ coincide com $\phi^* C(L)$. Finalmente, note que do fato de ϕ ser crescente segue que os elementos de $\phi^*[B]$ são funções crescentes. $\square$

APÊNDICE B

Compactos de Eberlein

O objetivo desse apêndice é estudar algumas propriedades dos compactos de Eberlein e relações entre esses compactos e os espaços de Banach WCG. Começamos recordando a seguinte definição.

DEFINIÇÃO B.1. Dado um compacto Hausdorff K, dizemos que K é um *compacto de Eberlein* se, e somente se, K é homeomorfo a um subconjunto fracamente compacto de um espaço de Banach, munido da topologia fraca.

Na verdade, vale que K é um compacto de Eberlein se, e somente se, K é homeomorfo a um subconjunto fracamente compacto de $c_0(I)$, para algum conjunto I ([**9**, Corollary 11.15]). Os exemplos mais simples de compactos de Eberlein são os compactos metrizáveis. De fato, se K é um compacto metrizável, então $C(K)$ é um espaço de Banach separável. Seja $\{f_n : n \geq 1\}$ um subconjunto denso na bola unitária fechada de $C(K)$ e considere a função $\varphi : K \to c_0$ definida como $\varphi(p) = \left(\frac{f_n(p)}{n}\right)_{n\geq 1}$, para todo $p \in K$. Note que a densidade de $\{f_n : n \geq 1\}$ em $B_{C(K)}$ implica que a função φ é injetora e além disso, φ é contínua, se c_0 estiver munido da topologia da norma. Portanto, temos que K é homeomorfo a um subconjunto compacto em norma de c_0, munido da topologia da norma. Dessa forma, concluímos que um espaço compacto é metrizável se, e somente se, ele é homeomorfo a um subconjunto compacto em norma de um espaço de Banach, munido da topologia da norma. Além disso, note que a classe dos compactos de Eberlein contém propriamente a classe dos compactos metrizáveis. De fato, se Γ é um conjunto não enumerável, então o compactificado de Alexandroff de Γ é um compacto de Eberlein que não é metrizável. Para ver que o compactificado de Alexandroff de Γ é um compacto de Eberlein, observe que ele é homeomorfo ao conjunto fracamente compacto $\{0\} \cup \{e_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ de $c_0(\Gamma)$, munido da topologia fraca. Agora, vejamos que esse espaço não é metrizável. Se o compactificado de Alexandroff de Γ fosse metrizável, então ele teria uma base enumerável de abertos e portanto, seria separável. Recorde que os compactos metrizáveis estão intimamente relacionados com os espaços de Banach separáveis. Mais precisamente, dado um compacto Hausdorff K, temos que K é metrizável se, e somente se, o espaço $C(K)$ é separável ([**10**, Lemma 3.102]). Note que os compactos de Eberlein e os espaços de Banach WCG estão relacionados dessa mesma forma, i.e., um espaço compacto Hausdorff é um compacto de Eberlein se, e somente se, seu espaço de funções contínuas é WCG ([**10**, Theorem 14.9]). Na verdade, a relação entre os compactos metrizáveis e os espaços de Banach separáveis é ainda mais profunda. Dado um espaço de Banach X, temos que X é separável se, e somente se, (B_{X^*}, w^*) é metrizável ([**10**, Proposition 3.103]). No contexto dos espaços de Banach WCG, isso não acontece. Vale que se X é um espaço WCG, então (B_{X^*}, w^*) é um compacto de Eberlein ([**10**, Theorem 13.20]), mas a volta não vale (veja a Observação B.5). No entanto, como veremos na Proposição B.2, se X é da forma $C(K)$ e a bola unitária de seu dual é um compacto de Eberlein, se munida da topologia fraca*, então X é WCG.

PROPOSIÇÃO B.2. *Seja K um compacto Hausdorff. Se a bola unitária fechada do dual de $C(K)$ é um compacto de Eberlein, quando munida da topologia fraca*, então $C(K)$ é um espaço WCG.*

DEMONSTRAÇÃO. De acordo com o discutido acima, a conclusão segue se mostrarmos que K é um compacto de Eberlein. Considere a função $\delta : K \to B_{C(K)^*}$ definida como $\delta(p) = \delta_p$, para todo $p \in K$ e note que essa função é injetora e contínua, se $B_{C(K)^*}$ estiver munida da topologia fraca*. Portanto, temos que K é homeomorfo a um subconjunto compacto de $(B_{C(K)^*}, w^*)$. Logo, usando o fato que subconjuntos fechados de um compacto de Eberlein são compactos de Eberlein, concluímos nosso resultado. $\square$

Na Observação 1.1.17, comentamos que um subespaço fechado de um espaço de Banach WCG não é necessariamente WCG. No entanto, na Proposição B.4, veremos que ser WCG é uma propriedade hereditária para subespaços fechados da forma $C(K)$. Para provar a Proposição B.4, precisamos do Lema B.3 abaixo, que diz que a bola do dual de um subespaço fechado de um espaço de Banach WCG é um compacto de Eberlein, quando munida da topologia fraca*.

LEMA B.3. *Seja X um espaço de Banach WCG. Se Y é um espaço de Banach isomorfo a um subespaço de X, então a bola unitária do dual de Y é um compacto de Eberlein, quando munida da topologia fraca*.*

DEMONSTRAÇÃO. Note que se $T : Y \to X$ é um isomorfismo sobre sua imagem, então o operador transposto $T^* : X^* \to Y^*$ de T é limitado e sobrejetor. Logo, o Teorema da aplicação aberta ([**9**, Theorem 2.24]) garante que existe $r > 0$ tal que:

$$rB_{Y^*} \subset T^*[B_{X^*}]. \tag{B.1}$$

Por outro lado, do fato de X ser um espaço WCG segue que o espaço (B_{X^*}, w^*) é um compacto de Eberlein. Portanto, temos que $(T^*[B_{X^*}], w^*)$ também é um compacto de Eberlein, já que T^* é fraca*-fraca*-contínuo e a classe dos compactos de Eberlein é fechada por imagens contínuas ([**3**]). Dessa forma, a conclusão segue da equação (B.1) e do fato que subespaços fechados de um compacto de Eberlein são Eberlein. $\square$

PROPOSIÇÃO B.4. *Sejam K um espaço compacto Hausdorff e X um espaço de Banach WCG. Se $C(K)$ é isomorfo a um subespaço de X, então $C(K)$ é WCG.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue diretamente do Lema B.3 e da Proposição B.2. □

OBSERVAÇÃO B.5. Note que o Lema B.3 implica que as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) Todo subespaço fechado de um espaço de Banach WCG é WCG;
(ii) Dado um espaço de Banach Y, se a bola unitária fechada do dual de Y é um compacto de Eberlein, quando munida da topologia fraca*, então Y é um espaço WCG.

De fato, suponha que a afirmação (i) seja verdadeira e seja Y um espaço de Banach cuja bola unitária do dual é um compacto de Eberlein, quando munida da topologia fraca*. Como discutido anteriormente, nossa hipótese implica que o espaço das funções contínuas definidas em (B_{Y^*}, w^*) e tomando valores em $\mathbb{R}$ é WCG. Logo, a conclusão segue de (i) e da observação que dado um espaço de Banach arbitrário X, o operador que associa a cada elemento x de X a função contínua $\hat{x} : (B_{X^*}, w^*) \to \mathbb{R}$ definida como $\hat{x}(\alpha) = \alpha(x)$ é uma imersão isométrica de X no espaço das funções contínuas definidas na bola unitária do dual de X, munida da topologia fraca*, e tomando valores em $\mathbb{R}$. Reciprocamente, suponha que a afirmação (ii) seja verdadeira e considere um espaço de Banach WCG X e um subespaço fechado Y de X. De acordo com o Lema B.3, temos que a bola unitária do dual de Y é um compacto de Eberlein, se munida da topologia fraca* e portanto, segue de (ii) que Y é um espaço WCG. Portanto, como a afirmação (i) é falsa ([**26**]), temos que a afirmação (ii) também é falsa.

Agora, vamos mostrar que, embora os compactos de Eberlein não sejam necessariamente metrizáveis, esses compactos compartilham uma propriedade interessante com os espaços metrizáveis. A saber, todo compacto de Eberlein é um espaço de Fréchet.

DEFINIÇÃO B.6. Dizemos que um espaço topológico $\mathcal{X}$ é um *espaço de Fréchet* se, e somente se, dados um subconjunto A de $\mathcal{X}$ e um ponto x no fecho de A, existe um sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ de elementos de A que converge para x.

Como veremos na Proposição B.9, o fato que os compactos de Eberlein são espaços de Fréchet segue da enumerabilidade do tightness da topologia fraca nos espaços de Banach. Recorde que se $\mathcal{X}$ é um espaço topológico, então o *tightness* de $\mathcal{X}$ é o menor cardinal infinito κ para o qual a seguinte condição vale: Dados um subconjunto A de $\mathcal{X}$ um ponto x no fecho de A, existe um subconjunto B de A com $|B| \leq \kappa$ e tal que x pertence ao fecho de B. No próximo lema, vamos mostrar que todo espaço de Banach tem tightness enumerável, quando munido da topologia fraca.

LEMA B.7. *Se X é um espaço de Banach, então (X, w) tem tightness enumerável.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam A um subconjunto de X e x um ponto de $\overline{A}^w$ e vamos mostrar que existe um subconjunto enumerável B de A tal que $x \in \overline{B}^w$. Fixe $\varepsilon > 0$, $k \geq 1$ e para cada $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in B_{X^*}^k$, defina a seguinte vizinhança aberta de x na topologia fraca:

$$V^{\varepsilon}_{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)} = \{y \in X : |\alpha_i(y - x)| < \varepsilon, i = 1, \dots, k\},$$

onde $B_{X^*}^k$ denota o produto cartesiano de k cópias de B_{X^*}. Além disso, dado $p \in X$, considere o subconjunto U_p de $B_{X^*}^k$ definido como:

$$U_p = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in B_{X^*}^k : p \in V^{\varepsilon}_{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)}\}.$$

Note que se $(B_{X^*}, w^*)^k$ denota o produto cartesiano de k cópias do espaço (B_{X^*}, w^*), munido da topologia produto, então cada U_p é um subconjunto aberto de $(B_{X^*}, w^*)^k$. De fato, fixado $p \in X$, defina a seguinte vizinhança fraca*-aberta da origem em B_{X^*}:

$$W_p = \{\alpha \in B_{X^*} : |\alpha(x - p)| < \varepsilon\}$$

e note que U_p é o produto de k cópias de W_p. Por outro lado, se $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ é um elemento de $B_{X^*}^k$, então do fato de x pertencer ao fecho de A na topologia fraca segue que $A \cap V^{\varepsilon}_{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)}$ é um conjunto não vazio. Logo, para cada $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ em $B_{X^*}^k$, podemos escolher um elemento $p^{\varepsilon}_{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)}$ nessa intersecção. Dessa forma, temos que a seguinte coleção é uma cobertura aberta de $(B_{X^*}, w^*)^k$:

$$\{U_{p^{\varepsilon}_{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)}} : (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in B_{X^*}^k\}.$$

Portanto, segue da compacidade de $(B_{X^*}, w^*)^k$ que existe um subconjunto finito $F_{k,\varepsilon}$ de $B_{X^*}^k$ tal que $\{U_{p^{\varepsilon}_{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)}} : (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in F_{k,\varepsilon}\}$ continua sendo uma cobertura de $(B_{X^*}, w^*)^k$. Finalmente, para concluir o resultado, defina o subconjunto enumerável B de A como:

$$B = \bigcup_{n \geq 1} \{p^{\varepsilon}_{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)} : \varepsilon = 1/n, k \geq 1, \text{ e } (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in F_{k,\varepsilon}\}$$

e note que x pertence ao fecho de B na topologia fraca de X. □

Finalmente, vamos apresentar a Proposição B.9. Na prova das Proposições B.9 e B.10, usaremos o seguinte resultado.

LEMA B.8. *Sejam X um espaço de Banach, K um subconjunto fracamente compacto de X e B um subconjunto enumerável de K. Se definirmos o subespaço fechado e separável Y de X como $Y = \overline{\text{span}} B$, então $Y \cap K$ será um espaço metrizável, se munido da topologia induzida da topologia fraca de X.*

DEMONSTRAÇÃO. Inicialmente, note que o Teorema de Hahn–Banach implica que se X e Y são espaços de Banach arbitrários com Y um subespaço de X, então a topologia fraca de Y coincide com a topologia induzida em Y pela topologia fraca de X. Denote por τ a topologia induzida em K pela topologia fraca de X e observe que do fato de Y ser um subconjunto fechado de (X, w) segue que $Y \cap K$ é fechado em (K, τ) e portanto, temos que $Y \cap K$ é compacto, se munido da topologia induzida de τ. Além disso, usando nossa observação inicial, concluímos que a topologia induzida por τ em $Y \cap K$ coincide com a topologia induzida em $Y \cap K$ pela topologia fraca de Y. Dessa forma, vale que $Y \cap K$ é um espaço compacto, se munido da topologia induzida pela topologia fraca de Y. Finalmente, o resultado segue do fato que todo subconjunto fracamente compacto de um espaço de Banach separável é metrizável, se munido da topologia fraca ([**9**, Proposition 3.29]). □

PROPOSIÇÃO B.9. *Todo compacto de Eberlein é um espaço de Fréchet.*

DEMONSTRAÇÃO. Note que basta mostrarmos que se K é um subconjunto fracamente compacto de um espaço de Banach X, então K é um espaço de Fréchet, se munido da topologia induzida de (X, w). Denote por τ a topologia de subespaço de K, com respeito a (X, w), e considere um subconjunto A de K e um ponto x no fecho de A com respeito à topologia τ. Como K é um subconjunto fechado de (X, w) e A está contido em K, temos que o fecho de A com respeito à τ coincide com o fecho fraco de A. Logo, o Lema B.7 garante que existe um subconjunto enumerável B de A tal que x pertence ao fecho fraco de B e portanto, x pertence ao fecho de B com respeito a τ. Note que nossa conclusão segue se mostrarmos que $\overline{B}^{\tau}$ é um espaço metrizável, se munido da topologia induzida por τ, onde $\overline{B}^{\tau}$ denota o fecho de B com respeito à topologia τ. Defina o subespaço fechado e separável Y de X como $Y = \overline{span B}$ e note que:

$$\overline{B}^{\tau} = \overline{B}^{w} \subset Y \cap K \subset K. \tag{B.2}$$

Assim, usando o Lema B.8, concluímos que o espaço $Y \cap K$ é metrizável, se munido da topologia induzida por τ e portanto, nosso resultado segue da equação (B.2). □

Terminamos esse apêndice, investigando a relação entre os compactos de Eberlein e uma outra classe de espaços compactos relevante para esse trabalho. Recorde que como discutido na Seção 1.2, dizemos que um espaço compacto Hausdorff K é $\aleph_0$-*monolítico* se, e somente se, todo subconjunto separável de K possui uma base enumerável de abertos. Note que um espaço compacto Hausdorff é $\aleph_0$-monolítico se, e somente se, o fecho de todo subconjunto enumerável é metrizável. Na Proposição B.10 abaixo, veremos que a classe dos compactos $\aleph_0$-monolíticos contém a classe dos compactos de Eberlein e na Proposição B.11, veremos que essa inclusão é própria, ou seja, existem espaços compactos $\aleph_0$-monolíticos que não são compactos de Eberlein.

PROPOSIÇÃO B.10. *Todo compacto de Eberlein é $\aleph_0$-monolítico.*

DEMONSTRAÇÃO. Note que basta mostrarmos que se K é um subconjunto fracamente compacto de um espaço de Banach X, então K é $\aleph_0$-monolítico, se munido da topologia induzida pela topologia fraca de X. Denote por τ a topologia de subespaço de K, com respeito a (X, w), e seja $\{x_n : n \geq 1\}$ um subconjunto enumerável de K. Devemos mostrar que se $F = \overline{\{x_n : n \geq 1\}}^{\tau}$, então F é metrizável, se munido da topologia induzida por τ. Analogamente ao discutido na prova da Proposição B.9, temos que F coincide com $\overline{\{x_n : n \geq 1\}}^{w}$. Portanto, se Y é o subespaço fechado e separável de X definido como $Y = \overline{span}\{x_n : n \geq 1\}$, então vale que:

$$F \subset Y \cap K \subset K. \tag{B.3}$$

Assim, usando o Lema B.8, concluímos que o espaço $Y \cap K$ é metrizável, se munido da topologia induzida por τ e portanto, nosso resultado segue da equação (B.3). $\square$

PROPOSIÇÃO B.11. *Existem compactos $\aleph_0$-monolíticos que não são compactos de Eberlein.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja α um ordinal, é facilmente mostrado, por indução em α, que o fecho de um subconjunto enumerável de $[0, \alpha]$ é enumerável e portanto, $[0, \alpha]$ é $\aleph_0$-monolítico. No entanto, note que se α é um ordinal não enumerável, então o espaço $[0, \alpha]$ não é um espaço de Fréchet. Dessa forma, a Proposição B.9 garante que $[0, \alpha]$ não é um compacto de Eberlein, para $\alpha \geq \omega_1$. $\square$

APÊNDICE C

O Axioma de Martin

O Axioma de Martin é um princípio combinatório relativamente consistente com os axiomas de ZFC ([**19**, pg. 278]). O objetivo desse apêndice é apresentar o enunciado desse axioma e provar a Proposição C.7, que usamos no Capítulo 3, para estabelecer que uma certa questão envolvendo a propriedade da c_0-extensão é independente dos axiomas de ZFC. Como o Axioma de Martin fala sobre a existência de filtros com propriedades interessantes nas ordens parciais que possuem a ccc, inicialmente, vamos recordar alguns conceitos sobre conjuntos parcialmente ordenados. Ao longo desse apêndice, $(\mathbb{P}, \leq)$ sempre denotará uma ordem parcial, i.e., um conjunto $\mathbb{P}$ munido de uma relação binária $\leq$, que é uma ordem parcial em $\mathbb{P}$.

Definição C.1. Dados elementos p e q de $\mathbb{P}$, dizemos que p e q são *compatíveis* se, e somente se, existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p$ e $r \leq q$. Se p e q não são compatíveis, então dizemos que eles são *incompatíveis*.

Definição C.2. Um subconjunto A de $\mathbb{P}$ é dito uma *anticadeia* em $\mathbb{P}$ se, e somente se, quaisquer dois elementos distintos de A são incompatíveis. Se toda anticadeia de $\mathbb{P}$ é enumerável, então dizemos que a ordem parcial $(\mathbb{P}, \leq)$ tem a *countable chain condition* (abreviadamente ccc).

Definição C.3. Um subconjunto D de $\mathbb{P}$ é dito *denso* em $\mathbb{P}$ se, e somente se, dado qualquer elemento $p \in \mathbb{P}$, existe $q \in D$ tal que $q \leq p$.

Definição C.4. Um subconjunto G de $\mathbb{P}$ é dito um *filtro* em $\mathbb{P}$ se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

(i) Se $p, q \in G$, então existe $r \in G$ tal que $r \leq p$ e $r \leq q$;
(ii) Se $p \in G$ e $q \in \mathbb{P}$ satisfaz $p \leq q$, então $q \in G$.

Agora, podemos enunciar o Axioma de Martin (MA). Inicialmente, vamos enunciar MA(κ), onde κ é um cardinal.

Enunciado de MA(κ): Sejam $(\mathbb{P}, \leq)$ uma ordem parcial não vazia e $\mathfrak{D}$ uma família de subconjuntos densos em $\mathbb{P}$, com $|\mathfrak{D}| \leq \kappa$. Se $(\mathbb{P}, \leq)$ tem a ccc, então existe um filtro em $\mathbb{P}$ que intersecta todos os elementos de $\mathfrak{D}$.

Enunciado do Axioma de Martin (MA): Vale MA(κ), para $\kappa < 2^\omega$.

Note que enquanto MA(ω) é um teorema de ZFC, temos que MA(2^ω) é falso ([**19**, Lemma 2.6]). Portanto, na presença da Hipótese do contínuo, o Axioma de Martin não acrescenta nada ao sistema ZFC. Dessa forma, em geral, trabalha-se assumindo o Axioma de Martin e a negação da Hipótese do contínuo. Como dito no início desse apêndice, nosso objetivo é apresentar a prova da Proposição C.7 que diz que fixado um cardinal κ, se assumirmos

MA(κ), então todo subconjunto de ω^ω com cardinalidade menor ou igual a κ está contido num subconjunto σ-compacto de ω^ω. É claro, que estamos considerando o espaço ω^ω munido da topologia produto. Como veremos a seguir, obteremos a Proposição C.7 como um corolário do Lema C.5, sendo que toda a parte combinatória da prova dessa proposição está contida no Lema C.5. Note que o Lema C.5 garante que dado um cardinal κ, se assumirmos MA(κ), então todo subconjunto com cardinalidade menor ou igual a κ de ω^ω é limitado superiormente, com respeito a uma determinada pré-ordem parcial em ω^ω. Bem, é claro que a ordem parcial mais natural que podemos definir em ω^ω é a ordem produto, i.e., dadas funções $f, g : \omega \to \omega$, dizemos que $f \leq g$ se, e somente se:

$$f(n) \leq g(n), \tag{C.1}$$

para todo $n \in \omega$. A pré-ordem parcial $\leq^*$ com a qual vamos trabalhar é parecida com a ordem produto de ω^ω, só que para concluir que $f \leq^* g$, exigimos que a condição (C.1) ocorra não para todo n em ω, mas para todo n fora de um subconjunto finito de ω. Mais precisamente, dadas funções $f, g : \omega \to \omega$, dizemos que $f \leq^* g$ se, e somente se, o conjunto

$$\{n \in \omega : g(n) < f(n)\}$$

é finito. Note que a relação binária $\leq^*$ definida acima é uma pré-ordem parcial em ω^ω. Recorde que dados um conjunto X e uma relação binária em X, dizemos que essa relação é uma *pré-ordem* em X se, e somente se, ela é reflexiva e transitiva. Além disso, dizemos que um subconjunto M de X é *limitado superiormente*, com respeito a essa pré-ordem, se M possui uma cota superior em X, com respeito a essa pré-ordem. A seguir, apresentamos a demonstração do Lema C.5.

LEMA C.5. *Assuma MA(κ). Todo subconjunto M de ω^ω com $|M| \leq \kappa$ é limitado superiormente, com respeito à pré-ordem $\leq^*$.*

DEMONSTRAÇÃO. É claro que se κ é finito, então M é um subconjunto limitado superiormente de ω^ω, relativamente a $\leq^*$. Dessa forma, no que segue, assumiremos que κ é um cardinal infinito. Considere a seguinte ordem parcial:

$$\mathbb{P} = \{(f, F) : F \subset M,\ |F| < \omega \text{ e } f : dom(f) \subset \omega \to \omega,\quad |dom(f)| < \omega\}$$

e declare que $(f_1, F_1) \preceq (f_2, F_2)$ se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

(i) $f_2 \subset f_1$ e $F_2 \subset F_1$;
(ii) Se $n \in dom(f_1) \setminus dom(f_2)$, então $f_1(n) \geq g(n)$, para toda função $g \in F_2$.

Inicialmente, note que $(\mathbb{P}, \preceq)$ é de fato uma ordem parcial. Afirmamos que essa ordem parcial tem a ccc. De fato, suponha, por absurdo, que a coleção $\{(f_\alpha, F_\alpha) : \alpha \in \omega_1\}$ seja uma anticadeia em $\mathbb{P}$. Como a coleção das funções definidas em subconjuntos finitos de ω e tomando valores em ω é enumerável, temos que existem uma função $f : dom(f) \subset \omega \to \omega$ tal que $dom(f)$ é finito e um subconjunto A de ω_1 tal que $|A| = \omega_1$ e $f_\alpha = f$, para todo $\alpha \in A$. Portanto, se α e β são dois elementos distintos de A, então (f_α, F_α) e (f_β, F_β) são compatíveis, já que $(f, F_\alpha \cup F_\beta)$ pertence a $\mathbb{P}$, $(f, F_\alpha \cup F_\beta) \preceq (f_\alpha, F_\alpha)$ e $(f, F_\alpha \cup F_\beta) \preceq (f_\beta, F_\beta)$. No entanto, isso contradiz a hipótese de que $\{(f_\alpha, F_\alpha) : \alpha \in \omega_1\}$ é uma anticadeia e assim, concluímos que $\mathbb{P}$ tem a ccc. Agora, vamos construir uma família de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$. Para cada $n \in \omega$, defina o conjunto $D_n = \{(f, F) \in \mathbb{P} : n \in dom(f)\}$ e note que D_n é um subconjunto denso de $\mathbb{P}$. De fato, dado um elemento (h, H) de $\mathbb{P}$ que não pertence a D_n, defina a função $f : dom(h) \cup \{n\} \to \omega$ como $f|_{dom(h)} = h$ e $f(n) = \max\{g(n) : g \in H\}$. Assim, vale que (f, H) pertence a D_n e $(f, H) \preceq (h, H)$, o que estabelece a densidade de D_n. Por outro lado, fixado $h \in M$, defina o conjunto $D_h = \{(f, F) \in \mathbb{P} : h \in F\}$ e note que cada D_h também é denso em $\mathbb{P}$. De fato, fixado $h \in M$, para ver que D_h é um subconjunto denso de $\mathbb{P}$, basta notar que se (g, G) é um elemento de $\mathbb{P}$, então $(g, G \cup \{h\})$ pertence a D_h e satisfaz $(g, G \cup \{h\}) \preceq (g, G)$. Dessa forma, como κ é um cardinal infinito, a família

$$\mathfrak{D} = \{D_n : n \in \omega\} \cup \{D_h : h \in M\}$$

de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ tem cardinalidade menor ou igual a κ e portanto, segue de MA(κ) que existe um filtro G em $\mathbb{P}$ tal que G intersecta todos os elementos de $\mathfrak{D}$. Finalmente, defina o seguinte subconjunto de $\omega \times \omega$:

$$g = \cup\{f : (f, F) \in G\}$$

e vamos mostrar que g é uma cota superior de M em ω^ω, com respeito à pré-ordem $\leq^*$. Note que do fato de G ser um filtro vem que g é uma função. Além disso, como $G \cap D_n \neq \emptyset$, para todo $n \in \omega$, temos que $dom(g) = \omega$. Logo, para concluir a prova, basta mostrarmos que $h \leq^* g$, $\forall h \in M$. Fixe $h \in M$ e tome $(f_1, F_1) \in D_h \cap G$. Note que para estabelecermos que $h \leq^* g$, basta verificarmos que para todo $n \in \omega \setminus dom(f_1)$, vale que $g(n) \geq h(n)$. Considere $n \in \omega \setminus dom(f_1)$ e tome $(f_2, F_2) \in D_n \cap G$. Sabemos que existe $(f_3, F_3) \in G$ tal que $(f_3, F_3) \preceq (f_1, F_1)$ e $(f_3, F_3) \preceq (f_2, F_2)$. Portanto, vale que $n \in dom(f_3)$ e $f_3(n) \geq h(n)$. A conclusão segue do fato que a função g é uma extensão de f_3. □

Finalmente, para podermos obter a Proposição C.7 à partir do Lema C.5 acima, precisamos entender a relação entre os subconjuntos limitados superiormente de ω^ω, com respeito à pré-ordem $\leq^*$, e os subconjuntos σ-compactos de ω^ω. Note que os subconjuntos limitados superiormente, com respeito à ordem produto de ω^ω, coincidem com os subconjuntos relativamente compactos de ω^ω. No próximo lema, veremos que os subconjuntos de ω^ω que estão contidos em subconjuntos σ-compactos de ω^ω coincidem com os subconjuntos limitados superiormente de ω^ω, com respeito a $\leq^*$ e portanto, a Proposição C.7 seguirá diretamente dos Lemas C.5 e C.6.

Lema C.6. *Um subconjunto M de ω^ω está contido num subconjunto σ-compacto de ω^ω se, e somente se, M é limitado superiormente, com respeito à pré-ordem $\leq^*$.*

Demonstração. Suponha que M esteja contido num subconjunto σ-compacto de ω^ω, ou seja, $M \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, onde cada K_n é um compacto de ω^ω. Sem perda de generalidade, podemos escrever $K_n = \{f \in \omega^\omega : f \leq g_n\}$, onde $g_n \in \omega^\omega$, para todo $n \in \omega$. Defina um elemento g de ω^ω, declarando que $g(n) = \max\{g_1(n), \ldots, g_n(n)\}$, para todo $n \in \omega$. A conclusão segue do fato que $f \leq^* g$, para toda $f \in M$. Reciprocamente, suponha que exista $g \in \omega^\omega$ tal que $f \leq^* g$, para toda $f \in M$. Para cada $(n, m) \in \omega \times \omega$, defina o conjunto:

$$K_{n,m} = \{f \in \omega^\omega : f(i) \leq m, \text{ para } i < n \text{ e } f(i) \leq g(i), \text{ para } i \geq n\}.$$

Claramente, cada $K_{n,m}$ é compacto e $M \subset \bigcup_{n,m \in \omega} K_{n,m}$. □

Proposição C.7. *Assuma MA(κ). Todo subconjunto M de ω^ω com $|M| \leq \kappa$ está contido num subconjunto σ-compacto de ω^ω.*

Demonstração. A conclusão segue diretamente dos Lemas C.6 e C.5. □

Referências Bibliográficas

[1] S. A. Argyros & A. D. Arvanitakis, A characterization of regular averaging operators and its consequences, *Studia Math.*, **151** (2002), no. 3, 207—226.

[2] S. A. Argyros, J. F. Castillo, A. S. Granero, M. Jiménez & J. P. Moreno, Complementation and embeddings of $c_0(I)$ in Banach spaces, *Proc. London. Math. Soc.*, 85 (3), 2002, pgs. 742—768.

[3] Y. Benyamini, M. E. Rudin & M. Wage, Continuous images of weakly compact subsets of Banach spaces, *Pacific J. Math.* 70 (2), 1977, pgs. 309—324.

[4] C. Correa & D. V. Tausk, Compact lines and the Sobczyk property, *J. Functional Analysis*, 266, 2014, pgs. 5765—5778.

[5] C. Correa & D. V. Tausk, Extension property and complementation of isometric copies of continuous functions spaces, http://arxiv.org/abs/1302.4661, 2013.

[6] C. Correa & D. V. Tausk, On extensions of c_0-valued operators, *J. Math. Anal. Appl.* 405, 2013, pgs. 400—408.

[7] C. Correa & D. V. Tausk, On the c_0-extension property for compact lines, http://arxiv.org/abs/1403.0605, 2014.

[8] S. Z. Ditor, Averaging operators in $C(S)$ and lower semicontinuous sections of continuous maps, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **175** (1973), 195—208.

[9] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, J. Pelant, & V. Zizler, *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*, CMS Books in Math., Springer, Nova Yorque, 2001.

[10] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, & V. Zizler, *Banach Space Theory: The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*, CMS Books in Math., Springer, Nova Yorque, 2011.

[11] G. Godefroy, *review* do artigo [**23**], MR1245820.

[12] R. Hodel, Cardinal functions I, Handbook of set theoretic–topology, North–Holand, 1983.

[13] O. Kalenda & W. Kubiś, Complementation in spaces of continuous functions on compact lines, *J. Math. Anal. Appl.* 386, 2012, pgs. 241—257.

[14] O. Kalenda & W. Kubiś, The structure of Valdivia compact lines, *Topology Appl.* 157, 2010, pgs. 1142—1151.

[15] A. S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Graduate Texts in Mathematics 156, Springer–Verlag, 1995.

[16] P. Koszmider, The interplay between compact spaces and the Banach spaces of their continuous functions, em *Open problems in topology*, Vol. 2, Elsevier, 2007.

[17] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis With Applications*, John Wiley & Sons, 1978.

[18] W. Kubiś, Linearly ordered compacta and Banach spaces with a projectional resolution of the identity, *Topology Appl.* 154 (3), 2007, pgs. 749—757.

[19] K. Kunen, *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*, Studies in Logic and the Found. of Math. 102, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1980.

[20] K. Kuratowski, *Topology – Volume I*, Academic Press Inc., 1966.

[21] G. Lancien, A survey on the Szlenk index and some of its applications, *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Mat. RACSAM* 100 (1–2), 2006, pgs. 209—235.

[22] D. A. Martin & J. R. Steel, A proof of projective determinacy, *J. Amer. Math. Soc.* 2 (1), 1989, pgs. 71—125.

[23] W. M. Patterson, Complemented c_0-subspaces of a non-separable $C(K)$-space, *Canad. Math. Bull.* 36 (3), 1993, pgs. 351—357.

[24] A. Pełczyński, Linear extensions, linear averagings, and their applications to linear topological classification of spaces of continuous functions, *Diss. Math.*, **58** (1968).

[25] R. S. Phillips, On linear transformations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 48, 1940, pgs. 516—541.

[26] H. P. Rosenthal, The heredity problem for weakly compactly generated Banach spaces, *Comp. Math.* 28, 1974, pgs. 83—111.

[27] H. L. Royden, *Real Analysis*, Segunda Edição, The Macmillan Company.

[28] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill series in higher math., McGraw-Hill, 1987.

[29] J. A. Seebach & L. A. Steen, *Counterexamples in topology*, Springer–Verlag, Segunda edição, 1978.

[30] A. Sobczyk, Projection of the space (m) on its subspace (c_0), *Bull. Amer. Math. Soc.* 47, 1941, pgs. 938—947.

[31] M. Valdivia, On certain compact topological spaces, *Revista Matemática de la Universidad Complutense de Madrid* 10 (1), 1997, pgs. 81—84.

[32] M. Valdivia, Projective resolution of identity in $C(K)$ spaces, *Arch. Math.* 54, 1990, pgs. 493—498.

[33] W. A. Veech, Short proof of Sobczyk's Theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.* 28, 1971, pgs. 627—628.

[34] S. Willard, *General Topology*, Dover Publications, 2004.