

Definição de Equalizabilidade a Partir de um Limitante Inferior para o Critério do Módulo Constante

Denis G. Fantinato¹, Celso de Sousa Júnior¹, Romis Attux¹, Ricardo Suyama², Aline Neves Panazio², João Marcos T. Romano¹

1 – Laboratório de Processamento de Sinais para Comunicações (DSPCom) – FEEC / UNICAMP

2 – Centro de Engenharia, Modelagem e Ciências Sociais Aplicadas / UFABC

{denisgf, attux}@dca.fee.unicamp.br, celso_de_sousa_junior@yahoo.com.br,
{ricardo.suyama, aline.panazio}@ufabc.edu.br, romano@dmo.fee.unicamp.br

Resumo – Neste trabalho, será feita uma proposta de definição de equalizabilidade de um sistema composto de canal e equalizador a partir do uso de um limitante inferior para o critério do módulo constante (CM, do inglês *constant modulus*) recentemente proposto [1]. A conexão teórica entre equalizabilidade e a estrutura da função custo CM será discutida e avaliada para diferentes configurações de canal, sempre tendo como base uma comparação de desempenho com as melhores soluções de Wiener passíveis de obtenção por meio da adequada escolha do atraso de equalização. Também será analisada a aplicabilidade prática dessa medida, a qual parece expressiva tendo em vista sua estimação em forma fechada, de maneira plenamente não-supervisionada e a partir, exclusivamente, do perfil de estatísticas de ordem superior do sinal recebido.

Keywords: *blind equalization, constant modulus criterion, CMA, equalizability.*

1. Introdução

O problema de equalização cega ocupa um lugar de destaque na moderna teoria de processamento adaptativo de sinais, o que se explica à luz de seu caráter paradigmático no que se refere à inversão, no domínio do tempo, de sistemas com parâmetros desconhecidos [2]. Há muitas aplicações que se encaixam nesse molde, dentre as quais podem ser mencionadas, a título de exemplo, aquelas ligadas a cancelamento de eco, mineração de dados geofísicos e comunicação digital.

Uma das estratégias mais utilizadas para lidar com o problema supracitado se baseia no critério do módulo constante (CM, do inglês *constant modulus*), que quantifica o grau de dispersão do sinal de saída do equalizador $y(n)$ em relação a uma constante R_2 , que, para sinais reais, é uma razão entre o quarto momento e o segundo momento do sinal transmitido $s(n)$ [3].

O critério CM e o algoritmo a ele associado, o CMA (do inglês *constant modulus algorithm*), foram objeto de diversos estudos ao longo das três últimas décadas. Dentre os principais resultados dessas análises, ressaltamos as conexões com o critério de Shalvi-Weinstein – um ponto de contato de grande importância do ponto de vista de unificação de abordagens cegas e também do estabelecimento de pontos de contato com a teoria de separação cega de fontes – e também com o critério de Wiener [2].

As conexões com o critério de Wiener, em particular, dão azo a uma conjectura que permeia este trabalho como um todo: para canais “não-patológicos”, espera-se que haja certa proximidade entre os mínimos do critério CM e as melhores soluções de Wiener (levando-se em conta diferentes atrasos). Seguindo essa linha de raciocínio, obter um panorama geral de desempenho atingível por meio do critério CM corresponderia a formar uma ideia satisfatória do nível de erro quadrático médio atingível com supervisão.

Em 2011, foi reportada a obtenção de um limitante inferior para a função custo CM [1]. Tendo em vista a conjectura exposta, parece natural utilizar esse limitante para verificar o nível de erro quadrático médio atingível para certa configuração canal + equalizador. Se isso se mostrar sólido, ter-se-á uma métrica bastante interessante, definida apenas pela estrutura estatística do sinal recebido, para se averiguar a perspectiva de adequada inversão de um sistema desconhecido por um filtro linear de determinada ordem. É exatamente isso que buscaremos investigar neste artigo.

2. Limitante Inferior para o Critério CM e Definição de Equalizabilidade

A função custo do critério CM pode ser definida como:

$$J_{CM}(\mathbf{w}) = E\left[\left(y^2(n) - R_2\right)^2\right] \quad (1)$$

sendo $R_2 = E[|s(n)|^4]/E[|s(n)|^2]$. Assumir-se-á que o equalizador é um filtro linear de resposta ao impulso finita (FIR, do inglês *finite impulse response*), ou seja, $y(n) = \mathbf{w}^T \mathbf{x}(n)$, sendo $\mathbf{x}(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-N+1)]^T$ seu vetor de entrada e \mathbf{w} o vetor com seus N parâmetros livres. Supondo que se lide apenas com valores reais, e que, ademais, o sinal transmitido possua módulo unitário, é possível interpretar (1) como sendo uma função de erro quadrático médio entre um sinal desejado $d(n) = 1$ e um filtro de Volterra com saída $v(n) = y^2(n)$. Esse filtro polinomial possui caráter quadrático por definição, e seus parâmetros estão sujeitos à restrição imposta pelos valores contidos em \mathbf{w} . Entretanto, pode-se obter um limitante inferior para (1) caso se relaxe essa restrição, tomando os parâmetros do filtro polinomial de maneira plenamente “livre”. Nesse caso, ter-se-á uma expressão do seguinte tipo o custo CM, denominando $v_r(n)$ a saída da versão relaxada:

$$J_{LI}(\mathbf{w}) = E\left[\left(v_r(n) - 1\right)^2\right] \quad (2)$$

Para se obter a solução de Wiener, é preciso calcular, no contexto de (2), a matriz de autocorrelação \mathbf{R} e o vetor de correlação cruzada \mathbf{p} com $d(n) = 1$. Por questões de espaço, não mostraremos essas expressões aqui: pedimos ao leitor interessado que as consulte em [1] – contentar-nos-emos em afirmar que ambas as grandezas dependem de estatísticas de ordem dois a ordem quatro de $x(n)$ e suas versões atrasadas. Tendo tudo isso em vista, obtém-se o limitante diretamente a partir da teoria de Wiener [2]:

$$J_{CM}(\mathbf{w}) \geq 1 - \mathbf{p}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p} \quad (3)$$

2.1. Equalizabilidade

Definiremos *equalizabilidade* de certo canal como sendo, fundamentalmente, uma expressão do quanto este se presta à inversão por um equalizador FIR de determinada ordem. Em outras palavras, equalizabilidade diz respeito ao desempenho atingível na desconvolução de um canal por determinada estrutura de filtragem.

Uma forma de captar numericamente esse conceito é averiguar o mínimo erro quadrático médio atingível para certa configuração canal + equalizador, levando-se em conta todos os possíveis atrasos. Buscaremos analisar a seguir se o limitante inferior proposto em [1] poderia prover essa estimativa de modo não-supervisionado, indicando, exclusivamente por meio da análise do sinal recebido, o grau de sucesso que se pode esperar do uso de uma estrutura FIR no papel de equalizador.

3. Resultados

Primeiramente, discutiremos dois ensaios reportados em [1] a partir de uma perspectiva de equalizabilidade. O cenário em questão diz respeito a dois casos: a) um canal com dois coeficientes (parametrizado em termos de um único valor α) e b) um canal com três coeficientes (parametrizado em termos de dois valores - α e β). Em ambos os casos, assume-se que o equalizador possui a mesma ordem do canal. A Fig. 1 apresenta os valores obtidos para o limitante, para o mínimo custo CM e para o mínimo custo de Wiener em todas as possíveis configurações. Nota-se, em todos os casos, uma significativa proximidade entre o perfil do limitante e o do menor erro de Wiener, o que indica que, nesse caso, o primeiro atuou adequadamente como uma medida de equalizabilidade.

Como segundo teste, foram gerados aleatoriamente 500 canais de 4 coeficientes e, para equalizadores de mesma ordem, foram calculados, para cada caso, os valores do custo do limitante e dos custos CM e de Wiener. O histograma mostrado na Fig. 2 apresenta a frequência dos valores das diferenças entre os custos dos dois critérios e o custo associado ao limitante. É bastante nítido, mais uma vez, que o limitante se mostra sólido do ponto de vista de quantificação de equalizabilidade.

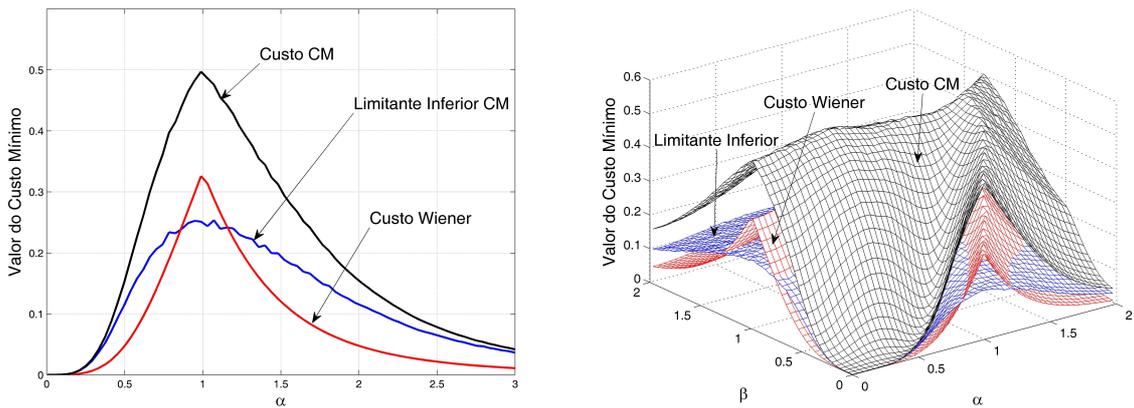


Figura 1: Relações entre o limitante proposto e os dois critérios (CM e Wiener).

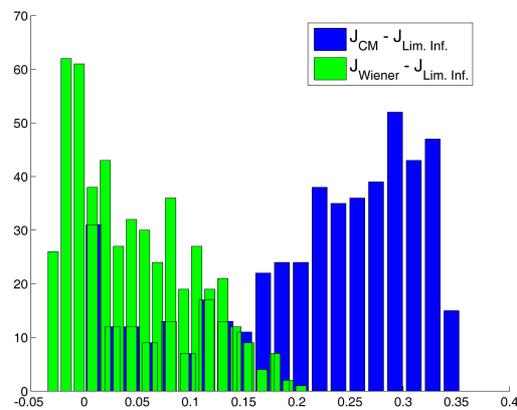


Figura 2: Histograma de diferenças – limitante, CM e Wiener.

4. Conclusões

Neste trabalho, utilizamos um limitante inferior para o critério CM como uma métrica para estimar, a partir da estrutura de estatísticas de ordem dois a ordem quatro do sinal recebido, o grau de potencial eficiência de um equalizador FIR de certa ordem no contexto de um canal de comunicação com parâmetros desconhecidos. Os resultados mostraram que, para os casos avaliados, o limitante se mostrou bastante adequado como parâmetro de quantificação de equalizabilidade. Como perspectivas futuras, apontamos a realização de testes mais extensivos e também a derivação do limitante para o caso complexo. Caso a solidez da ideia se confirme, ter-se-á em mãos um indicador muito interessante para aplicação prática em comunicação digital e separação cega de fontes.

Agradecimentos

Agradecemos à CAPES e ao CNPq o apoio financeiro.

Referências

- [1] C. de Sousa Jr., *Análise de Estabilidade de Lyapunov de Algoritmos Adaptativos com Contribuições ao Estudo do Critério do Módulo Constante*, Tese de Doutorado, UNICAMP, 2011.
- [2] J. M. T. Romano, R. Attux, C. C. Cavalcante, R. Suyama, *Unsupervised Signal Processing: Channel Equalization and Source Separation*, CRC Press, 2010.
- [3] D. Godard, *Self-Recovering Equalization and Carrier Tracking in Two-Dimensional Data Communication Systems*, IEEE Transactions of Communications, Vol. 28, No. 11, pp. 1867-1875, 1980.