

Desconvolução Preditiva: Para Além do que se Previu

João M. T. Romano, Romis Attux, Rafael Ferrari, Ricardo Suyama, Kenji Nose-Filho, Denis Fantinato e Michele Costa

Introdução: O problema de predição pode ser definido, em termos simples, como o de obter estimativas de valores futuros de um sinal a partir de seus valores já observados. De maneira mais rigorosa e concreta, o problema tipicamente é formulado em termos do ajuste ótimo de um modelo de predição – ou preditor

$$y(n) = F[x(n), \dots, x(n - N + 1), \dots, y(n - 1), \dots, y(n - M), w]$$

de modo que a saída $y(n)$ seja tão próxima quanto possível de $x(n + p)$, sendo $p > 0$ o horizonte de predição associado. Esse ajuste é feito em termos de um conjunto w de parâmetros livres.

Classicamente, utiliza-se como critério de avaliação de proximidade o erro quadrático médio (EQM) entre $y(n)$ e $x(n + p)$:

$$J(w) = E[x(n + p) - y(n)]^2$$

Caso se suponha que o preditor é um filtro com resposta ao impulso finita (FIR, do inglês finite impulse response), ou seja

$$y(n) = w^T x(n)$$

onde $x(n) = [x(n), \dots, x(n - N + 1)]^T$, a solução que minimiza o EQM é pela solução das equações de Yule-Walker:

$$W_0 = R^{-r},$$

onde $r = []$.

Uma propriedade importante da solução fornecida pelas equações de Yule-Walker para o caso canônico com $p = 1$ é que o filtro de erro de predição (FEP) resultante é sempre de fase mínima i.e. possui todos os zeros dentro do círculo de raio unitário (CRU). Caso se lide com retropredição para horizonte unitário, ou seja, caso se busque estimar $x(n - N)$, o FEP resultante será de fase máxima i.e. terá todos seus zeros dentro do CRU.

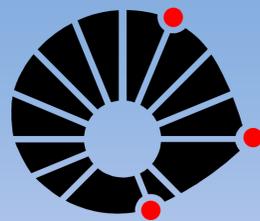
Desconvolução preditiva: Uma propriedade importante de FEPs projetados segundo a formulação quadrática de Yule-Walker é que eles são filtros branqueadores, ou seja, filtros que, no âmbito de seus limites estruturais, tendem a produzir um erro de predição com perfil de autocorrelação com perfil impulsivo.

Essa propriedade levanta, a princípio, a possibilidade de que FEPs sejam usados em tarefas de desconvolução. O processo de desconvolução pode ser visto como um processo de recuperação de um sinal a partir de uma superposição de amostras suas correspondentes a diferentes atrasos. Matematicamente, dado um sinal recebido $x(n)$ da forma:

$$x(n) = h(n) * s(n)$$

onde $h(n)$ é a resposta ao impulso do sistema que provoca o espalhamento temporal e $s(n)$ é o sinal de interesse, busca projetar um filtro de desconvolução (ou equalizador) que proveja uma estimativa confiável de $s(n)$ (a menos de um atraso e de distorção de escala).

Uma hipótese clássica acerca de $s(n)$ é a de que suas amostras são mutuamente independentes. Dessa forma, pode-se contemplar a possibilidade de empregar um FEP como equalizador, já que independência implica descorrelação. No entanto, as restrições estruturais mencionadas (fase mínima e fase máxima) limitam a aplicabilidade da proposta esboçada.



UNICAMP

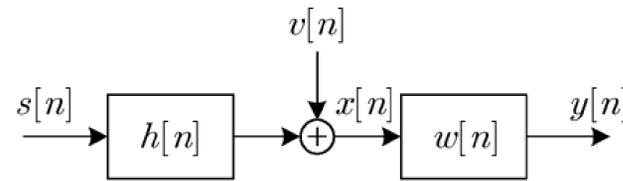


DSPCom

Desconvolução Preditiva: Para Além do que se Previu

João M. T. Romano, Romis Attux, Rafael Ferrari, Ricardo Suyama, Kenji Nose-Filho, Denis Fantinato e Michele Costa

Equalização Preditiva de Canais SISO



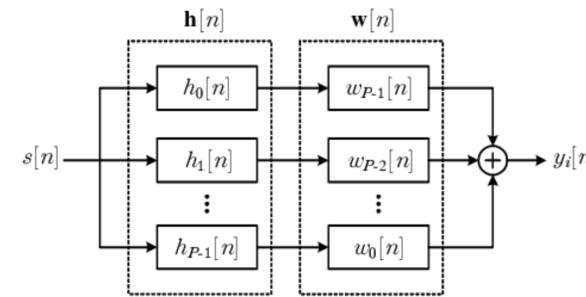
Condição ZF: $w(z)h(z) = kz^{-d}$

Limitação Estrutural: No caso SISO, é possível obter a condição ZF (*equalização perfeita* do canal) por meio de equalizadores FIR somente se o canal for composto apenas por polos (canal de fase mínima só-polos), ou se o canal representar apenas um ganho (canal fase mínima “sem zeros ou polos”).

O FEP FIR apresenta estrutura de fase mínima, e portanto não é capaz de atingir a condição ZF para canais FIR, apenas se aproxima dessa condição para uma ordem adequada do filtro (*equalização “não perfeita” o canal*).

Limitação de Critério: O FEP MMSE se baseia em EO2 apenas, explorando assim a informação da amplitude da resposta em frequência do canal. Com isso, o uso de EO2 leva à *equalização de canais de fase mínima*, e leva à *equalização perfeita (inversão) de canais somente composto por polos*.

Equalização de Canais SIMO e MIMO

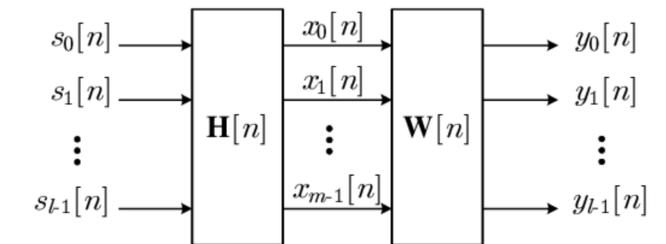


Condição ZF: $\mathbf{w}^H(z)\mathbf{h}(z) = kz^{-d}$

Limitação Estrutural: Podemos definir os polos e zeros do sistema MIMO por meio da Forma de Smith-McMillan de $\mathbf{H}(z)$:

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{Q}(z)\mathbf{\Gamma}(z)\mathbf{P}(z)$$

onde $\mathbf{Q}(z)$ e $\mathbf{P}(z)$ são matrizes polinomiais unimodulares (determinante constante) e $\mathbf{\Gamma}(z)$ é uma matriz diagonal, onde $\Gamma_i(z) = \alpha_i(z)/\beta_i(z)$. As raízes de $\alpha_i(z)$ e $\beta_i(z)$ definem, respectivamente, os zeros e polos do sistema $\mathbf{H}(z)$. No caso particular de sistemas SIMO, as raízes de $\alpha_i(z)$ ($\beta_i(z)$) correspondem aos zeros (polos) em comum a todos os subcanais $h_i(n)$. Da mesma forma que no caso SISO, o preditor linear MIMO apresenta uma estrutura de fase mínima, e, portanto, somente equalizará perfeitamente o canal caso o canal SIMO/MIMO caso ele seja um canal de fase mínima só-polos ou seja um canal fase mínima “sem zeros”.



Condição ZF: $\mathbf{W}^H(z)\mathbf{H}(z) = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{\Lambda}(z)$

Limitação de Critério: As limitações quanto ao emprego de EO2 na equalização de canais SIMO são essencialmente as mesmas das observadas no caso SISO.

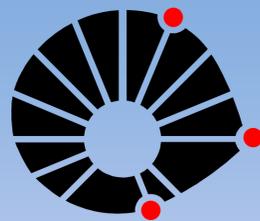
No caso MIMO, no entanto, como buscamos recuperar vários sinais, o uso de EO2 impõe uma limitação adicional: mesmo que o sistema não possua zeros ou polos (portanto, perfeitamente equalizável), o FEP poderá, no melhor dos casos, recuperar um vetor de sinais igual a

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{H}(0)\mathbf{s}(n)$$

ou seja, uma mistura linear instantânea dos sinais transmitidos.

Dessa forma, o uso do FEP no problema de desconvolução está limitado a:

- Sistemas SISO e SIMO de fase mínima;
- Sistemas MIMO de fase mínima, mas atuaria apenas como uma etapa de pré-processamento dos dados, reduzindo o problema de recuperação dos dados a um problema de BSS instantâneo.



UNICAMP



DSPCom

Desconvolução Preditiva: Para Além do que se Previu

João M. T. Romano, Romis Attux, Rafael Ferrari, Ricardo Suyama, Kenji Nose-Filho, Denis Fantinato e Michele Costa

FEP linear: equalização de canais de fase mínima (máxima), pois, nesse caso a fronteira de decisão é linear.

Canais de fase mista: fronteiras de decisão não-lineares que requerem filtros não-lineares.

Qual estrutura não-linear?

Considerando um canal linear FIR, modulação binária $\{-1,+1\}$ e ruído aditivo branco e gaussiano, o preditor progressivo de passo unitário que minimiza o erro quadrático médio é dado por

$$E[y(k)|\mathbf{y}(k-1)] = \frac{\sum_{j=1}^{2^{m+n-2}} w_j \cdot \exp\left(-\frac{\|\mathbf{y}(k-1) - \mathbf{c}_j\|^2}{2\sigma^2}\right)}{\sum_{j=1}^{2^{m+n-2}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{y}(k-1) - \mathbf{c}_j\|^2}{2\sigma^2}\right)}$$

$$w_j = \sum_{i=1}^{n-1} h_i \mathbf{x}_{j,i-1}$$

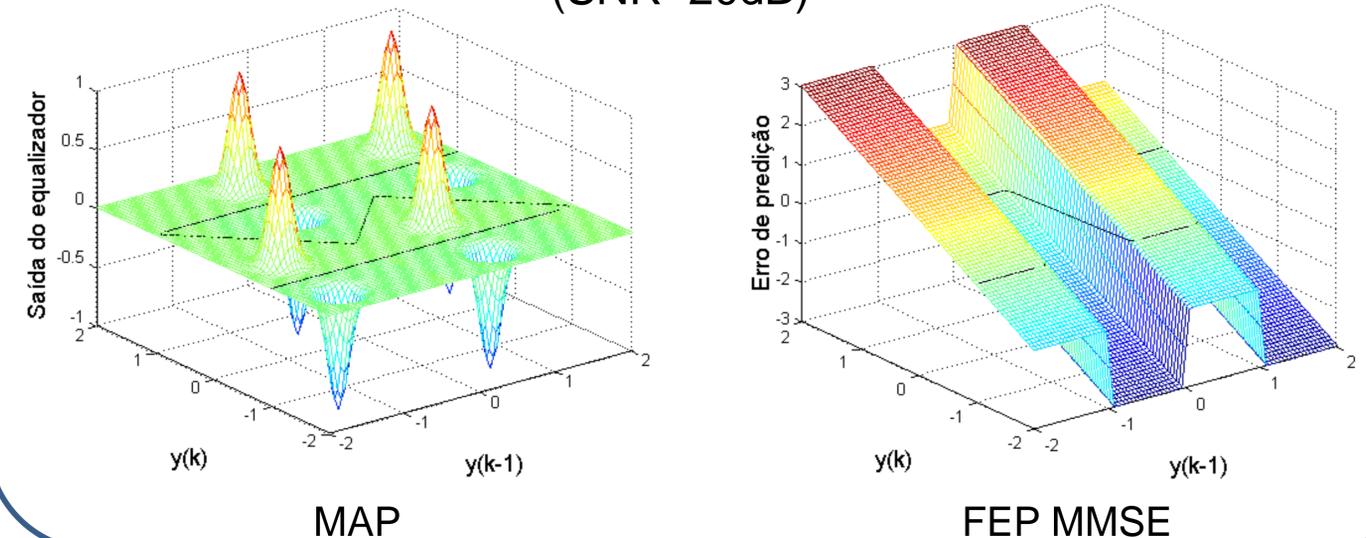
Propriedade: na ausência de ruído, o sinal predito é exatamente igual à interferência inter-simbólica de forma que o erro de predição é o sinal transmitido com atraso nulo multiplicado pelo primeiro coeficiente do canal.

$$e_{\text{MMSE}}(k) = y(k) - E[y(k)|\mathbf{y}(k-1)] = h_0 s(k)$$

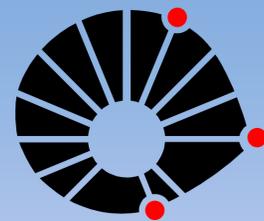
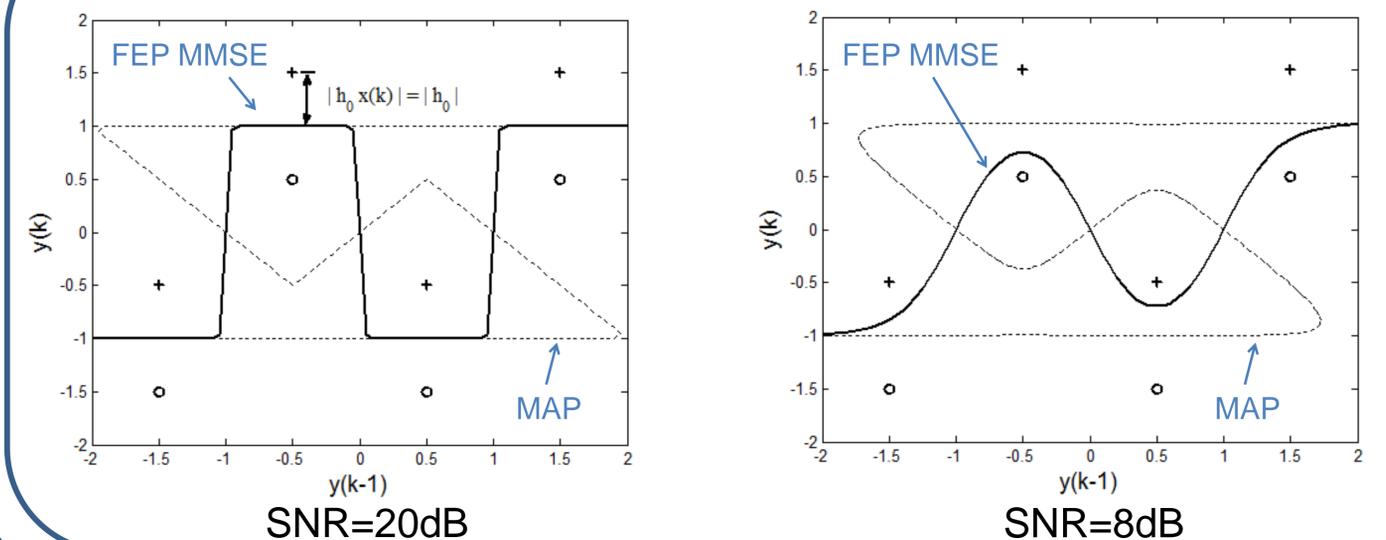
Implementação: o FEP MMSE pode ser implementado através de filtros fuzzy. A estimação dos parâmetros que definem o filtro pode ser feita através de clusterização (estados do canal e variância do ruído) e treinamento adaptativo usando o algoritmo LMS ou RLS (pesos).

Exemplo: canal de fase máxima com resposta ao impulso $h(z) = 0,5 + z^{-1}$, atraso de equalização nulo

Mapeamento entrada-saída (SNR=20dB)



Fronteira de decisão



UNICAMP



DSPCom

Desconvolução Preditiva: Para Além do que se Previu

João M. T. Romano, Romis Attux, Rafael Ferrari, Ricardo Suyama, Kenji Nose-Filho, Denis Fantinato e Michele Costa

FEP L_p como um filtro de descorrelação não-linear: Todo problema de natureza não supervisionada requer algum conhecimento a-priori dos sinais envolvidos no processo. No problema de separação cega de fontes (BSS), uma das hipóteses comumente adotadas é de que os sinais envolvidos são independentes e não-Gaussianos. Neste contexto, uma ferramenta importante é a Análise de Componentes Independentes (ICA). Em ICA, a ideia básica é que, ao recuperar a independência dos sinais separamos as fontes envolvidas. Para isto, esta ferramenta faz uso de critérios baseados na: Informação Mútua, Estatísticas de Ordem Superior, Descorrelação não-Linear, Maximização da não-Gaussianidade, entre outros.

Interessantemente, o problema de desconvolução pode ser visto como um caso particular do problema de separação. Sendo assim, os critérios utilizados em BSS podem ser utilizados em desconvolução.

Iremos mostrar que, de uma maneira bem simples, o FEP que minimiza a norma L_p do erro de predição atua como um filtro capaz de promover a descorrelação não-linear do erro de predição.

A expressão do erro de predição pode ser dada por:

$$e(n) = x(n) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k x(n-k).$$

Substituindo a norma L_p do erro de predição pelo seu momento absoluto de ordem p , a sua minimização leva a

$$\frac{\partial E[|e(n)|^p]}{\partial a_k} = 0.$$

Derivando essa expressão, temos

$$E[|e(n)|^{p-1} \text{sign}(e(n)) x(n-k)] = 0, k \geq 1.$$

Como $e(n-k)$ pode ser escrito como uma combinação linear de $x(n-k)$ e todas as suas amostras passadas, podemos escrever

$$E[|e(n)|^{p-1} \text{sign}(e(n)) e(n-k)] = 0, k \geq 1.$$

Esta expressão revela que um FEP com um número de coeficientes suficientemente grande irá produzir uma saída não-linearmente descorrelacionada, atuando assim como um filtro de descorrelação não-linear, capaz de promover a desconvolução de determinados sinais independente da fase do sistema.

Porém, a desconvolução de sistemas de fase mista ou máxima através de um FEP progressivo pode vir a ocasionar ganhos de amplitude. De modo a obter critérios invariantes à amplitude do sinal, propõe-se uma normalização do erro de predição e o critério passa a ser dado por

$$J_p = \frac{\|e(n)\|_p}{\|e(n)\|_2}$$

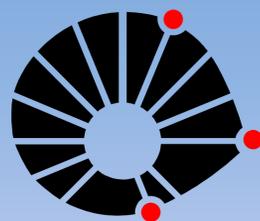
Em nosso artigo publicado no ano passado, demonstramos a relação entre a mínima entropia da v.a. da Gaussiana Generalizada e as normas L_p , sendo que, a minimização de uma dada norma L_p corresponde a minimização da entropia de uma dada v.a. De um modo mais geral, ilustramos, neste artigo, a relação entre as v.a.s Laplaciana, Gaussiana e uniforme com as normas L_1 , L_2 e L_∞ respectivamente.

A partir dessas relações, é possível intuir que a descorrelação não-linear do erro de predição promovida pela minimização das normas L_1 é suficiente para recuperar a independência de sinais, originalmente, compostos de v.a.s Laplacianas.

Já a descorrelação não-linear do erro de predição promovida pela minimização das normas L_∞ é suficiente para recuperar a independência de sinais, originalmente, compostos de v.a.s Laplacianas.

No caso de v.a.s gaussianas, a desconvolução não pode ser feita da mesma maneira, uma vez que a descorrelação não-linear não garante a recuperação de sinais com esta distribuição. Além disso, o critério se torna constante para $p = 2$.

Sinais supergaussianos Sinais subgaussianos



UNICAMP



DSPCom

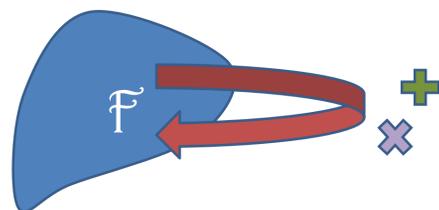
Desconvolução Preditiva: Para Além do que se Previu

João M. T. Romano, Romis Attux, Rafael Ferrari, Ricardo Suyama, Kenji Nose-Filho, Denis Fantinato e Michele Costa

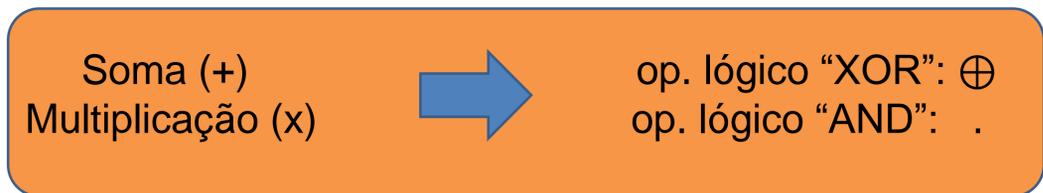
Deconvolução Preditiva sobre Corpos de Galois:

Nas áreas de criptografia, codificação e correção de erros, as fontes discretas (p. ex., as sequências binárias) geralmente são processadas através de uma “combinação linear” entre elementos presentes e passados. Nestes casos, a decodificação poderá proceder por meio de um filtro predictor definido sobre um corpo finito ou de Galois.

Corpo de Galois: Um conjunto finito \mathcal{F} provido de duas operações, adição e multiplicação, contidos no próprio conjunto, formam um corpo de Galois.



Propriedade: Para $GF(2)$, existem analogias à álgebra booleana:



Motivação: Seria possível estender ao domínio de processamento de sinais as definições e propriedades dos corpos finitos?

Definição de Predição sobre o Corpo de Galois:

- **Sinal de Erro:** As particularidades inerentes à definição do corpo exigem que o sinal de erro seja computado como (a subtração, no caso $GF(2)$, equivale à soma \oplus):

$$e(n) = x(n + 1) \oplus y(n)$$

- **Crítério:** O critério de Wiener não pode ser empregado pois o produto entre a realização da variável (em $GF(2)$) e a probabilidade associada (em \mathcal{R}) não é estabelecido. Para compensar essa ausência, propomos como critério a minimização da entropia associada ao sinal de erro:

$$\min_{\mathbf{w}} J_H(\mathbf{w}) = \min_{\mathbf{w}} - \sum_{i \in GF(2)} p_e(i) \log_2 p_e(i)$$

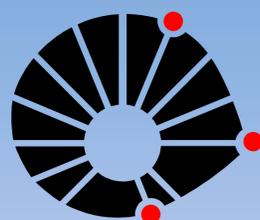
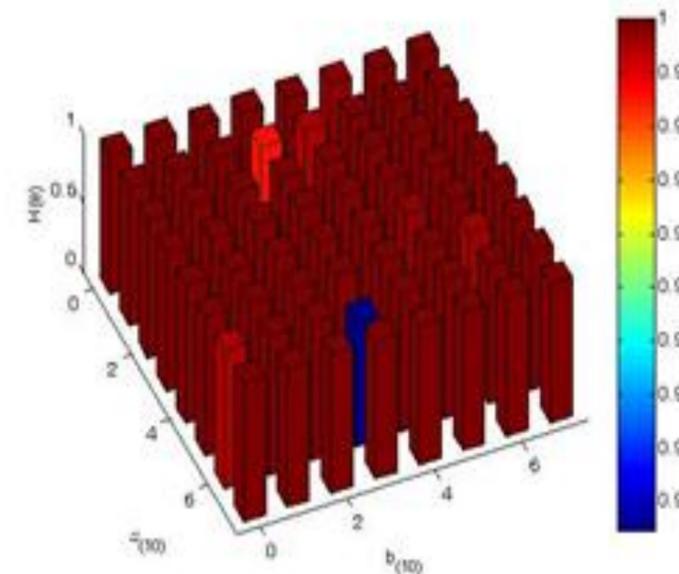
- **Ajuste dos Coeficientes do Filtro Predictor Decodificador:** O conjunto de possíveis soluções é bastante restrito, passíveis de serem testadas exaustivamente. Pois, os coeficientes do filtro assumem apenas valores finitos e o comprimento do filtro também é limitado.

Exemplo:

Codificador: $h(z) = 1 \oplus z^{-2} \oplus z^{-3} / (1 \oplus z^{-1} \oplus z^{-2})$.

O filtro é projetado segundo um modelo ARMA, com 3 coeficientes tanto para a parte *forward* (**a**) quanto *backward* (**b**), podendo excursionar de de $[0 \ 0 \ 0]$ a $[1 \ 1 \ 1]$, com equivalente BCD de 0 a 7. Todas as possibilidades para **a** e **b** foram percorridas, conforme mostrado na figura ao lado.

A configuração ótima é aquela que resulta na menor entropia do sinal de erro.



UNICAMP



Universidade Federal do ABC

