Programação Estruturada

Listas Ligadas

Professores Emílio Francesquini e Carla Negri Lintzmayer

2018.Q3

Centro de Matemática, Computação e Cognição
Universidade Federal do ABC

Disclaimer

- Esses slides foram preparados para um curso de Programação Estruturada ministrado na UFABC.
- Este material pode ser usado livremente desde que sejam mantidos os créditos dos autores e da instituição.
- Muitos dos exemplos apresentados aqui foram retirados de materiais preparados pelos Profs. Tomasz Kowaltowski e Orlando Lee da UNICAMP assim como do Prof. Paulo Feofiloff do IME-USP.

Listas ligadas

Lista ligada

- Uma lista ligada (= **lista encadeada** = ***linked list***) é uma estrutura de dados para armazenar uma sequência de elementos
  - Neste sentido é parecida com o bom e velho vetor
- Cada elemento é armazenado em uma **célula** (= **nó** = **nodo**)
- Cada célula também armazena o **endereço do próximo elemento da lista**

Lista ligada - Estrutura

```
1  struct reg {
2      int conteudo;
3      struct reg *prox;
4  };
```

É comum criamos um **typedef** para facilitar o uso

```
1  typedef struct reg celula;
```

E então podemos declarar uma célula e um ponteiro para uma célula assim:

```
1  celula c;
2  celula *p;
```

Listas ligadas - estrutura

- Se `c` é uma célula então `c.conteudo` é o conteúdo da célula e `c.prox` é o endereço da próxima célula
- Se `p` é o endereço de uma célula, então `p->conteudo` é o conteúdo da célula e `p->prox` é o endereço da próxima célula
- Se `p` é o endereço da última célula da lista então `p->prox` vale `NULL`

Listas ligadas - Representando a lista

Repare que a definição das células que compõem uma lista ligada é uma **definição recursiva**

```
1  struct reg {
2      int conteudo;
3      struct reg *prox;
4  };
```

Não por acaso, algoritmos que lidam com listas ligadas podem ser expressos recursivamente de maneira natural.

Podemos representar a lista através da primeira célula. Assim, o endereço da lista ligada é, efetivamente, o endereço da sua primeira célula

```
1 celula *lista;
```

Pergunta: Como verificar se uma lista está vazia?

```
1 int lista_vazia(celula *lista) {
2     ...
3 }
```

Listas ligadas - Representando a lista

Podemos representar a lista através da primeira célula. Assim, o endereço da lista ligada é, efetivamente, o endereço da sua primeira célula

```
celula *lista;
```

Pergunta: Como verificar se uma lista está vazia?

```
int lista_vazia(celula *lista) {
    /* equivalente a if (!lista), por quê? */
    if (lista == NULL)
        return 1;
    else
        return 0;
}
```

Listas ligadas - Representando a lista

Podemos representar a lista através da primeira célula. Assim, o endereço da lista ligada é, efetivamente, o endereço da sua primeira célula

```
1  celula *lista;
```

Pergunta: Como verificar se uma lista está vazia?

```
1  /* Versao super resumida */
2  int lista_vazia(celula *lista) {
3      return !lista;
4  }
```

Manipulando listas ligadas

API

- A lista ligada é uma das **estruturas de dados** mais comuns.
- Muitas linguagens de programação oferecem **bibliotecas** recheadas com estruturas de dados para os mais diversos usos.
- Programas que queira utilizar essas bibliotecas devem seguir um contrato de utilização especificado pela sua **API** (*Application Programming Interface*).
  - Em C a maneira mais comum é através do uso de arquivos `.h` como, por exemplo o `math.h`.

Agora que já definimos uma função (`lista_vazia`), quais outras funções seriam interessantes de incluir na API da nossa lista ligada?

Listas ligadas - API

```
1  struct reg {
2      int conteudo;
3      struct reg *prox;
4  };
5
6  typedef struct reg celula;
7
8  int lista_vazia(celula* lista);
9  void imprime_elementos(celula* lista);
10 celula* busca_elemento(int elem, celula* lista);
11 void insere_elemento(int elem, celula* lista);
12 void remove_elemento(celula* lista);
13 int busca_e_remove(int elem, celula* lista);
```

Varrendo elementos - Versão iterativa

```
struct reg {
    int conteudo;
    struct reg *prox;
};

typedef struct reg celula;

...

void imprime_elementos(celula* ll) {
    celula* atual = ll;
    while (atual) {
        printf("%d\n", atual->conteudo);
        atual = atual->prox;
    }
}
```

Varrendo elementos - Versão recursiva

```c
struct reg {
    int conteudo;
    struct reg *prox;
};
typedef struct reg celula;

...

void imprime_rec(celula* ll) {
    if (ll) {
        printf("%d\n", ll->conteudo);
        imprime_rec(ll->prox);
    }
}
```

Exercícios

- **Exercício 1** – Faça uma versão **iterativa** de `imprime_elementos` que imprime os elementos da lista na ordem inversa.
- **Exercício 2** – Faça uma versão **recursiva** de `imprime_elementos` que imprime os elementos da lista na ordem inversa.

Busca - Versão iterativa

```c
struct reg {
    int conteudo;
    struct reg *prox;
};

typedef struct reg celula;
...

celula* busca_elemento(int elem, celula* lista) {
    celula* atual = lista;
    while (atual) {
        if (atual->conteudo == elem)
            return atual;
        atual = atual->prox;
    }
    return NULL;
}
```

Busca – Versão recursiva

```
struct reg {
    int conteudo;
    struct reg *prox;
};

typedef struct reg celula;

...

celula* busca_elemento_rec(int elem, celula* lista) {
    if (!lista)
        return NULL;
    if (lista->conteudo == elem)
        return lista;
    else
        return busca_elemento_rec(elem, lista->prox);
}
```

Inserção

```
void insere_elemento(int elem, celula *lista) {
    celula nova;
    nova.conteudo = elem;
    nova.prox = lista->prox;
    lista->prox = &nova;
}
```

Inserção

```c
void insere_elemento(int elem, celula *lista) {
    celula nova;
    nova.conteudo = elem;
    nova.prox = lista->prox;
    lista->prox = &nova;
}
```

Inserção

```c
void insere_elemento(int elem, celula *inicial) {
    celula *nova;
    nova = malloc(sizeof(celula));
    nova->conteudo = elem;
    nova->prox = inicial;
    inicial = nova;
}
```

Inserção

```c
void insere_elemento(int elem, celula *inicial) {
    celula *nova;
    nova = malloc(sizeof(celula));
    nova->conteudo = elem;
    nova->prox = inicial;
    inicial = nova;
}
```

```c
celula *primeiro;
int k = 7;
...
/* cria cópia de primeiro */
insere_elemento(k, primeiro);
```

Ao voltar da chamada, o valor da variável primeiro **não foi alterado**.

Remoção

```c
/* Remove a célula seguinte à celula apontada por p */
void remove_elemento(celula *p) {
    celula *removida;
    removida = p->prox;
    p->prox = removida->prox;
    free(removida);
}
```

Note que a operação remove a célula seguinte àquela apontada por `p`.

Qual o problema disso?

Remoção

```
1  /* Remove a célula seguinte à celula apontada por p */
2  void remove_elemento(celula *p) {
3      celula *removida;
4      removida = p->prox;
5      p->prox = removida->prox;
6      free(removida);
7  }
```

Note que a operação remove a célula seguinte àquela apontada por `p`.

Qual o problema disso?

Problemas com a implementação atual

- Nossas implementações de inserção e remoção não funcionam!
  - **Como inserir o primeiro** item na lista?
  - Supondo que já existam itens na lista, **como remover o primeiro deles**?

Inserção - 1ª tentativa de conserto

```
celula* insere_elemento(int elem, celula* inicial) {
    celula *nova;
    nova = malloc(sizeof(celula));
    nova->conteudo = elem;
    nova->prox = inicial;
    return nova; /* devolve o início da lista */
}

...
primeiro = insere_elemento(k, primeiro);
```

Solução um tanto **artificial**: fica atualizando o ponteiro para o início sempre.

Inserção - 2ª tentativa de conserto

```
void insere_elemento(int elem, celula** pini) {
    celula *nova;
    nova = malloc(sizeof(celula));
    nova->conteudo = elem;
    nova->prox = *pini;
    *pini = nova;
}

...

insere_elemento(k, &primeiro);
```

- Um pouco difícil de ler por causa da indireção.
- Nenhuma das soluções é satisfatória porque elas diferem do caso geral.

Remoção - Tentativa de conserto

- Em vez passar como parâmetro o nó anterior, por que não passar o nó que desejamos remover?
- Isso não é uma boa ideia. Por quê?

Consertando a inserção e a remoção

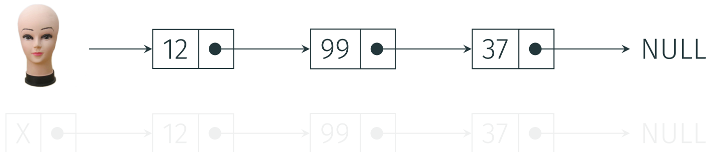
- Temos dois problemas semelhantes: tanto a inserção quanto a remoção não estão muito “redondas” no caso do primeiro nó.
- **Como resolver?**

Consertando a inserção e a remoção

- Temos dois problemas semelhantes: tanto a inserção quanto a remoção não estão muito “redondas” no caso do primeiro nó.
- **Como resolver?**

Solução: Listas com cabeças!

Listas com cabeça

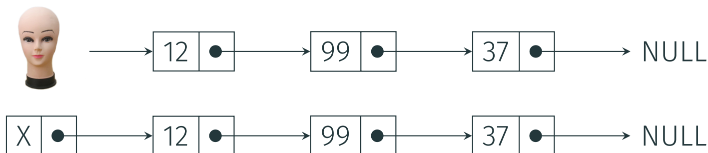


- A **cabeça** (= *head*) da lista ligada serve apenas como um marco de início. (Como tal, **ignoramos** o seu conteúdo.)
- Uma lista encadeada `lista` com cabeça está vazia se e somente se `lista->prox == NULL`.

```
/* versão sem cabeça */
int lista_vazia(celula *lst) {
    return !lst;
}
```

```
/* versão com cabeça */
int lista_vazia(celula *lst) {
    return !lst->prox;
}
```

Listas com cabeça



- A **cabeça** (= ***head***) da lista ligada serve apenas como um marco de início. (Como tal, **ignoramos** o seu conteúdo.)
- Uma lista encadeada `lista` com cabeça está vazia se e somente se `lista->prox == NULL`.

```
1  /* versão sem cabeça */            /* versão com cabeça */
2  int lista_vazia(celula *lst) {     int lista_vazia(celula *lst) {
3      return !lst;                       return !lst->prox;
4  }                                  }
```

Listas com cabeça

Para **criar** uma lista encadeada vazia com cabeça

```
1  celula *lista;
2  lista = malloc(sizeof(celula));
3  lista->prox = NULL;
```

Para **varrer** (imprimindo) os elementos:

```
1  void imprima(celula *lista) {
2      celula *p;
3      for (p = lista->prox; p != NULL; p = p->prox)
4          printf ("%d\n", p->conteudo);
5  }
```

Como **adaptar** as demais funções da API?

Manipulando listas com cabeça

- Busca

```
1  celula* busca_elemento(int elem, celula* lista) {
2      celula* atual = lista->prox; /* lista aponta
       ↪  para a cabeca */
3      while (atual) {
4          if (atual->conteudo == elem)
5              return atual;
6          atual = atual->prox;
7      }
8      return NULL;
9  }
```

- Inserção e remoção
  - Nada muda.

Busca e remoção integradas

```
1  /* Remove da lista (com cabeça) 'lista' a primeira
   ↪  célula que contém 'elem' */
2  void busca_e_remove(int elem, celula* lista) {
3      celula *p, *q;
4      p = lista;
5      q = lista->prox;
6      while (q != NULL && q->conteudo != elem) {
7          p = q;
8          q = q->prox;
9      }
10     if (q != NULL) {
11         p->prox = q->prox;
12         free(q);
13     }
14 }
```

Exercício

Exercício 3 – Implemente uma versão semelhante ao `busca_e_remove` que funda as operações de busca e inserção.

Vetores ou listas ligadas?

Comparação entre vetores e listas ligadas

Pergunta: O que é melhor usar: vetores ou listas ligadas?

Resposta: Depende.

- Vetores permitem indexação e usar menos memória (não precisa de ponteiros)
- Listas ligadas são mais flexíveis
  - Não é preciso saber o número de elementos a priori
  - Algumas operações podem ser mais simples

Comparação entre vetores e listas ligadas

Exemplo Suponha que queremos manter um conjunto S de inteiros. Devemos ser capazes de realizar as seguintes operações sobre esse conjunto:

- mínimo
- k-ésimo menor
- busca
- inserção
- remoção

Considere que $n = |S|$.

Vetores vs. listas ligadas

Implementação como um **vetor ordenado**:

- mínimo: custo 1
- k-ésimo menor: custo 1
- busca: custo $\leq \log_2 n$ (busca binária)
- inserção: custo $\leq n$ (busca + movimentação de dados)
- remoção: custo $\leq n$ (busca + movimentação de dados)

Implementação como uma **lista ligada ordenada**:

- mínimo: custo 1
- k-ésimo menor: custo k
- busca: custo $\leq n$
- inserção: custo $\leq n$ (busca)
- remoção: custo $\leq n$ (busca)

Informações extras - Ordenação

Ordenação

Considere a lista ligada definida abaixo:

```
1  struct No {
2      int info;
3      struct No *prox;
4  }
5
6  typedef struct No No;
```

- Vamos descrever três algoritmos para ordenar uma lista ligada com cabeça pelo campo info.
- Vocês já conhecem alguns desses algoritmos implementados com vetores!

Ordenação por seleção (=*selection sort*)

- A ideia básica consiste, em cada iteração:
  - **encontrar e remover** o menor elemento `x` da lista original `ini`
  - inserir `x` no final de uma lista ordenada formada pelos elementos previamente removidos
- Vamos trabalhar usando uma **lista com cabeça**

Ordenação por seleção

```
1  void selectionsort(No *ini) {
2      faça t apontar para a lista ini;
3      faça ini ser a lista vazia;
4      enquanto t for não vazia {
5          remova o menor elemento de t;
6          insira o elemento no final de ini;
7      }
8  }
```

Note que é conveniente ter um ponteiro para o final da lista.

Ordenação por seleção

```c
void selectionsort(No *ini) {
    No *t = malloc(sizeof(No)), *last, *min;

    t->prox = ini->prox;
    ini->prox = NULL;
    last = ini;
    while (t->prox != NULL) {
        min = remove_minimo(t);
        last->prox = min;
        last = min;
        last->prox = NULL;
    }
    free(t);
}
```

Ordenação por seleção

```c
No *remove_minimo(No *ini) {
    No *p, *q, *ant;
    if (!ini->prox)
        return NULL;
    p = ant = ini;
    q = ini->prox;
    while (q) {
        if (q->info < ant->prox->info)
            ant = p;
        p = q;
        q = q->prox;
    }
    q = ant->prox;
    ant->prox = q->prox;
    return q;
}
```

Na função, `ant` aponta para o **nó anterior** ao nó com menor `info` encontrado até o momento.

Ordenação por seleção

```
No *remove_minimo(No *ini) { /* outro jeito */
    No **p, **min, *q;
    if (!ini->prox)
        return NULL;
    p = min = &(ini->prox);
    while (*p) {
        if ((*p)->info < (*min)->info)
            min = p;
        p = &((*p)->prox);
    }
    q = (*min);
    *min = q->prox;
    return q;
}
```

As variáveis `p` e `min` são ponteiros para campos `prox` de nós da lista.

Ordenação por seleção - Análise

- Podemos analisar a complexidade da função `selectionsort` em função de n: o tamanho da lista `ini`
- O tempo gasto por `remove_minimo` é proporcional a n
- `selectionsort` chama `remove_minimo` n vezes
- Assim, no total o tempo gasto é **proporcional a** n^2

Exercício

Exercício 4 – É possível simplificar o código apresentado para efetuar a ordenação por seleção de forma que ela coloque o vetor em ordem crescente buscando a célula que contém o máximo da lista e colocando no início da lista de resposta. Implemente esta versão supondo que a lista tem cabeça.

Exercício

Exercício 5 – Escreva uma versão de `No *selectionsort(No *ini)` que recebe uma lista ligada **sem cabeça** `ini` e devolve um ponteiro para uma **lista ligada ordenada sem cabeça** com os nós da lista original.

Sugestão: em vez de usar uma função `remove_minimo` é melhor escrever o código que faz isto dentro da função `selectionsort`, para evitar o problema de ter de remover um nó no início da lista. Não fica tão modularizado, obviamente. Outra ideia é usar um ponteiro para ponteiro como parâmetro.

Ordenação por inserção

Ordenação por inserção (= *insertion sort*)

- A ideia básica consiste, em cada iteração:
  - remover o primeiro elemento `x` da lista original `ini`
  - inserir `x` na posição correta de uma lista ordenada formada pelos elementos previamente removidos
- Na implementação em C, passamos o nó cabeça da lista que queremos ordenar e este deve ser o nó cabeça da lista ordenada.

Ordenação por inserção

```
1  void insertionsort(No *ini) {
2      faça t apontar para a lista ini;
3      faça ini ser a lista vazia;
4      enquanto t for não vazia {
5          remova o primeiro elemento de t;
6          insira o elemento em ordem na lista ini;
7      }
8  }
```

Ordenação por inserção

```
1  void insertionsort(No *ini) {
2      No *t, *x;
3      t = ini->prox;
4      ini->prox = NULL;
5      while (t) {
6          x = t;
7          t = t->prox;
8          insere_ordenado(ini, x);
9      }
10 }
```

A lista `t` não tem cabeça.

Ordenação por inserção

```
1  void insere_ordenado(No *ini, No *x) {
2      No *p, *q,
3      p = ini;
4      q = ini->prox;
5      while (q && q->info < x->info) {
6          p = q;
7          q = q->prox;
8      }
9      x->prox = q;
10     p->prox = x;
11 }
```

Ordenação por inserção – Análise

- Podemos analisar a complexidade da função `insertionsort` em função de n, o tamanho da lista `ini`.
- O tempo gasto por `insere_ordenado` é proporcional a n no pior caso.
- `insertionsort` chama `insere_ordenado` n vezes.
- Assim, no total o tempo gasto **é proporcional a no máximo** n^2.

Exercício

Exercício 6 – Escreva uma versão de `insere_ordenado` que usa ponteiros para ponteiros (como na segunda versão de `remove_minimo`).

Intercalando duas listas

Problema: intercalar (= ***merge***) duas listas ordenadas

Queremos implementar a seguinte função:

```
No *intercala(No *s, No *t);
```

A função `intercala` recebe duas **listas ligadas ordenadas sem cabeça** `s` e `t`, e devolve uma **lista ordenada sem cabeça** contendo os nós das listas `s` e `t`.

Também podemos usar listas com cabeça: o código é praticamente idêntico. Só é preciso descartar (`free`) uma das cabeças ao final.

```c
No *intercala(No *s, No *t) {
    No *p, *q, cabeca, *last;
    last = &cabeca;
    cabeca.prox = NULL;
    p = s;
    q = t;
    while (p && q) {
        if (p->info < q->info) {
            last->prox = p;
            last = p;
            p = p->prox;
        } else {
            last->prox = q;
            last = q;
            q = q->prox;
        }
    }
    if (p)
        last->prox = p;
    else
        last->prox = q;
    return cabeca.prox;
}
```

Mergesort

A ideia do algoritmo implementado pela função `mergesort` é conceitualmente muito simples.

- Se a lista ini for pequena, então ordene diretamente.
- Caso contrário, divida a lista `ini` em duas listas `s` e `t` de tamanhos aproximadamente iguais.
- Recursivamente, ordene as listas `s` e `t`.
- Intercale as listas `s` e `t` e devolva a lista resultante.

Mergesort

```
1  No *mergesort(No *ini) {
2      No *met, *metade;
3      /* caso base */
4      if (ini == NULL || ini->prox == NULL)
5          return ini;
6      metade = acha_metade(ini);
7      met = metade->prox;
8      metade->prox = NULL; /* divide a lista */
9      ini = mergesort(ini);
10     met = mergesort(met);
11     return intercala(ini, met);
12 }
```

Mergesort

Como achar a metade rapidamente?

```
1  No *acha_metade(No *ini) {
2      No *slow, *fast;
3      if (ini == NULL)
4          return ini;
5      slow = fast = ini;
6      while (fast->prox && fast->prox->prox) {
7          slow = slow->prox;
8          fast = fast->prox->prox;
9      }
10     return slow;
11 }
```

Mergesort - Análise (informal)

Suponha que $T(n)$ seja o tempo de pior caso que o `mergesort` leva para ordenar uma lista ligada com n nós.

- Se $n \geq 2$ então acontecem os seguintes passos:
  - Divide a lista
  - Duas chamadas recursivas
  - Intercalação
- Logo o tempo gasto é:

$$T(n) = n + 2T(n/2) + n = 2T(n/2) + 2n$$

- Assim,

$$T(n) = \begin{cases} 2T(n/2) + 2n, & \text{se } n \geq 2 \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Mergesort - Análise (informal)

Para ter uma intuição, suponha que $n = 2^k$. Note que há:

- 1 chamada para uma lista de tamanho n (**nível** 1)
- 2 chamadas para uma lista de tamanho $n/2$ (**nível** 2)
- 4 chamadas para uma lista de tamanho $n/4$ (**nível** 3)
- 2^{i-1} chamadas para uma lista de tamanho $n/2^{i-1}$ (**nível** i)
- $2^k - 1$ chamadas para uma lista de tamanho 2 (**nível** $k - 1$)
- 2^k chamadas para uma lista de tamanho 1 (**nível** k)

Mergesort - Análise (informal)

Ignore o tempo de dividir a lista. Vamos contar o custo das intercalações de listas (IL) em cada nível.

- **nível** 1: 1 IL de tamanho $n/2$; tempo $2 \times (n/2) = n$
- **nível** 2: 2 ILs de tamanho $n/4$; tempo $2 \times 2 \times (n/4) = n$
- **nível** 3: 4 ILs de tamanho $n/8$; tempo $2 \times 4 \times (n/8) = n$
- **nível** i: 2^{i-1} ILs de tamanho $n/2^i$; tempo $2 \times 2^{i-1} \times (n/2^i) = n$
- **nível** $k-1$: 2^{k-2} ILs de tamanho 2; tempo $2 \times 2^{k-2} \times (2) = n$
- **nível** k: 2^{k-1} ILs de tamanho 1; tempo $2 \times 2^{k-1} \times (1) = n$

Assim, o tempo total é $(k-1)n \approx n \log_2 n$.

Mergesort - Análise (informal)

- Para n grande, temos que $n \log_2 n << n^2$.
- Assim, o algoritmo `mergesort` é bem mais eficiente que os algoritmos quadráticos `bubblesort`, `selectionsort` e `insertionsort`.

Exercício

Exercício 7 – Escreva uma versão **recursiva** da função `No *intercala(No *s, No *t)` que não use laços.

Informações extras: listas duplamente ligadas

Listas duplamente ligadas

```c
struct NoDuplo {
    int info;
    struct NoDuplo *ant;
    struct NoDuplo *prox;
};
typedef struct NoDuplo NoD;
```

Vantagens: maior acessibilidade

Desvantagens: dobro de ponteiros e mais trabalho para manter a lista.

Busca

A função busca recebe uma lista duplamente ligada ini e um inteiro k, e devolve um ponteiro para o primeiro nó com chave k ou NULL, se não houver.

```
No *busca(NoD *ini, int k) {
    NoD *p = ini;
    while (p && p->info != k)
        p = p->prox;
    return p;
}
```

Virtualmente idêntica à função busca para lista ligadas simples.

Inserção

A função `insere` recebe uma lista duplamente ligada `ini` e um elemento `k` e insere um novo nó com conteúdo `k` entre o nó apontado por `p` e o seguinte. Só faz sentido se `p != NULL`.

```
1  void insere(NoD *p, int k) {
2      NoD *novo;
3      novo = malloc(sizeof(NoD));
4      novo->info = k;
5      novo->prox = p->prox;
6      novo->ant = p;
7      if (p->prox)
8          p->prox->ant = novo;
9      p->prox = novo;
10 }
```

Não faz inserção no início de uma lista duplamente ligada, a não ser que tenha nó cabeça.

Remoção

A função `remove` recebe um ponteiro `q` para um nó de uma lista duplamente ligada e o remove.

```
1  void remove(NoD *q) {
2      No *p = q->ant;
3      p->prox = q->prox;
4      if (q->prox)
5          q->prox->ant = p;
6      free(q);
7  }
```

Note a diferença com listas ligadas simples.

Não funciona se `q` aponta para o primeiro elemento da lista, a não ser que tenha nó cabeça.

Informações extras: listas ligadas circulares

Listas ligadas circulares

Tem a mesma declaração de uma lista ligada simples, mas o campo `prox` do último nó `aponta` para o `primeiro` nó.

- **Lista ligada circular sem cabeça**: um problema é a lista vazia.
- **Lista ligada circular com cabeça `ini`**
  - **Lista vazia**: `ini->prox == ini`

Pode-se implementar outras variantes:

- listas ligadas circulares com ou sem cabeça
- listas duplamente ligadas circulares
- ou com ambas as formas.

Busca em lista circular

A função busca recebe uma lista ligada circular com cabeça `ini` e um inteiro k, e devolve um ponteiro para o primeiro nó com chave k ou `NULL`, se não houver.

```
1  No *busca(No *ini, int k) {
2      No *p = ini->prox;
3      ini->info = k; /* sentinela */
4      while (p->info != k)
5          p = p->prox;
6      ini->info = NULL;
7      if (p == ini)
8          return NULL;
9      else
10         return p;
11 }
```

Exercícios

Exercício 8 – Escreva uma função `remove_llcc(No *ini, int k)` que recebe um ponteiro para uma lista ligada circular com cabeça `ini` e remove o primeiro nó com chave `k`.

Exercício 9 – Escreva uma função `remove_ldlcc(NoD *p)` que recebe um ponteiro para um nó `p` de uma lista duplamente ligada circular com nó cabeça e o remove da lista. Naturalmente, suponha que `p` não é o nó cabeça da lista.

Exercício 10 – Escreva uma função `insere_lcco(No *ini, int k)` que recebe uma lista ligada circular com cabeça ordenada `ini` e insere um novo nó com chave `k` na posição correta.

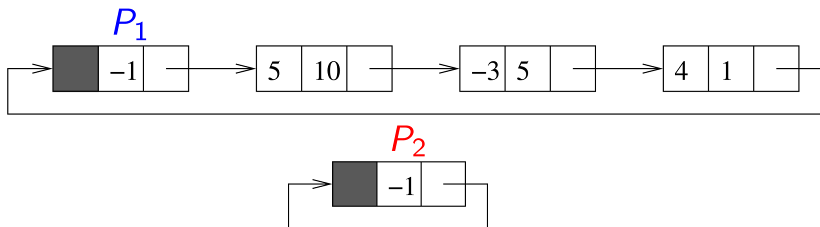
Exercício: representando polinômios

Considere o polinômio:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

onde $a_n \neq 0$

Representação de $P_1(x) = 5x^{10} - 3x^5 + 4$ e $P_2(x) = 0$



Exercício: representando polinômios

```c
typedef struct AuxPol {
    float coef;
    int expo;
    struct AuxPol *prox;
} Termo, *Polin;
```

A lista tem cabeça. O campo `expo` da cabeça é igual a -1 para ser usado como sentinela.

Note que:

```c
Termo *p;
Polin p;
```

são declarações **equivalentes**.

Exercício: representando polinômios

A função `imprime(Polin p)` imprime um polinômio `p` exibindo os pares (`coef`, `expo`) de cada termo.

```
1  void imprime(Polin pol) {
2      Termo *p = pol->prox;
3      if (p == pol) {
4          printf("Polinomio nulo.\n");
5          return;
6      }
7      while (p->expo != -1) {
8          printf("%5.1f, %2d ", p->coef, p->expo);
9          p = p->prox;
10     }
11     printf("\n");
12 }
```

Exercício: representando polinômios

Exercício 11 – Implemente em C funções para cada uma das operações abaixo:

- Calcule o valor de um polinômio $P(x)$ em um ponto x_0
- Calcule a soma de dois polinômios (usando o método da intercalação)
- Calcule o produto de dois polinômios
- Calcule a k-ésima derivada de um polinômio

Exercício: Problema de Josephus

- Um grupo de N pessoas precisa eleger um líder.
- Decidiu-se usar a seguinte ideia para eleger um líder: forma-se um círculo com as N pessoas e escolhe-se um inteiro k. Começamos com uma pessoa qualquer e percorremos o círculo em sentido horário, eliminando cada k-ésima pessoa. A **última pessoa** que restar será o líder. Veja o verbete sobre Josephus na Wikipedia.

Problema de Josephus: coloque os números $1, 2, \ldots, N$ em um círculo nesta ordem e começando em 1 aplique o algoritmo acima com um valor k. Determine o último número, denotado $J(N, k)$.

Exercício 12 – Escreva uma função `int josephus(int N, int k)` que calcula $J(N, k)$.