

UFABC – FIS104 Mecânica Estatística 2015 (2 quad.)
LISTA 6

1. (a) Utilizando o formalismo macrocanônico mostre que para um gás ideal quântico verifica-se:

$$\frac{PV}{kT} \equiv \ln \Xi(z, V, T) = \frac{1}{a} \sum_p \ln[1 + az \exp(-\beta\epsilon_p)] \quad (1)$$

$$N = \sum_p \frac{1}{z^{-1} \exp(\beta\epsilon_p) + a} \quad (2)$$

onde $a = +1$ para férmions e $a = -1$ para bósons.

(b) Encontre o número de ocupação médio de um nível com energia ϵ_p e a energia interna $U = \langle E \rangle$.

2. A partir das equações (1) e (2), mostre que para um gás ideal de bósons se verifica:

$$\frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^3} g_{5/2}(z) \quad (3)$$

$$N - N_0 = \frac{V}{\lambda^3} g_{3/2}(z) \quad (4)$$

onde $N_0 = V^{-1}z/(1-z)$ é o número de partículas no estado fundamental, $g_\nu(z)$ é a função de Bose-Einstein de índice ν , e λ é o comprimento de onda térmico.

3. Considere um gás ideal de Bose num volume V . (a) Mostre que quando o número de partículas ultrapassa o valor $V\zeta(3/2)/\lambda^3$, o número de partículas N_0 no estado fundamental fica comparável ao número total N de partículas (condensação de Bose). (b) Mostre que a condição para a condensação de Bose pode ser escrita na forma $T < T_c$. Encontre a T_c . (c) Mostre que quando acontece a condensação de Bose o potencial químico é nulo ($\mu = 0$). Indique os valores da fugacidade z e do potencial químico μ nos regimes $T < T_c$ e $T > T_c$. (d) Encontre expressões para N_0/N e para a fração de partículas nos estados excitados N_e/N em função de T/T_c . Faça um gráfico de N_0/N e N_e/N em função de T/T_c .
4. (a) Mostre que a pressão de um gás ideal de Bose é sempre menor que a pressão de um gás ideal clássico à mesma temperatura. (b) Mostre que para $T < T_c$ a pressão fica constante ($P = kT\zeta(5/2)/\lambda^3$) (c) Encontre o calor específico de um gás ideal de Bose.
5. Considere um gás de fótons num volume V e em equilíbrio a uma temperatura T . (a) Qual é o potencial químico do gás? Explicar. (b) Determine o número de fótons por unidade de volume em função da temperatura. (c) Encontre a expressão para a densidade de estados $g(\omega)$ em torno de uma dada frequência ω . (d) Encontre a energia por unidade de volume em função da temperatura.
6. Considere um modelo no qual um sólido é representado por um gás de fônons livres. (a) Calcule a densidade de modos normais com frequências em torno de ω . (b) Defina a frequência de Debye e o comprimento de onda de Debye. (c) Calcule a função de partição do gás de

fônons. (d) Calcule o número de ocupação médio de um nível com frequência ω . (e) Calcule a energia interna total, defina a temperatura de Debye T_D e calcule expressões aproximadas para U/N nos casos $T \gg T_D$ e $T \ll T_D$. (f) Calcule o calor específico C_V/kT e calcule expressões aproximadas nos casos $T \gg T_D$ e $T \ll T_D$. Faça um gráfico e explique os resultados.

7. Considere um gás de bósons idênticos que não interagem entre si. Mostre que o fenômeno de condensação de Bose-Einstein (que acontece num gás tridimensional) não acontece se o gás é bi-dimensional ou unidimensional.