UFABC – FIS104 Mecânica Estatística 2015 (2 quad.)
LISTA 7

1. (a) Mostre que para um gás ideal de férmions não-relativísticos de massa m se verifica:

$$\frac{P}{kT} = \frac{g}{\lambda^3} f_{5/2}(z), \qquad \frac{N}{V} = \frac{g}{\lambda^3} f_{3/2}(z), \tag{1}$$

onde g é um fator de degenerescência, $f_n(z)$ é a função de Fermi-Dirac de índice ν, e λ é o comprimento de onda térmico. (b) Quais são os possíveis valores da fugacidade z? (c) A partir das expressões anteriores calcule a energia interna, o calor específico a volume constante, a energia livre de Helmholtz e a entropia. (d) Mostre que sempre se verifica $P = \frac{2}{3} U V^{-1}$.

2. Limite clássico do gás de Fermi: (a) Mostre que no limite $T \to \infty$ ou $n \to 0$ se verifica $f_{3/2}(z) \ll 1$, e a fugacidade fica $z \ll 1$. (b) Neste limite, mostre que $PV = NkT$, $U = 3NkT/2$ e $C_V = 3Nk/2$.

3. Gás de Fermi completamente degenerado: (a) Explique em que condições um gás de Fermi fica degenerado. (b) Mostre que para um gás de Fermi completamente degenerado o número de ocupação é da forma $\langle n_\epsilon \rangle = \Theta(\epsilon - \epsilon_F)$ onde Θ é a função degrau de Heaviside, e ϵ_F é a energia de Fermi. (c) encontre a energia de Fermi em função da densidade de partículas $n = N/V$. (d) Calcule a energia interna e a pressão de um gás de Fermi completamente degenerado.

4. Gás de Fermi degenerado: (a) Encontre expressões assintóticas para as funções de Fermi $f_{5/2}(z)$, $f_{3/2}(z)$ e $f_{1/2}(z)$ utilizando a aproximação de Sommerfeld. (b) Usando os resultados anteriores encontre expressões para a densidade de partículas $n = N/V$ como função do potencial químico μ e a temperatura T. (c) Encontre o potencial químico, a energia interna, a pressão e o calor específico a $V = \textit{constante}$ como função da energia de Fermi ϵ_F e a temperatura T.

5. (a) Considere um gás ideal de férmions relativísticos, i.e. $\epsilon = \left[p^2c^2 + m^2c^4\right]^{1/2}$. Mostre que no limite ultrarelativístico $p \to \infty$ a equação de estado é $PV = E/3$ onde P é a pressão e E é a energia interna. Dica: Calcule E como a integral de $\epsilon \langle n_\epsilon \rangle$ e compare com o resultado de calcular explicitamente $PV = kT \ln \Xi$. (b) Calcule a energia de Fermi desse sistema no limite ultrarelativístico. (c) Qual é a energia do sistema no estado fundamental? E a pressão?

6. Diamagnetismo de Landau: (a) Explique qualitativamente o fenômeno do diamagnetismo. (b) Mostre que em presencia de um campo magnético externo H, o movimento orbital dos elétrons fica quantizado em níveis de Landau. Encontre a degenerescência de cada nível de Landau. (c) Encontre o logaritmo da grande função de partição $\ln \Xi$ dos elétrons no limite clássico (altas temperaturas ou baixas densidades), e calcule a magnetização média. (d) Calcule a susceptibilidade magnética no limite de campo fraco $\mu_B H \ll kT$.

7. Efeito de Haas-van Alphen: considere um gás de N elétrons a temperatura zero em presença de um campo magnético externo H. (a) mostre que existe um valor H_0 do campo magnético acima do qual todas as partículas do sistema ocupam o nível de Landau mais baixo. (b)

Calcule a energia do sistema para $H > H_0$ e $H < H_0$. (c) Calcule a magnetização e a susceptibilidade para $H > H_0$ e $H < H_0$. Discuta o resultado.

8. Paramagnetismo de Pauli: (a) Explique qualitativamente o fenômeno do paramagnetismo. (b) Mostre que os autovalores de energia do sistema de N elétrons podem ser escritos como:

$$E_n = \sum_p (n_p^+ + n_p^-) \frac{p^2}{2m} \mu_B H (N_+ - N_-). \tag{2}$$

(c) Mostre que a função de partição canônica do sistema pode ser escrita como:

$$Q(N) \quad = \quad \exp(-\beta \mu_B H N) \sum_{N_+=0}^{N} Q_0(N_+) Q_0(N - N_+) \exp(2\beta \mu_B H N_+) \tag{3}$$

onde Q_0 é a função de partição de um sistema fictício de "férmions de spin zero". (d) Para calcular $\ln Q(N)$ podemos aproximar a somatória pelo maior termo da mesma. Justifique essa aproximação e mostre que ela leva à condição:

$$\mu_0(\overline{N}_+) - \mu_0(N - \overline{N}_+) \quad = \quad 2\mu_B H \tag{4}$$

onde μ_0 é o potencial químico de um sistema de "férmions de spin zero". (e) Calcule a magnetização média M e a susceptibilidade magnética χ no limite de campo magnético fraco e encontre expressões para χ no limite $T \to \infty$ e $T \to 0$.