Geometria (euclidiana)

Professor: jair.donadelli@ufabc.edu.br

página da disciplina na web:
http://professor.ufabc.edu.br/~jair.donadelli/geometria

Universidade Federal do ABC

Euclides (circa 330 aC – 260 aC) nasceu na Síria e estudou em Atenas.

Os Elementos, de Euclides: provavelmente, o livro científico mais reproduzido, estudado e influente de todos os tempos.

Têm uma importância excepcional na história da matemática.

- Organiza de modo sistemático "todo conhecimento" da época.
- Apresenta a geometria como um sistema lógico.
- As definições, os axiomas (ou noções comuns), os postulados e as proposições são expostos de modo organizado, cada proposição resulta das definições, dos axiomas, dos postulados ou das proposições anteriores, de acordo com uma demonstração rigorosa (tem deficiências para o padrão atual de rigor).
- Euclides foi o primeiro a utilizar este método, chamado axiomático.

No que se refere a geometria plana, no *Elementos* são

- 23 definições, por exemplo, *ponto*, *linha* (curva), *reta*, *círculo*, *triângulo*, *ângulo*, *retas paralelas*, e *retas perpendiculares*. Algumas precisas, outras muito vagas
  - "um ponto é o que não tem parte"
  - "uma reta é um comprimento sem largura"
  - "uma superfície é o que tem apenas comprimento e largura"

- 5 axiomas (chamados de *noções comuns*), ou proposições lógicas:
  1. Coisas iguais a uma mesma coisa são iguais;
  2. se iguais são adicionados a iguais, então os totais são iguais;
  3. se iguais são subtraídos de iguais, então os totais são iguais;
  4. coisas que coincidem uma com a outra são iguais;
  5. o todo é maior do que a parte.

- 5 **postulados**
  1. dados dois pontos, há um segmento de reta que os une;
  2. um segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente para construir uma reta;
  3. dados um ponto e uma distância pode-se construir um círculo de centro no ponto e raio igual a distância;

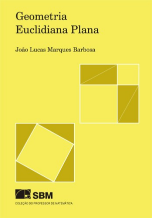
  4. todos os ângulos retos são iguais;
  5. (**postulado das paralelas**) se uma linha reta cortar duas outras retas de modo que a soma dos dois ângulos internos de um mesmo lado seja menor do que dois ângulos retos, então essas duas retas, quando prolongadas, cruzam-se do mesmo lado em que estão esses dois ângulos.
- demonstra 456 teoremas.

São equivalentes ao 5º postulado (dentre muitas outras):

- Dados uma reta e um ponto fora da reta existe uma única reta paralela a reta dada que passa pelo ponto.
- Se linhas paralelas são cortadas por uma transversal, ângulos interiores alternados são iguais.
- A soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos.
- O Teorema de Pitágoras.
- O inverso do Teorema de Pitágoras.
- Os lados opostos de um paralelogramo são congruentes.
- Existe um círculo passando por três pontos não colineares quaisquer,
- A circunferência de qualquer círculo de raio R é $2\pi R$.
- A área de qualquer círculo de raio R é πR^2.
- Uma linha não pode ficar inteiramente no interior de um ângulo.

Os postulados de Euclides não são suficientes para demonstrar todos os resultados da geometria plana, existem lacunas que não são possíveis preenchê-las somente com o conteúdo dos Elementos.

Referência para tratamento axiomático moderno:



Geometria Euclidiana Plana, João Lucas Marques Barbosa.

Nossa abordagem é menos pragmática.

Conceitos Básicos
e
Notações

Conceitos primitivos:

1. ponto;
   Notação: letras latinas maiúsculas denotam pontos;
2. reta;
   Notação: letras latinas minúsculas denotam retas;
3. pertencer a;
   Notação: $\in$
4. está entre (o ponto C está entre A e B);

O **plano** é constituído de pontos e retas.

Estudaremos propriedades relativas de pontos e retas do plano.

Axioma 1

Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.

Notação: a reta determinada pelos pontos A e B é denotada $\overleftrightarrow{AB}$.

Axioma 2

Em toda reta existem pelo menos dois pontos distintos.

Axioma 3

Existem três pontos distintos com a propriedade que nenhuma reta passa pelos três pontos.

Consequências simples,porém importantes:

- Toda reta possui pelo menos dois pontos.
- Não existe uma reta contendo todos os pontos.
- Existem pelo menos três pontos no plano.

Proposição 1.1.

Duas retas distintas ou não se intersectam ou intersectam-se em um único ponto.

Demonstração.

Sejam m e n duas retas distintas (por quê existem?). Se m e n possuem pelo menos dois pontos distintos em comum então, pelo Axioma 1, m e n coincidem, que é uma contradição com o fato que m e n são retas distintas. Logo, m e n ou possuem um ponto em comum ou nenhum. ♦

Exercícios:

Proposição 1.2.

Para todo ponto P, existem pelo menos duas retas distintas passando por P.

Dem.: Pelo Axioma 3, existe um ponto Q distinto de P. Pelo Axioma 1 existe uma única reta r que passa por P e Q. Pelo Axioma 3 existe um ponto R que não pertence a r. Pelo Axioma 1, existe uma reta s distinta de r que contém os pontos P e R.

Proposição 1.3.

Para todo ponto P existe pelo menos uma reta l que não passa por P.

Dem.: Pelo Axioma 3, existem pontos Q e R distintos de P tais que nenhuma reta passa pelos três pontos P,Q,R. Pelo Axioma 1 existe uma única reta r que passa por Q e R. Pelo Axioma 3, r não contém o ponto P.

Conceitos:

segmento Dados os pontos A e B distintos sobre a reta r o *segmento* AB é a porção da reta r dos pontos entre A e B, que são chamados pontos *extremos*.

comprimento $\overline{AB}$ é o comprimento do segmento AB (em cm)

distância a distância entre os pontos A e B é

$$d(A, B) = \overline{AB}$$

Conceitos:

semirreta Um ponto A na reta r divide r em duas partes, cada uma chamada de **semirreta** com origem em A.

Sejam B e C pontos em semirretas distintas com origem em A.

$\overrightarrow{AB}$ é a semirreta com origem em A e que contém B

$\overrightarrow{AC}$ é a semirreta com origem em A e que contém C

semiplano Uma reta r divide o plano em duas regiões, cada uma chamada *semiplano* delimitado por r.

Dois pontos distintos, A e B, estão em um **mesmo lado da reta** r se o segmento AB não a intersecta, caso contrário dizemos que A e B estão em **lados opostos** de r. O **semiplano determinado por** r **contendo** A é o conjunto dos pontos de r e dos pontos C tais que A e C estão em um mesmo lado da reta r.

A rigor, esses conceitos dependem de axiomas, por exemplo:

Axiomas de ordem: escreveremos $A - B - C$ para dizer que o ponto B está entre os pontos A e C.

Axioma

Se $A - B - C$, então A, B e C são pontos distintos de uma mesma reta e $C - B - A$.

Axioma

Dados três pontos distintos de uma reta, um e apenas um deles está entre os outros dois.

Axioma

Dados dois pontos distintos B e D, existem pontos A, C e E pertencentes à reta contendo B e D, tais que $A - B - D$, $B - C - D$ e $B - D - E$.

Axiomas de medição:

Axioma

A todo segmento corresponde um número maior ou igual a zero. Este número é zero se e somente se os extremos coincidem.

Axioma

Os pontos de uma reta podem ser sempre colocados em correspondência biunívoca com os números reais, de modo que o módulo da diferença entre estes números meça a distância entre os pontos correspondentes.

Círculos

Sejam O ponto e r real positivo.

$\Gamma(O; r)$=**círculo de centro O e raio r**, i.e., é o conjunto dos pontos P tais que

$$d(O, P) = r$$

interior do círculo $\Gamma(O; r)$ é o conjunto dos pontos P tais que

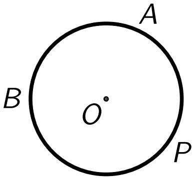
$$d(O, P) < r$$

exterior do círculo $\Gamma(O; r)$ é o conjunto dos pontos P tais que

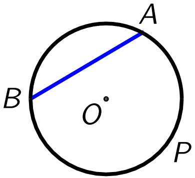
$$d(O, P) > r$$

Círculos

Sejam P, A e B pontos do círculo $\Gamma(O; r)$.



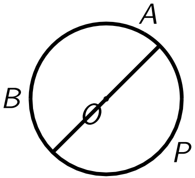
Sejam P, A e B pontos do círculo $\Gamma(O; r)$.



AB é **corda**.

Círculos

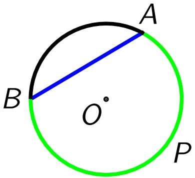
Sejam P, A e B pontos do círculo $\Gamma(O; r)$.



AB é **corda**. Se $O \in AB$ então AB é **diâmetro**.

Círculos

Sejam P, A e B pontos do círculo $\Gamma(O; r)$.



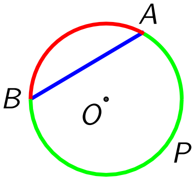
AB é **corda**. Se $O \in AB$ então AB é **diâmetro**.

Os pontos de Γ delimitados por A e B são os **arcos** $\overset{\frown}{AB}$.

arco maior $\overset{\frown}{AB}$

Círculos

Sejam P, A e B pontos do círculo $\Gamma(O;r)$.



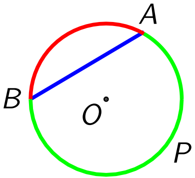
AB é **corda**. Se $O \in AB$ então AB é **diâmetro**.

Os pontos de Γ delimitados por A e B são os **arcos** $\overset{\frown}{AB}$.

arco maior $\overset{\frown}{AB}$ e o **arco menor** $\overset{\frown}{AB}$

Círculos

Sejam P, A e B pontos do círculo $\Gamma(O; r)$.



AB é **corda**. Se $O \in AB$ então AB é **diâmetro**.

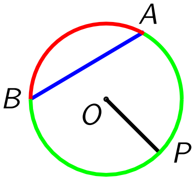
Os pontos de Γ delimitados por A e B são os **arcos** $\overset{\frown}{AB}$.

arco maior $\overset{\frown}{AB}$ e o **arco menor** $\overset{\frown}{AB}$

$\overset{\frown}{APB}$ denota o arco que contém P.

Círculos

Sejam P, A e B pontos do círculo $\Gamma(O; r)$.



AB é **corda**. Se $O \in AB$ então AB é **diâmetro**.

Os pontos de Γ delimitados por A e B são os **arcos** $\widehat{AB}$.

arco maior $\widehat{AB}$ e o **arco menor** $\widehat{AB}$

$\widehat{APB}$ denota o arco que contém P.

OP é **raio**, assim como OA e OB.

ângulos

Para a próxima aula:

1. Assistir ao vídeo Polígonos (10 min.)
2. Problema 3.1, pg. 24 do livro texto.