

Esta unidade será dedicada à resolução de uma lista de problemas sobre a matéria até agora desenvolvida.

1. (a) Quantos múltiplos de 5 existem no intervalo  $[1, 120]$ ? e no intervalo  $[1, 174]$ ?  
(b) Quantos múltiplos de 7 existem em cada um dos intervalos  $[70, 342]$  e  $[72, 342]$ ?
2. Dados  $0 < a \leq n < m$ , mostre que no intervalo  $[1, n]$  existem  $q$  múltiplos de  $a$ , onde  $q$  é o quociente da divisão de  $n$  por  $a$ . Quantos são os múltiplos de  $a$  no intervalo  $[n, m]$ ? (Na última situação, divida a análise em dois casos:  $n$  múltiplo de  $a$  e o contrário.)
3. Mostre que dados  $m$  inteiros consecutivos um, e apenas um, deles é múltiplo de  $m$ .
4. Mostre que o produto de quatro números inteiros consecutivos, quaisquer, é sempre múltiplo de 24.
5. (a) Ache o menor inteiro positivo  $n$  tal que o número  $4n^2 + 1$  seja divisível por 65.  
(b) Mostre que existem infinitos múltiplos de 65 da forma  $4n^2 + 1$ .  
(c) Mostre que se um dado número divide um número da forma  $4n^2 + 1$ , ele dividirá uma infinidade desses números.  
(d) Para este último resultado, existe algo de especial nos números da forma  $4n^2 + 1$ ? Teste o seu resultado para números da forma  $an^2 + bn + c$ , onde  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , com  $a$  e  $b$  não simultaneamente nulos.  
(e) Mostre que existem infinitos múltiplos de 7 da forma  $8n^2 + 3n + 4$ .
6. (a) Sejam dados os dois números  $a = 10c + r$  e  $b = c - 2r$ , com  $c, r \in \mathbb{Z}$ . Mostre que  $a$  é divisível por 7 se, e somente se  $b$  é divisível por 7.  
(b) Deduza o seguinte critério de divisibilidade por 7:  
*O número  $n = a_r \cdots a_1 a_0$  é divisível por 7 se, e somente se, o número  $a_r \cdots a_1 - 2a_0$  é divisível por 7.*



- (c) Utilize repetidas vezes o critério acima para verificar se 2.368 é ou não divisível por 7.

Um número inteiro  $n$  é dito *um quadrado* se existe  $a \in \mathbb{Z}$  tal que  $n = a^2$ .

Dizemos que  $n$  é *uma potência  $m$ -ésima* quando  $n = a^m$ .

7. (a) Mostre que o algarismo das unidades de um quadrado só pode ser um dos seguintes: 0, 1, 4, 5, 6 e 9.
- (b) Mostre que nenhum dos números 22, 222, 2222, ..., ou 33, 333, 3333, ..., ou 77, 777, 7777, ..., ou ainda 88, 888, 8888, ... pode ser um quadrado.
8. (a) Mostre que todo quadrado ímpar é da forma  $4n + 1$ .
- (b) Mostre que nenhum número na sequência 11, 111, 1111, 11111, etc., é um quadrado.
- (c) Mostre que nenhum número na sequência 44, 444, 4444, 44444, etc., é um quadrado.
- (d) Mostre que nenhum número na sequência 99, 999, 9999, 99999, etc., é um quadrado.
- (e) Mostre que nenhum número na sequência 55, 555, 5555, 55555, etc., é um quadrado.
9. (a) Mostre que nenhum número da forma  $4n + 2$  é um quadrado.
- (b) Mostre que nenhum dos números 66, 666, 6666, ... é um quadrado.
10. (a) Mostre que a soma de quatro inteiros consecutivos nunca é um quadrado.
- (b) Mostre que a soma dos quadrados de quatro inteiros consecutivos nunca é um quadrado. Faça o mesmo para a soma dos quadrados de três inteiros consecutivos.
11. (a) Mostre que todo quadrado é da forma  $8n$ ,  $8n + 1$  ou  $8n + 4$ .
- (b) Mostre que nenhum número na sequência 3, 11, 19, 27, etc., é um quadrado.



12. Mostre que numa sequência de inteiros da forma

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots,$$

se existir algum número que é quadrado, existirão infinitos números que são quadrados.

13. Dados dois inteiros  $a$  e  $b$  distintos, mostre que existem infinitos números  $n$  para os quais  $\text{mdc}(a + n, b + n) = 1$ .

14. Resolva o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \text{mdc}(x, y) = 6 \\ \text{mmc}(x, y) = 60 \end{cases}$$

15. Observe que  $\text{mdc}(x, y)$  divide  $\text{mmc}(x, y)$ , quaisquer que sejam  $x, y \in \mathbb{Z}$ , não nulos.

Mostre que se no seguinte sistema:

$$\begin{cases} \text{mdc}(x, y) = d \\ \text{mmc}(x, y) = m \end{cases}$$

$d \nmid m$ , ele não admite solução. Mostre que se  $d \mid m$ , o sistema sempre admite solução.

16. Mostre que

(a)  $\text{mdc}(a^2, b^2) = [\text{mdc}(a, b)]^2$ .

(b)  $\text{mmc}(a^2, b^2) = [\text{mmc}(a, b)]^2$ .

(c) Generalize.

17. (Esse é um problema proposto no século 16) Um total de 41 pessoas entre homens, mulheres e crianças foram a um banquete e juntos gastaram 40 *patacas*. Cada homem pagou 4 *patacas*, cada mulher 3 *patacas* e cada criança um terço de *pataca*. Quantos homens, quantas mulheres e quantas crianças havia no banquete?

18. (Proposto por Euler) Um grupo de homens e mulheres gastaram numa taberna 1.000 *patacas*. Cada homem pagou 19 *patacas* e cada mulher 13. Quantos eram os homens e quantas eram as mulheres?



19. (Proposto por Euler) Uma pessoa comprou cavalos e bois. Foram pagos 31 *escudos* por cavalo e 20 por boi e sabe-se que todos os bois custaram 7 *escudos* a mais do que todos os cavalos. Quantos cavalos e quantos bois foram comprados?
20. Em um certo país, as cédulas são de \$4 e \$7. Quais das afirmações a seguir são verdadeiras? Com elas é possível pagar, sem troco, qualquer quantia inteira
- (a) a partir de \$11, inclusive.
  - (b) a partir de \$18, inclusive
  - (c) ímpar, a partir de \$7, inclusive
  - (d) que seja \$1 maior do que um múltiplo de \$3
  - (e) que seja \$1 menor do que um múltiplo de \$3

