

Lista 1 de MA14 — Aritmética (2017)

1. Use indução em n para demonstrar o **Princípio das Gavetas**: *queremos guardar m objetos em n gavetas. Se $m > n$, então alguma gaveta deverá conter mais de um objeto.*
2. Deduza do princípio da boa ordem para subconjuntos de inteiros limitados inferiormente o seguinte princípio de indução: Sejam a_i ($i = 0, 1, \dots$) uma sequência estritamente crescente de números inteiros e $P(n)$ um predicado a respeito de $n \in \mathbb{N}$.

Se

(a) $P(a_i)$ é verdadeiro para todo $i \geq 0$ e

(b) $P(j)$ verdadeiro implica $P(j - 1)$ verdadeiro, para todo $j \geq a_1$

então $P(n)$ é verdadeiro para todo $n \geq a_0$.

3. Descubra uma falha na prova da afirmação *todos os números naturais são iguais*. Denotamos por $\max\{a, b\}$ o maior número inteiro não-negativo dentre a e b . Vamos mostrar por indução que se $\max\{a, b\} = n$ então $a = b$.

base: Se $\max\{a, b\} = 0$ então $a = b = 0$.

passo: Seja $k > 0$ um inteiro e suponha que se $\max\{a, b\} = k$ então $a = b$ (hipótese indutiva). Vamos provar

se $\max\{a, b\} = k + 1$ então $a = b$.

Suponha que $\max\{a, b\} = k + 1$. Então $\max\{a - 1, b - 1\} = k$ e pela hipótese indutiva $a - 1 = b - 1$, portanto $a = b$. \square

4. Prove que para todo natural n

(a) $8|3^{2n} + 7$

(b) $3|10^n - 7^n$.

5. Prove que $8|n^2 - 1$ para todo $n > 0$ ímpar e que $3|2^n - 1$ para todo $n > 0$ par.
6. Prove que $a^{2^m} + 1|a^{2^n} - 1$ para todo $m > n \geq 0$.
7. Prove que $n^2|(n + 1)^n - 1$ para todo $n > 0$. (dica: teorema do binômio de Newton)
8. Prove que se $3|(a^2 + b^2)$ então a e b são divisíveis por 3.
9. Mostre que se n é um cubo e um quadrado então é da forma $5k$, $5n + 1$ ou $5n + 4$
10. Um número é livre de quadrado se nenhum quadrado $\neq 1$ o divide. Qual a maior quantidade de naturais consecutivos livre de quadrados?
11. Prove que se os naturais a, b, c verificam $a^2 = b^2 + c^2$ então entre eles há um múltiplo de 2 e um múltiplo de 5.
12. Seja $n = [a_r \cdots a_1 a_0]_5$ um natural na base 5. Prove que $4|n \Leftrightarrow 4|(a_r + \cdots + a_1 + a_0)$.
13. Prove que se n é divisível por a e por b e $\text{mdc}(a, b) = 1$ então $ab|n$.

14. Prove que para $a, b, c \in \mathbb{N}$ o mdc satisfaz as seguintes propriedades:

- (a) $(a, b) = (a, b + a \cdot c)$.
- (b) Se $(a, c) = 1$ e $(b, c) = 1$ então $(ab, c) = 1$.
- (c) $(n! + 1, (n + 1)! + 1) = 1$ para todo $n > 0$
- (d) $[a, b] = ab$ se e só se $(a, b) = 1$
- (e) se $a|c$ e $c|b$ e $(a, b) = 1$, então $a = 1$.
- (f) $(a, b) = (a - xb, b)$ para quaisquer $a, b, x \in \mathbb{Z}$.

15. Prove que para quaisquer naturais a, b vale $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = [a, b]\mathbb{Z}$

16. Determine o quociente e o resto das divisões inteiras de

- (a) 390 por 74
- (b) -124 por 18
- (c) 420 por -58

17. Na divisão de -345 por $b > 0$ o resto é 12. Quais são os possíveis divisores e quocientes?

18. Mostre que um dos inteiros $a, a + 2, a + 4$ é divisível por 3.

19. Dados um inteiro a e um natural b prove que existe um único inteiro n tal que $nb \leq a < (n + 1)b$.

20. Determine todas as soluções inteiras de

- (a) $3x + 4y = 20$
- (b) $5x - 2y = 2$
- (c) $18x - 20y = -8$

21. Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$ e defina $S(a, b) := \{xa + yb : x, y \in \mathbb{N}^0\}$ e $L(a, b) := S(a, b) \setminus \mathbb{N}$. Prove que

- (a) para cada $c \in S(a, b)$ existem únicos $m, n \in \mathbb{N}$ com $m < b$ tais que $c = ma + nb$.
- (b) $L(a, b) = \{ma - nb \in \mathbb{N} : m, n \in \mathbb{N}, m < b\}$.
- (c) $aX + bY = c$ tem solução em \mathbb{N} se, e só se, $c \notin L(a, b)$.
- (d) Se (a, b) então para todo $c \geq (a - 1)(b - 1)$ a equação $aX + bY = c$ tem solução em \mathbb{N} .
- (e) Suponha que $(a, b) = 1$ e $aX + bY = c$ tem solução em \mathbb{N} . Determine todas as soluções da equação em função da solução inicial dada pelo item (a).

22. Quantas soluções positivas tem $10X + 28Y = 1240$?

23. Se um macaco sobe uma escada de 2 em 2 degraus, sobra 1 degrau; se sobe de 3 em 3, sobram 2. Quantos degraus há sabendo que é múltiplo de 7 entre 40 e 100?

24. Prove que nenhum número natural deixa resto 5 quando dividido por 12 e resto 4 quando dividido por 15.

25. Prove que para a, b não ambos nulos, o inteiro positivo definido por $[a, b] := \frac{|ab|}{(a, b)}$ satisfaz $[a, b] = \min(a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} \cap \mathbb{Z}^+)$.