19.5 Exercícios

1. Calcule as integrais indefinidas a seguir:

a) $\displaystyle\int x(x^2+1)^3\,dx$; d) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x+2}\,dx$ g) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(x+2)}\,dx$;

b) $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2+2x+4)^2}\,dx$; e) $\displaystyle\int \frac{2+\ln x}{x}\,dx$; h) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} t}{1+\cos t}\,dt$;

c) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} t}{1+\cos t}\,dt$; f) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 t\ \cos t\,dt$; i) $\displaystyle\int t(2-t)^{3/2}\,dt$.

2. Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos a fórmula

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx \;=\; \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{-1}^{1} \;=-2.$$

Sendo a função $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ positiva, há uma aparente contradição. Como você explica este fenômeno?

3. Seja g uma função diferenciável tal que $g'(x)$ é uma função contínua e seja f uma função contínua. Suponha que $[a,\,b]$ esteja contido no domínio de g e que $g([a,\,b])$ esteja contido no domínio de f. Mostre que

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx \;=\; \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Use esta fórmula para calcular $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,dx$.

4. Calcule as integrais definidas a seguir:

a) $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx$; c) $\displaystyle\int_0^{\ln 3} e^x(1+e^x)^2\,dx$;

b) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cot\theta\,d\theta$; d) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$.

5. Use as fórmulas a seguir para calcular as integrais dadas.

- $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx \;=\; \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} \;+\; C$;

- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx \;=\; \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} \;+\; C, \quad |x| < a;$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx \;=\; \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \left|\frac{x}{a}\right| \;+\; C, \quad |x| > a.$

a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{4 + x^6}\, dx;$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 1}}\, dx;$

c) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}}\, dx;$

d) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2 + 2x + 2}\, dx.$

19.7 Exercícios

1. Calcule as integrais a seguir:

a) $\displaystyle\int (x+1)\cos x\,dx$;

b) $\displaystyle\int x^2 \text{ sen } 3x\,dx$;

c) $\displaystyle\int x^2\,e^{-x}\,dx$;

d) $\displaystyle\int \ln x\,dx$;

e) $\displaystyle\int_1^e x\,\ln x\,dx$;

f) $\displaystyle\int e^{2x} \text{ sen } x\,dx$;

g) $\displaystyle\int \cos 2x \,\text{ sen } x\,dx$;

h) $\displaystyle\int_0^{1/2} \text{arcsen } x\,dx$.

2. Calcule $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \cos\sqrt{x}\,dx$.

Sugestão: faça a substituição $u = \sqrt{x}$ e observe que isso leva a $dx = 2u\,du$.