Exercícios da aula 3

1. Defina $f : R \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = |x|$ use $x < 1$ e $f(x) = 1$ se $x > 1$. Use o grafico de f para intuir o valor de $\lim_{x \to 1} f(x)$.

2. Calcule $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}$.

3. Calcule $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x^2}$.

4. Mostre que $\lim_{x \to a} \dfrac{x^k - a^k}{x - a} = ka^{k-1}$. Use esse resultado para mostrar que $\lim_{x \to a} x^k - a^k = 0$.

5. Calcule $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - 1}{\sqrt[3]{1 + x} - 1}$ fazendo a mudança de variável $1 + x = u^6$.

6. Calcule os limites de $f(x)$ quando $x \to a^-$, $x \to a^+$ e $x \to a$ nos casos abaixo.
   a. $f(x) = -2/(x-2)^2$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $a = 2$.
   b. $f(x) = 1/(x-1)^3$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $a = 1$.
   c. $f(x) = -2/(x-2)^2$ se $x < 2$, $f(2) = 0$ e $f(x) = 1/(2-x)^3$ se $x > 2$, $a = 2$.

7. Aponte o(s) erro(s) na seguinte prova de $\lim_{x \to a} x^2 = a^2$, $a > 0$:

   Dado qualquer $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \min\{\sqrt{a^2 + \varepsilon} - a, a - \sqrt{a^2 - \varepsilon}\}$ assim, $0 < |x - a| < \delta \Leftrightarrow x \neq a$ e $a - \delta < x < a + \delta$ e, pela escolha de δ, podemos concluir de $a - \delta < x < a + \delta$ que $\sqrt{a^2 - \varepsilon} < x < \sqrt{a^2 + \varepsilon}$ portanto $a^2 - \varepsilon < x^2 < a^2 + \varepsilon$, ou seja, $-\varepsilon < x^2 - a^2 < \varepsilon$, portanto $|x^2 - a^2| < \varepsilon$.