Exercícios da aula 5

1. Sejam $f, g : D \to \mathbb{R}$ funções, $a \in D$ tal que todo intervalo aberto contendo a intersecta $D \setminus \{a\}$. Suponha que f e g sejam contínuas em a e $f(a) > g(a)$. Mostre que existe um $r > 0$ tal que, para todo $x \in (a - r, a + r) \cap D$, vale $f(x) > g(x)$.
2. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{Q}$ uma função contínua. Mostre que f é constante.
3. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(0) > 0$ e $f(1) < 1$. Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe um número $c \in [0, 1]$, tal que $f(c) = \sqrt[n]{c}$.
4. Encontre um exemplo de uma função contínua definida em um intervalo aberto cuja imagem é um intervalo fechado e limitado.
5. Encontre um exemplo de uma função contínua definida em um intervalo aberto cuja imagem é um intervalo semi-fechado, mas não limitado.
6. Encontre uma f contínua que seja limitada mas que não admita máximo e não admita mínimo.
7. Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínuas, tais que $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$. Mostre que a equação $f(x) = g(x)$ tem solução.
8. Uma lata cilíndrica fechada deve ser produzida com folhas de metal para conter um litro de líquido. Existe alguma dimensão da lata que proporciona maior economia de material?
9. Use o TVI para mostrar que existe um quadrado com diagonal de medida entre r e $2r$ e área que é a metade da área do círculo de raio r.
10. Seja $f : [a, b] \to [a, b]$ uma função contínua. Mostre que f admite ponto fixo. No caso $f : (a, b) \to (a, b)$ a função admite ponto fixo?