Conteúdo

Exercícios Sistemas Lineares

(1) No Super Bowl I, em 15 de janeiro de 1967, o Green Bay Packers derrotou o Kansas City Chiefs pela pontuação de 35 a 10. O total de pontos obtidos veio de uma combinação de touchdowns, extra-point kicks e field goals, que valem 6, 1 e 3 pontos, respectivamente. Os números de touchdowns e de extra-point kicks foram iguais. Houve seis vezes mais touchdowns do que field goals. Encontrar os números de touchdowns, extra-point kicks e field goals marcados. (Fonte: National Football League.)

(2) Uma mistura de 6 galões do produto químico A, 8 galões do produto químico B e 13 galões de produto químico C é necessária para matar um inseto destrutivo para a colheita. Um spray comercial X contém 1, 2 e 2 partes, respectivamente, desses produtos químicos. O spray comercial Y contém apenas o produto químico C. O spray comercial Z contém os produtos químicos A, B e C em quantidades iguais. Quanto de cada tipo de spray é necessário para obter a mistura desejada?

(3) Um copo de oito onças de suco de maçã e um copo de oito onças de suco de laranja contém um total de 227 miligramas de vitamina C. Dois copos de oito onças de suco de maçã e três copos de oito onças de suco de laranja contém um total de 578 miligramas de vitamina C. Quanta vitamina C há em um copo de oito onças de cada tipo de suco?

(4) Dois aviões saem do aeroporto internacional de Los Angeles e voam em direções opostas. O segundo avião começa 12 hora depois do primeiro avião, mas sua velocidade escalar é 80 quilômetros por hora maior. Duas horas depois de o primeiro avião partir, os aviões estão a 3.200 quilômetros de distância. Encontre a velocidade de voo de cada avião.

(5) Um garçom examina a quantidade de dinheiro ganho em gorjetas depois de trabalhar um turno de 8 horas. O garçom tem um total de \$ 95 em notas de \$ 1, \$ 5, \$ 10 e \$ 20. O número total de notas é 26. O número de notas de \$ 5 é 4 vezes o número de notas de \$ 10, e o número de notas de \$ 1 é 1 a menos do que o dobro do número de notas de \$ 5. Escreva um sistema de equações lineares para representar a situação. Em seguida, use matrizes para encontrar número de notas de cada valor.

(6) A tabela mostra a população do Brasil de acordo com o IBGE.

Ano	1970	1980	1990	2000
População (em milhões)	94	121	146	169

(a) Encontre um polinômio cúbico que ajuste os dados e use-o para estimar a população em 2010.

(b) A população em 2010 foi de 190 milhões. Compare com a estimativa dada pelo polinômio.

(7) Uma empresa tem vendas (medidas em milhões) de \$ 50, \$ 60 e \$ 75 durante três anos consecutivos. Encontre uma função quadrática que ajuste os dados e use-a para prever as vendas durante o quarto ano.

(8) Uma equipe de gerenciamento de animais selvagens estudou a população de cervos em uma pequena área de reserva natural. A tabela mostra a população e o número de anos desde o início do estudo.

Ano	0	4	80
População	80	68	30

(a) configure um sistema de equações para ajustar os dados com uma função quadrática.

(b) Resolva o sistema.

(c) Use uma ferramenta gráfica para ajustar os dados com um modelo quadrático.

(9) Encontre um sistema de duas equações em duas variáveis, x_1 e x_2 que tenha o conjunto solução dado pela representação paramétrica $x_1 = t$ e $x_2 = 3t - 4$, onde t é um número real arbitrário. A seguir, mostre que as soluções do sistema também podem ser escritas como $x_1 = \frac{4}{3}t + \frac{t}{3}$ e $x_2 = t$.

(10) Determine o(s) valor(es) de k de modo que o sistema de equações lineares tenha o número indicado de soluções.

(a) Nenhuma solução

$$\begin{cases} x + ky = 2 \\ kx + y = 4 \end{cases}$$

(b) Exatamente uma solução

$$\begin{cases} x + ky = 0 \\ kx + y = 0 \end{cases}$$

(c) Exatamente uma solução

$$\begin{cases} kx + 2ky + 3kz = 4k \\ x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

(d) Nenhuma solução

$$\begin{cases} x + 2y + kz = 6 \\ 3x + 6y + 8z = 4 \end{cases}$$

(e) Infinitas soluções

$$\begin{cases} 4x + ky = 6 \\ kx + y = -3 \end{cases}$$

(f) Infinitas soluções

$$\begin{cases} kx + y = 16 \\ 3x - 4y = -64 \end{cases}$$

(11) Determine os valores de k de modo que o sistema de equações lineares não tenha uma solução única

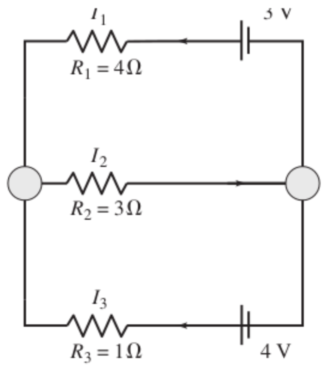
$$\begin{cases} x + y + kz = 3 \\ x + ky + z = 2 \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$$

(12) Encontre todos os valores de λ para o qual o sistema linear homogêneo tem soluções não triviais.

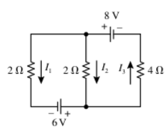
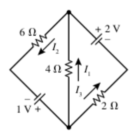
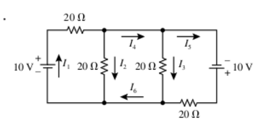
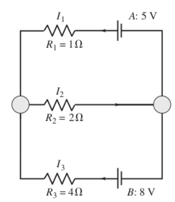
(a) $(\lambda - 2)x + y = 0, \; x + (\lambda - 2)y = 0.$

(b) $(2\lambda + 9)x - 5y = 0, \; x - \lambda y = 0.$

(13) Determine as correntes I_1 , I_2 e I_3 para a rede elétrica mostrada na figura.



(14) Analise os circuitos elétricos dados encontrando as correntes desconhecidas

(15) A tabela mostra os lucros líquidos (milhões de dólares) da Microsoft de 2007 até 2014.

Ano	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Lucro líquido	14.065	17.681	14.569	18.760	23.150	23.171	22.453	22.074

(a) Configure um sistema de equações para ajustar os dados de 2007, 2008, 2009 e 2010 com um polinômio cúbico.

(b) Resolva o sistema. A solução produz um modelo razoável para determinar os lucros líquidos após 2010? Explique.

(16) Demonstre que se uma função polinomial $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ se anula em $x = 0$ e $x = \pm 1$ então $a_0 = a_1 = a_2 = 0$.

Generalize a resposta acima, demonstre que se uma função polinomial $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$ se anula em mais que n valores reais então $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$.

Conclua que existe no máximo uma funcão polinomial de grau menor ou igual a $n - 1$ cujo gráfico passa por n pontos no plano com coordenadas x distintas.

(17) A tabela mostra os lucros líquidos (milhões de reais) da WEG, fabricante de equipamentos elétricos, de 2015 até 2020.

Ano	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Lucro líquido	664	845	962	1.165	1.127	1.140	1.344	1.632

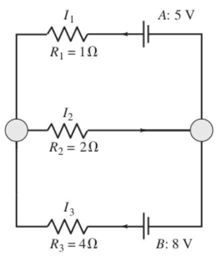
(a) Monte um sistema de equações para ajustar os dados de 2012, 2013, 2014 e 2015 com um polinômio cúbico.

(b) Resolva o sistema. A solução produz um modelo razoável para determinar os lucros líquidos após 2015?

(c) Repita para um polinômio de grau 4 para ajustar os dados de 2012 a 2016.

(18) Encontre um sistema de duas equações em três variáveis, x_1, x_2 e x_3, que tenha o conjunto solução dado pela representação paramétrica $x_1 = t$, $x_2 = s$ e $x_3 = 3+s-t$, onde $s, t \in \mathbb{R}$. Também, mostre que as soluções do sistema também podem ser escritas como $x_1 = 3 + s - t$, $x_2 = s$ e $x_3 = t$.

(19) Determine as correntes I_1 , I_2 e I_3 na rede elétrica mostrada na figura. Como o resultado é afetado quando A é alterado para 2 volts e B é alterado para 6 volts?



(20) A tabela mostra as vendas (em bilhões de dólares) do Walmart de 2006 a 2013.

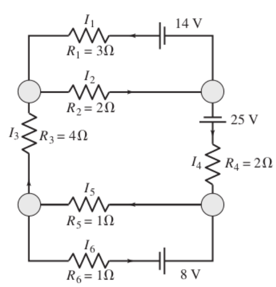
Ano	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Vendas	348,7	378,8	405,6	408,2	421,8	447,0	469,2	476,2

(a) Monte um sistema de equações para ajustar os dados de 2006, 2007, 2008, 2009 e 2010 com um polinômio de quarto grau.

(b) Resolva o sistema. A solução produz um modelo razoável para determinar as vendas após 2010?

(c) Repita para um polinômio de grau 5 para ajustar os dados de 2006 a 2011.

(21) Determine as correntes I_1 a I_6 para a rede elétrica mostrada na figura.



(22) Encontre valores de a, b e c de modo que o sistema de equações lineares tenha (a) exatamente uma solução, (b) infinitas soluções e (c) nenhuma solução. Explique.

$$\begin{cases} x + 5y + z = 0 \\ x + 6y - z = 0 \\ 2x + ay + bz = c \end{cases}$$

(23) Uma pequena corporação de software tomou emprestado \$ 500.000 para expandir sua linha de software. A corporação financiou parte do dinheiro a 3%, parte a 4% e

parte a 5%. Utilize um sistema de equações para determinar o quanto foi financiado a cada taxa sabendo que o juro anual foi de \$ 20.500 e o montante emprestado a 4% foi 2,5 vezes o montante emprestado a 3%.

Exercícios Espaços Vetoriais

(1) Vamos estender um caso visto em videoaula. Tomemos o conjuto $V^2 = (0, \infty) \times (0, \infty)$ formado pelos pares de números reais positivos. Definimos a soma $(a, b) \boxplus (x, y) = (ax, by)$ e a multiplicação por escalar $\lambda \boxdot (x, y) = (x^\lambda, y^\lambda)$. Verifique se essa estrutura define um espaço vetorial real. Se for o caso, verifique todos os axiomas, senão liste todos os axiomas não satisfeitos e dê contra-exemplo para pelo menos um deles.

(2) A famosa sequência de Fibonacci, $(f_i)_i$, é definida por $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ e para $n > 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. Considere o conjunto de todas as sequencias do tipo Fibonacci com os dois números iniciais sendo reais quaisquer

$$\mathcal{F} = \{(x_0, x_1, x_2, \dots) \colon x_0, x_1 \in \mathbb{R} \text{ e } x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \text{ para todo } n \geq 2\}$$

Nesse conjunto consideramos a soma $(x_0, x_1, x_2, \dots) + (y_0, y_1, y_2, \dots) = (x_0 + y_0, x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots)$ e a multiplicação por escalar $\lambda \cdot (x_0, x_1, x_2, \dots) = (\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2, \dots)$. Verifique se $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ define um espaço vetorial real. Se for o caso, verifique todos os axiomas, senão liste todos os axiomas não satisfeitos e dê contra-exemplo para pelo menos um deles.

(3) $\mathbb{F}_2$ é o corpo (finito) dado por $\{0, 1\}$ com as operações

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Agora, vamos definir um espaço vetorial $\mathcal{B}$ sobre $\mathbb{F}_2$ tomando

$$\mathcal{B} = \{(b_1, b_2, \dots, b_n) \colon b_i \in \{0, 1\} \text{ para todo } i\}$$

a soma de vetores é a soma coordenada-a-coordenada de acordo com a tabela acima e a multiplicação por escalar é o produto pelo escalar de cada coordenada também de acordo com a tabela acima. Verifique os axiomas todos os axiomas de espaço vetorial.

(4) Uma matriz quadrada de ordem n é um *quadrado mágico* se a soma dos elementos em cada linha, cada coluna e em ambas diagonais é a mesma. Se, além disso, as entradas contêm cada um dos números $1, 2, \dots, n$ exatamente uma vez, então é chamado *quadrado mágico clássico*. Dê um exemplo de quadrado mágico clássico 3×3. Verifique se os quadrados mágicos 3×3 formam espaço vetorial com a soma e multiplicação por escalar usual para matrizes. Se for o caso, verifique todos os axiomas, senão liste todos os axiomas não satisfeitos e dê contra-exemplo para pelo menos um deles.

(5) Considere os complexos $\mathbb{C}$ como o corpo dos escalares. Tome o conjunto $\mathbb{C}^2$ formado pelos pares ordenados de números complexos e nele defina a soma $(z,w) \oplus (x,y) = (z+x, \bar{w}+\bar{y})$ ($^{-}$ é o conjugado complexo) e o produto por escalar usual, $\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$ onde o produto é o de números complexos. Verifique se essa estrutura define um espaço vetorial real. Se for o caso, verifique todos os axiomas, senão liste todos os axiomas não satisfeitos e dê contra-exemplo para pelo menos um deles.

(6) Considere os complexos $\mathbb{C}$ como o corpo dos escalares. Tome o conjunto $\mathbb{C}^2$ formado pelos pares ordenados de números complexos e nele defina a soma usual $(z,w) + (x,y) = (z+x, w+y)$ e o produto por escalar é $\lambda(x,y) = (\bar{\lambda}x, \bar{\lambda}y)$ onde o produto é o de números complexos. Verifique se essa estrutura define um espaço vetorial real. Se for o caso, verifique todos os axiomas, senão liste todos os axiomas não satisfeitos e dê contra-exemplo para pelo menos um deles.

(7) $\mathbb{F}_2$ é o corpo (finito) dado por $\{0,1\}$ com as operações

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Agora, vamos definir um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}_2$.

Seja X um conjunto finito e não vazio qualquer e denotemos por $\wp(X)$ o conjunto das partes de X. Em $\wp(X)$ temos uma soma Δ e uma multiplicação por escalar $\odot$ definidas por

(a) $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ para todos $A, B \in \wp(X)$,

(b) $0 \odot A = \emptyset$ e $1 \odot A = A$ para todo $A \in \wp(X)$.

Verifique os axiomas de espaço vetorial para $(\wp(X), \Delta, \odot)$.

(8) Seja $(\mathcal{V}, \boxplus, \boxdot)$ um espaço vetorial real. Prove que decorrem dos axiomas

(a) Para todos $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$, se $\vec{u} \boxplus \vec{w} = \vec{v} \boxplus \vec{w}$ então $\vec{u} = \vec{v}$.

(b) Para todos $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$, se $\vec{u} \boxplus \vec{v} = \vec{v}$ então $\vec{u} = \vec{0}$.

(c) O vetor oposto a $\vec{v}$ é único.

Exercícios Subespaço

(1) Demonstre $\mathcal{U}$ *é subespaço do espaço* $(\mathcal{V}, \boxplus, \boxdot)$ *se, e somente se,*
   (a) $\vec{0} \in \mathcal{U}$;
   (b) $\forall \vec{u},\ \vec{v} \in \mathcal{U}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, *vale* $(\alpha \boxdot \vec{u}) \boxplus \vec{v} \in \mathcal{U}$.

(2) Verifique que as soluções de um sistema linear homogêneo em n incógnitas é um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Mostre que os vetores solução de um sistema *não* homogêneo e consistente de m equações lineares em n incógnitas *não* for mam um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

(3) Verifique se são subespaços
   (a) Do $\mathbb{R}^3$
      (a) Todos os vetores da forma $(a, 0, 0)$.
      (b) Todos os vetores da forma $(a, 1, 1)$.
      (c) Todos os vetores da forma (a, b, c), com $b = a + c + 1$.
   (b) Do $\mathcal{M}(n, n)$
      (a) O conjunto de todas as matrizes diagonais.
      (b) O conjunto de todas as matrizes com traço 0.
      (c) O conjunto de todas as matrizes A tais que $AB = BA$ com alguma matriz B fixada.
      (d) conjunto de todas as matrizes A com $A^2 = A$.
      (e) O conjunto de todas as matrizes com traço diferente de 0.
   (c) Do $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
      (a) Todas as funções f tais que $f(0) = 1$.
      (b) Todas as funções f tais que $f(-x) = f(x)$.
      (c) Todas as funções f tais que $f(-x) = -f(x)$.
      (d) Todos os polinômios de grau 2.
      (e) Todas as funções deriváveis que satisfazem $f' + 2f = 0$.
      (e) Todas as funções f contínuas em $[a, b]$ tais que $\int_a^b f(x)dx = 0$
      (f) Todas as funções não negativas.
      (g) Todas as funções lineares $ax + b$, $a \neq 0$.
      (h) Todas as funções exponenciais a^x, $a > 0$.
   (d) Do $\mathbb{R}^\infty$
      (a) Todas as sequências da forma $(v, 1, v, 1, v, 1, \dots)$.
      (b) Todas as sequências da forma $(v, 2v, 4v, 8v, 16v, \dots)$.
      (c) Todas as sequências cujos componentes são nulos a partir de algum ponto.

(4) Uma reta L pela origem em $\mathbb{R}^3$ pode ser representada por equações paramétricas da forma $x = at$, $y = bt$, e $z = ct$. Use essas equações para mostrar que L é um subespaço de $\mathbb{R}^3$, mostrando que se $v = (x_1, y_1, z_1)$ e $w = (x_2, y_2, z_2)$ forem pontos em L e k for um número real qualquer, então kv e $v + w$ também são pontos em L.

(5) Determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta

(a) Cada subespaço de um espaço vetorial é, ele mesmo, um espaço vetorial.
(b) Cada espaço vetorial é um subespaço de si mesmo.
(c) Cada subconjunto de um espaço vetorial $\mathcal{V}$ que contenha o vetor zero de $\mathcal{V}$ é um subespaço de $\mathcal{V}$.
(d) O conjunto $\mathbb{R}^2$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.
(e) O conjunto das soluções de um sistema linear consistente $AX = B$ de m equações em n incógnitas é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.
(f) O conjunto gerado por qualquer conjunto finito de vetores em um espaço vetorial é fechado na adição e na multiplicação por escalar.
(g) A interseção de dois subespaços quaisquer de um espaço vetorial $\mathcal{V}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{V}$.
(h) A união de dois subespaços quaisquer de um espaço vetorial $\mathcal{V}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{V}$.
(i) Dois subconjuntos de um espaço vetorial $\mathcal{V}$ que geram o mesmo subespaço de $\mathcal{V}$ devem ser iguais.
(j) O conjunto de matrizes $n \times n$ triangulares superiores é um subespaço do espaço vetorial de todas as matrizes $n \times n$.
(k) Os polinômios x, $(x-1)^2$ e $(x-1)^3$ geram $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
(l) U, V e W são tais que W é um subespaço de V e U é um subespaço de V, então $W = U$.
(m) Se W é um subespaço de um espaço vetorial V, então W também é um espaço vetorial.

(6) Sejam U, V subespaços de $\mathcal{W}$. Reveja a definição de soma de subespaços. A soma $U+V$ é uma **soma direta** caso a interseção dos subespaços seja "a menor possível", ou seja, $U \cap V = \emptyset$, nesse caso escrevemos $U \oplus V$.
(a) Escreva $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ como soma direta de subespaços.
(b) Suponha que $\mathcal{W} = U \oplus V$. Prove que todo $\vec{w} \in \mathcal{W}$ existem únicos $\vec{u} \in U$ e $\vec{v} \in V$ tais que $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.
(7) Demonstre que $[S]$ é o *menor* subespaço vetorial de $\mathcal{V}$ que contém S, ou seja, para qualquer subsepaço U de $\mathcal{V}$ vale que se $U \supset S$ então $U \supset [S]$.
(8) Demonstre ou ache um contra-exemplo: $[U \cup V] = U + V$.
(9) Seja $AX = B$ um sistema linear possível com conjunto solução S. Mostre que S é a translação de um subespaço gerado, ou seja, existem vetores $\vec{v}_0, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ tais que $S = \vec{v}_0 + \left[\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}\right]$.

Exercícios Independência linear

(1) Em aula vimos que todo conjunto gerador de um espaço vetorial de dimensão finita pode ser reduzido para uma base. Agora, prove que todo conjunto LI desse espaço pode ser estendido para uma base.

(2) Suponha que $\mathcal{U}$ seja um subespaço de um espaço de dimensão finita $\mathcal{V}$. Prove que existe um subespaço $\mathcal{W}$ tal que $\mathcal{V}$ é a soma direta $\mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$.

(3) Prove: dados quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ num espaço vetorial, os vetores $\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{v} - \vec{w}$ e $\vec{w} - \vec{u}$ formam um conjunto linearmente dependente.

(4) Utilizando identidades apropriadas, onde necessário, determine quais dos conjuntos de vetores em $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dados são linearmente dependentes.

  (a) $6, 3\sin^2 x, 2\cos^2 x$
  (b) $1, \sin x, \sin 2x$
  (c) $(3-x)^2, x^2 - 6x, 5$
  (d) $x, \cos x$
  (e) $\cos 2x$, $\sin^2 x$, $\cos^2 x$
  (f) $0, \cos^3 \pi x, sen^5 3\pi x$

(5) Determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

  (a) Um conjunto que consiste num único vetor é linearmente dependente.
  (b) Se $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ forem vetores não nulos linearmente dependentes, então pelo menos um vetor $\vec{v}_k$ é uma combinação linear única de $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{k-1}$.
  (c) O conjunto das matrizes 2 que contém exatamente dois 1 e dois 0 é linearmente independente em $\mathcal{M}(2, 2)$.
  (d) As funções f e g são linearmente dependentes se existirem um número real x e escalares α e β tais que $\alpha f + \beta g = 0$.
  (e) Qualquer conjunto de vetores contendo o vetor nulo é linearmente dependente.
  (f) Se S é um subconjunto não vazio de um conjunto finito R e S é linearmente dependente, então R também o é.

(6) Demonstre que um subconjunto não vazio de um conjunto de vetores linearmente independentes é linearmente independente.

(7) Seja A uma matriz não singular de ordem 3. Demonstre que se $\{U, V, W\}$ for um conjunto linearmente independente em $\mathcal{M}(3, 1)$, então o conjunto $\{AU, AV, AW\}$ também é linearmente independente. Explique porque isso não é verdadeiro quando A é singular.

(8) Sejam $f(x) = 3x$ e $g(x) = |x|$. Mostre que essas funções são linearmente dependentes no espaço vetorial $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, mas são linearmente independentes em $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$.

Exercícios Base e mudança de base, dimensão e coordenadas

(1) Explique por que $\{1, 2x, -4 + x^2, 5x\}$ não é base do $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(2) Explique por que $\{1 - 2x + x^2, 3 - 6x + 3x^2, -2 + 4x - 2x^2\}$ não é base do $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(3) Encontre uma base do espaço vetorial de todas as matrizes diagonais 3×3. Qual é a dimensão deste espaço vetorial?

(4) Mostre que, para cada inteiro positivo n, podemos encontrar $n + 1$ vetores linearmente independentes em $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ [Sugestão: procure polinômios]. Use o resultado para provar que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tem dimensão infinita.

(5) Demonstre que, se W for um subespaço de um espaço vetorial de dimensão finita V, então $\dim(W) \leq \dim(V)$.

(6) Seja A uma matriz $m \times n$. Demonstre que o sistema de equações lineares $AX = B$ é consistente para todos os vetores coluna B se e somente se o posto de A é m.

(7) Prove que as operações de linhas não alteram as relações de dependência entre as colunas de uma matriz $m \times n$.

(8) Encontre o vetor de coordenadas de $2 - x + x^2$ em relação a base $1 + x$, $1 + x^2$ e $x + x^2$.

(9) Seja S uma base de um espaço vetorial $\mathcal{V}$ de dimensão n. Mostre que se $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r$ formarem um conjunto linearmente independente de vetores em $\mathcal{V}$, então os vetores de coordenadas $[\vec{v}_1]_S, [\vec{v}_2]_S, \ldots, [\vec{v}_r]_S$ formam um conjunto linearmente independente em $\mathbb{R}^n$ e reciprocamente.

(10) Seja V o espaço gerado por $\sin x$ e $\cos x$. Mostre que $2\sin x + \cos x$ e $3cosx$ formam uma base de V e mostre a matriz de transição dessa base para o conjunto gerador.

(11) Determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.
   (a) Se $\dim(V) = n$, então existe um conjunto de $n+1$ vetores em V que geram V.
   (b) Se $\dim(V) = n$, então qualquer conjunto de $n + 1$ vetores em V deve ser linearmente dependente.
   (c) Se $\dim(V) = n$, então qualquer conjunto de $n - 1$ vetores em V deve ser linearmente independente.
   (d) Se uma matriz A é linha-equivalente a uma matriz B, então o espaço linha de A é igual ao espaço linha de B.
   (e) Se A é uma matriz $m \times n$ de posto r, então a dimensão do espaço solução de $AX = 0$ é $m - r$.
   (f) O espaço coluna de uma matriz A é igual ao espaço linha de A^T.
   (g) espaço linha de uma matriz A é igual ao espaço coluna de A^T.
   (h) Se P é a matriz de transição de uma base B para C, então a equação $P[x]_C = [x]_B$ representa a mudança de base de B para C.
   (i) Para qualquer matriz X de tamanho 4×1, a matriz de coordenadas $[X]_S$ em relação à base canônica de $\mathcal{M}(4, 1)$ é igual a própria X.

(j) Para fazer a mudança de base de uma base não canônica B para a base canônica C, a matriz de transição P^{-1} é simplesmente B.

(k) A matriz de coordenadas de $p = -3 + x + 5x^2$ em relação à base canônica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ é $[p]_S = [5 \quad 1 \quad -3]^T$.

(l) Se $\mathcal{V} = [\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n]$ então $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ é uma base de $\mathcal{V}$.

(m) O vetor de coordenadas de um vetor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ em relação à base canônica de $\mathbb{R}^n$ é $\vec{x}$.

(n) Cada base de $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ contém pelo menos um polinômio de grau 3 ou menor.

(o) Se B for uma base do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, então a matriz mudança de bases de B para B é a matriz identidade.

Exercícios Produto interno

(1) Encontre o ângulo entre a diagonal de um cubo e um dos seus lados.

(2) Encontre o ângulo entre a diagonal de um cubo e a diagonal de um de seus lados.

(3) No Mostre que no $\mathbb{R}^n$ com produto escalar, para qualquer matriz A de ordem n,

  (a) $\langle A^T\vec{u}, \vec{v}\rangle = \langle \vec{u}, A\vec{v}\rangle$.

  (b) $\langle A^T A\vec{u}, \vec{u}\rangle = \|A\vec{u}\|$.

(4) Seja $\mathcal{W}$ um subespaço do espaço com produto interno $\mathcal{V}$. Demonstre que o conjunto $\mathcal{W}^\perp = \{\vec{v} \in \mathcal{V} \colon \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle = 0 \text{ para todo } \vec{w} \in \mathcal{W}\}$ é um subespaço de $\mathcal{V}$.

(5) **Subespaços fundamentais de uma matriz** Dada uma matriz $A \in \mathcal{M}(m, n)$ os quatro subespaços fundamentais associados a A são

- $N(A)$ é o núcleo de A dado pelos $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tais que $A\vec{x} = \vec{0}$.
- $R(A)$ é o espaço coluna de A.
- $N(A^T)$ é o núcleo de A^T.
- $R(A^T)$ é o espaço coluna de A^T.

  (a) Demonstre que $N(A) \subset R(A^T)^\perp$.

  (b) Demonstre que $N(A) = R(A^T)^\perp$.

  (c) Demonstre que $N(A^T) = R(A)^\perp$.

(6) Usando Gram-Schmidt transforme a base $\{(4, -3, 0), (1, 2, 0), (0, 0, 4)\}$ do $\mathbb{R}^3$ com produto escalar em uma base ortonormal.

Usando Gram-Schmidt transforme a base $\{(2, -1), (-2, 10)\}$ do $\mathbb{R}^3$ com produto interno $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2$ em uma base ortonormal.

(7) Seja P uma matriz $n \times n$. Demonstre que as três condições são equivalentes:

  (a) $P^{-1} = P^T$.

  (b) Os vetores linha de P formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ (com produto escalar).

  (c) Os vetores coluna de P formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

(8) Seja X uma solução do sistema homogêneo $m \times n$ de equações lineares. Explique por que $\vec{x}$ é ortogonal aos vetores linha da matriz dos coeficientes.

(9) Demonstre que, se $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v}$ e a $\vec{w}$, então $\vec{u}$ é ortogonal a $\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$ para quaisquer escalares α e β.

(10) Demonstre que se $\vec{w}$ for ortogonal a cada vetor em $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$, então $\vec{w}$ é ortogonal a toda combinação linear de vetores de S.

(11) Verificar que $\{1, x, x^2, x^3\}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ 3 com o produto interno $\langle p, q\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

(12) Determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

  (a) Uma base ortonormal obtida pelo processo de ortonormalização de Gram-Schmidt não depende da ordem dos vetores na base.

  (b) O produto escalar é o único produto interno que pode ser definido em $\mathbb{R}^n$.

(c) Um vetor não nulo em um espaço com produto interno pode ter uma norma nula.
(d) O ângulo θ entre um vetor $\vec{v}$ e a projeção de $\vec{u}$ em $\vec{v}$ é obtuso quando $\alpha < 0$ e agudo quando $\alpha > 0$, onde α é o escalar tal que $\alpha\vec{v} = \text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u})$.
(e) Um conjunto S de vetores em um espaço com produto interno é ortogonal quando cada par de vetores em S é ortogonal.
(f) Uma base ortonormal obtida pelo processo de ortonormalização de Gram–Schmidt não depende da ordem dos vetores na base.
(g) Um conjunto S de vetores num espaço com produto interno é ortonormal quando cada vetor é um vetor unitário e cada par de vetores é ortogonal.
(h) e um conjunto de vetores não nulos S em um espaço com produto interno é ortogonal, então S é linearmente independente.

(13) Abaixo, use as funções f e g em $\mathcal{C}[1,1]$ para encontrar $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$, encontrar $\|f\|$, $\|g\|$ e $d(f,g)$, finalmente, encontre a projeção ortogonal de f em g
- $f(x) = 1$, $g(x) = 4x^2 - 1$
- $f(x) = -x$, $g(x) = x^2 - x + 2$
- $f(x) = x$, $g(x) = e^x$
- $f(x) = x$, $g(x) = e^{-x}$

Exercícios Transformações Lineares

(1) Determine se a função é uma transformação linear:
- $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (x,1)$.
- $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (x,y^2)$.
- $T : \mathcal{M}(2,2) \to \mathbb{R}$, $T(A) = a_{1,1} + a_{1,2} + a_{2,1} + a_{2,2}$.
- $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x+1, y+1, z+1)$.
- $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x+y, x-y, z)$.
- $T : \mathcal{M}(n,n) \to \mathcal{M}(n,n)$, $T(A) = A^{-1}$.
- $T : \mathcal{M}(n,n) \to \mathcal{M}(n,n)$, $T(A) = AX - XA$, onde X é uma matriz fixa.
- $T : \mathcal{M}(n,n) \to \mathcal{M}(n,m)$, $T(A) = AB$, onde B é uma matriz fixa.

(2) Seja $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ um conjunto de vetores LD em $\mathcal{V}$ e seja T uma transformação linear de $\mathcal{V}$ em $\mathcal{V}$. Demonstre que o conjunto $\{T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), \ldots, T(\vec{v}_n)\}$ é LD.

(3) Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a T.L. $T(x) = Ax$. Demonstre que o espaço coluna de A é igual a imagem de T.

(4) Seja $\mathcal{V}$ um espaço com produto interno com um subespaço W que possui $B = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n\}$ como uma base ortonormal. Mostre que a função $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ representada por $T(v) = \langle\vec{v}, \vec{w}_1\rangle\vec{w}_1 + \langle\vec{v}, \vec{w}_2\rangle\vec{w}_2 + \cdots + \langle\vec{v}, \vec{w}_n\rangle\vec{w}_n$ é uma transformação linear.

(5) Uma translação em $\mathbb{R}^2$ é uma função da forma $T(x, y) = (x - h, y - k)$, onde pelo menos uma das constantes h e k é diferente de zero. (a) Mostre que uma translação em $\mathbb{R}^2$ não é uma transformação linear. (b) Para a translação $T(x, y) = (x-2, y+1)$, determine as imagens de $(0, 0)$, $(2, -1)$ e $(5, 4)$. (c) Mostre que uma translação em $\mathbb{R}^2$ não tem pontos fixos.

(6) Encontre o núcleo da transformação linear

  (a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (0, 0, 0)$

  (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (x, 0, z)$

  (c) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ T(x, y, z, w) = (y, x, w, z)$

  (d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (-z, -y, -x)$

  (e) $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_1 + a_2$

  (f) $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0$.

(7) Defina $F : \mathcal{M}(n, n) \to \mathcal{M}(n, n)$ por $F(A) = A - A^T$. Mostre que o núcleo de F é o conjunto das matrizes simétricas $n \times n$.

(8) Se uma afirmação for falsa, forneça um exemplo que mostre que a afirmação não é verdadeira em todos os casos ou cite uma afirmação apropriada do texto.

(a) O conjunto de todos os vetores levados de um espaço vetorial V em outro espaço vetorial W por uma transformação linear T é o núcleo de T.

(b) A imagem de uma transformação linear de um espaço vetorial V em um espaço vetorial W é um subespaço de V.

(c) Os espaços vetoriais $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{M}(3, 1)$ são isomorfos entre si.

(d) A dimensão de uma transformação linear T de um espaço vetorial V em um espaço vetorial W é o posto de T.

(e) Uma transformação linear T de V em W é injetora quando a pré-imagem de cada w na imagem consiste em um único vetor v.

(f) Os espaços vetoriais $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ são isomorfos entre si.

(g) Todas as transformações lineares T têm uma inversa única T^{-1}

(h) A composta T das transformações lineares T_1 e T_2, representada por $T(v) = T_2(T_1(v))$, está definida quando a imagem de T_1 está dentro do domínio de T_2 .

(i) Em geral, as compostas $T_2 \circ T_1$ e $T_1 \circ T_2$ têm a mesma matriz canônica A.

(j) A matriz A' de uma transformação linear relativa à base B' é igual ao produto $P^{-1}AP$, onde P^{-1} é a matriz de transição de B para B', A é a matriz da transformação linear relativa à base B e P é a matriz de transição de B' para B.

(k) Duas matrizes que representam a mesma transformação linear $T : V \to V$ com respeito a diferentes bases não são necessariamente semelhantes.

(l) A matriz A de uma transformação linear relativa à base B é igual ao produto $PA'P^{-1}$, onde P é a matriz de transição de B' para B, A' é a matriz da transformação linear relativa à base B' e P^{-1} é a matriz de transição de B para B'.

(m) A base canônica de $\mathbb{R}^n$ sempre tornará a matriz de coordenadas de uma transformação linear T a matriz mais simples possível.

(n) Se $S : V \to V$ e $T : V \to V$ forem operadores lineares e B for uma base de V, então a matriz de $S \circ T$ em relação a B é $[T]_B^B[S]_B^B$.

(o) Se $T : V \to V$ for um operador linear inversível e B for uma base de V, então a matriz de T^{-1} em relação a B é $[T]_B^{B^{-1}}$.

(p) A e $P^{-1}AP$ têm o mesmo posto.

(q) A e $P^{-1}AP$ têm a mesma nulidade.

(9) Seja $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma transformação linear e seja U um subespaço de $\mathcal{W}$. Demonstre que o conjunto $T^{-1}(U) = \{\vec{v} \in \mathcal{V} : T(\vec{v}) \in U\}$ é um subespaço de $\mathcal{V}$. O que é $T^{-1}(U)$ quando $U = \{\vec{0}\}$?

(10) Encontre a matriz canônica da transformação linear T

(a) $T(x, y) = (x + 2y, x - 2y)$

(b) $T(x, y) = (2x - 3y, x - y, y - 4x)$

(11) Seja $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por $T(p) = xp$. Encontre a matriz de T relativa às bases $B = \{1, x, x^2\}$ e $B' = \{1, x, x^2, x^3\}$.

(12) Seja $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por $T(p) = x^2p$. Encontre a matriz de T relativa às bases $B = \{1, x, x^2\}$ e $B' = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$.

(13) Seja $B = \{1, x, e^x, xe^x\}$ uma base de um subespaço W do espaço de funções contínuas e seja D_x o operador diferencial em W. Encontre a matriz de D_x relativa à base B.

(14) Repita o exercício acima para $B = \{e^{2x}, xe^{2x}, x^2e^{2x}\}$.

(15) Use a matriz do Exercício 13 para calcular $D_x[4x - 3xe^x]$.

(16) Use a matriz do Exercício 14 para calcular $D_x[5e^{2x} - 3xe^{2x} + x^2e^{2x}]$.

(17) Seja A uma matriz $n \times n$ tal que $A^2 = \mathbf{0}$. Demonstre que se B é semelhante a A, então $B^2 = \mathbf{0}$.

(18) Considere a equação matricial $B = P^{-1}AP$. Demonstre que se $Ax = x$, então $PBP^{-1}x = x$.

Exercícios Autovalores e Autovetores

(1) Encontre (1) a equação característica e (2) os autovalores (e autovetores associados) da matriz. Verifique que (3) A soma dos autovalores é igual ao traço da matriz. (Lembre-se de que o traço de uma matriz é a soma dos elementos da diagonal principal da matriz.) (4) O produto dos autovalores é igual a $\det(A)$. (Quando um autovalor tem multiplicidade k, lembre-se de usá-lo k vezes na soma ou no produto nestas verificações.)

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

(2) Mostre que, se A é uma matriz $n \times n$ cuja i-ésima linha é idêntica a i-ésima linha de I_n, então 1 é um autovalor de A.

(3) Para uma matriz inversível A, demonstre que A e A^{-1} possuem os mesmos autovetores. Como os autovalores de A estão relacionados aos autovalores de A^{-1}?

(4) Demonstre que A e A^T possuem os mesmos autovalores. Os autoespaços são os mesmos?

(5) Mostre que a projeção ortogonal $\text{proj}_{\vec{u}}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ onde $\vec{u}$ é um vetor fixo tem autovalores (com respeito a base canônica) 0 e 1.

(6) Demonstre que se $A^2 = \mathbf{O}$, então 0 é o único autovalor de A. (Começando: você precisa mostrar que, se existe um vetor $\vec{x}$ não nulo e um número real λ tal que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, então, se $A^2 = \mathbf{O}$, λ deve ser zero. Use o fato de $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ e as propriedades da multiplicação de matrizes para mostrar que $A^2\vec{x} = \lambda^2\vec{x}$)

(7) Demonstre que a multiplicidade de um autovalor é maior ou igual à dimensão do seu autoespaço.

(8) Quais são os possíveis autovalores de uma matriz idempotente? A é idempotente quando $A^2 = A$.

(9) Quais são os possíveis autovalores de uma matriz nilpotente? A é nilpotente quando existe um inteiro positivo k tal que $A^k = 0$.

(10) Seja A uma matriz $n \times n$ tal que a soma dos elementos em cada linha seja uma constante fixa r. Demonstre que r é um autovalor de A. Ilustre esse resultado com um exemplo.

(11) Para um número real x, você pode definir e^x pela série

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Do mesmo modo, para uma matriz quadrada X, você pode definir e^X pela série

$$e^X = I + X + \frac{1}{2!}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \cdots$$

Calcule e^X, onde X é a matriz quadrada dada.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

(12) Uma matriz pode ser semelhante a duas matrizes diagonais diferentes? Explique.

(13) Demonstre que, se a matriz A é diagonalizável, então A^T é diagonalizável

(14) Demonstre que se os autovalores de uma matriz diagonalizável A são todos ± 1, então a matriz é igual a sua inversa. (Começando: para mostrar que a matriz é igual à inversa, use o fato de que existe uma matriz inversível P tal que $D = P^{-1}AP$ com D diagonal formada por ± 1. Seja $D = P^{-1}AP$, onde D é diagonal com ± 1 ao longo de sua diagonal principal. Encontre A em termos de P e D. Use as propriedades da inversa de um produto de matrizes e o fato de que D é diagonal para expandir e encontrar A^{-1}. Conclua que $A^{-1} = A$.)

(15) Demonstre que as matrizes nilpotentes não nulas não são diagonalizáveis. (Começando: Do Exercício 9 sabe-se que 0 é o único autovalor da matriz nilpotente. Mostre que é impossível que seja diagonalizável. Suponha que A seja diagonalizável, então existe uma matriz inversível P tal que $P^{-1}AP = D$, onde D é a matriz nula. Encontre A em termos de P e D. Encontre uma contradição e conclua que as matrizes nilpotentes não nulas não são diagonalizáveis.)

(16) Mostre que a equação característica de uma matriz A de ordem 2 pode ser expressa como $\lambda^2 + \text{traço}(A)\lambda + \det(A) = 0$.

(17) Prove: se λ for um autovalor de uma matriz invertível A com autovetor associado $\vec{x}$, então $1/\lambda$ é um autovalor de A^{-1} com autovetor associado $\vec{x}$.

(18) Prove: se λ for um autovalor de A com autovetor associado $\vec{x}$ e se s for um escalar, então $\lambda - s$ é um autovalor de $A - sI$ com autovetor associado $\vec{x}$.

(19) Prove: se λ for um autovalor de A com autovetor associado $\vec{x}$, então λ é um autovalor de sA com autovetor associado $\vec{x}$, qualquer que seja o escalar s.

(20) Às vezes, os autovetores como estudamos são denominados autovetores à direita, para distingui-los de autovetores à esquerda, que são matrizes coluna $\vec{x}$ de tamanho n que satisfazem a equação $\vec{x}^T A = \mu \vec{x}^T$ com algum escalar μ. Qual será a relação, se houver, entre os autovetores à direita e autovalores correspondentes e os autovetores à esquerda e autovalores correspondentes?

(21) Determine se cada afirmação é verdadeira ou falsa. Se uma afirmação for verdadeira, dê uma justificativa e se for falsa, forneça um exemplo que mostre que a afirmação não é verdadeira.

1) Se A for uma matriz quadrada e $A\vec{x} = \lambda$ com $\lambda \neq 0$ escalar, então $\vec{x}$ é um autovetor de A.
2) Se λ for um autovalor de uma matriz A, então o sistema linear $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$ só tem a solução trivial.
3) Se o polinômio característico de uma matriz A for $\lambda + 1$, então A é invertível.
4) Se λ for um autovalor de uma matriz A, então o autoespaço de A associado a λ é o conjunto de autovetores de A associados a λ.
5) Se 0 for um autovalor de uma matriz A, então A^2 é singular.
6) Os autovalores de uma matriz A são iguais aos autovalores da forma escalonada reduzida por linhas de A.
7) Se 0 for um autovalor de uma matriz A, então o conjunto de vetores coluna de A é linearmente independente.
8) O escalar λ é um autovalor de uma matriz A de ordem n quando existe um vetor $\vec{x}$ tal que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$.
9) Para encontrar o(s) autovalor(es) de uma matriz A de ordem n, você pode resolver a equação característica $\det(A - \lambda I_n) = 0$.
10) Geometricamente, se λ é um autovalor de uma matriz A e $\vec{x}$ é um autovetor de A associado a λ, então, multiplicar $\vec{x}$ por A produz um vetor $\lambda\vec{x}$ paralelo a $\vec{x}$.
11) Se A é uma matriz $n \times n$ com um autovalor λ, então o conjunto de todos autovetores de λ é um subespaço de $\mathbb{R}n$.
12) Se A e B são matrizes $n \times n$ semelhantes, então elas sempre têm a mesma equação polinomial característica.
13) O fato de uma matriz A de ordem n ter n autovalores distintos não garante que A seja diagonalizável.

14) Se A é uma matriz diagonalizável, então ela tem n autovetores linearmente independentes.
15) Se uma matriz A de ordem n é diagonalizável, então ela possui dois autovalores distintos.
16) Seja A uma matriz $n \times n$. Então, A é simétrica se e somente se A é ortogonalmente diagonalizável.
17) Os autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais para matrizes simétricas.
18) Uma matriz quadrada P é ortogonal quando é inversível.
19) Se A é uma matriz simétrica $n \times n$, então A tem autovalores reais.
20) Um autovetor de uma matriz A de tamanho $n \times n$ é um vetor não nulo em $\mathbb{R}^n$ tal que $A\vec{x}$ é um múltiplo escalar de $\vec{x}$.
21) Matrizes semelhantes podem ou não ter os mesmos autovalores.
22) Para diagonalizar uma matriz quadrada A, é preciso encontrar uma matriz inversível P tal que $P^{-1}AP$ seja diagonal.
23) Um autovetor pode ser o vetor nulo.
24) Uma matriz A é ortogonalmente diagonalizável quando existe uma matriz ortogonal P tal que $P^{-1}AP$ é diagonal.
25) Uma matriz não pode ser semelhante a si mesma.
26) Se A é semelhante a B e B é semelhante a C, então A é semelhante a C.
27) Se $S\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $T\colon \mathbb{R}^n \to R^n$ forem operadores lineares e se $[S]_C^B = [T]_C^B$ em relação a duas bases B e C de $\mathbb{R}^n$, então $T(\vec{x}) = S(\vec{x})$, qualquer que seja o vetor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
28) Se $T\colon \mathbb{R}^n \to R^n$ é operador linear e se $[T]_C^C = [T]_B^B$ em relação a duas bases B e C de $\mathbb{R}^n$, então $B = C$.
29) Se $T\colon \mathbb{R}^n \to R^n$ é operador linear e se $[T]_C^C = I_n$, então T é o operador identidade de $\mathbb{R}^n$.
30) Se $T\colon \mathbb{R}^n \to R^n$ é operador linear e se $[T]_C^B = I_n$ em relação a duas bases B e C de $\mathbb{R}^n$, então T é o operador identidade de $\mathbb{R}^n$.
31) Se A for uma matriz quadrada, então AA^T e A^TA serão ortogonalmente diagonalizáveis.
32) Se $\vec{v}_1$ e v_2 forem autovetores de autoespaços distintos de uma matriz simétrica, então $\|\vec{v}_1 + \vec{v}_2\|^2 = \|\vec{v}_1\|^2 + \|\vec{v}_2\|^2$.
33) Se A for ortogonalmente diagonalizável, então A tem autovalores reais.
34) Se A é uma matriz diagonalizável tal que autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais, então A é simétrica.

(22) Demonstre que se A e B são matrizes ortogonais $n \times n$, então AB e BA são ortogonais, A^T e A^{-1} também o são.

(23) Prove que, se uma matriz simétrica A tem apenas um autovalor λ, então $A = \lambda I$.

(24) Seja A uma matriz $n \times m$. Mostre que os autovalores de AA^T são não negativos.

(25) Prove que se A for uma matriz $n \times m$ qualquer, então $A^T A$ tem um conjunto ortonormal de n autovetores.

(26) Definimos o polinômio característico da matriz A por $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Em alguns textos é definido como $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$. Argumente que ambos têm as mesmas raízes. Verifique os polinômios são diferentes por um fator multiplicativo $(-1)^n$.

(27) Prove que matrizes semelhantes têm o mesmo posto, têm a mesma nulidade, têm o mesmo traço.

(28) Suponha que o polinômio característico de alguma matriz A seja $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)^2(\lambda - 4)^3$.

   (a) O que pode ser dito sobre as dimensões dos autoespaços de A?
   (b) O que pode ser dito sobre as dimensões dos autoespaços sabendo que A é diagonalizável?
   (c) Se $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ for um conjunto linearmente independente de autovetores de A, cada um dos quais está associado ao mesmo autovalor de A, o que pode ser dito sobre esse autovalor?

Exercícios Aplicações

Genética.

(1) Suponha que um criador tenha uma população animal na qual 25% seja portadora de uma doença recessiva autossômica. Se o criador permitir aos animais cruzar sem levar em conta o seu genótipo, use a Equação $b_n = \dfrac{b_{n-1}}{1 + \frac{1}{2}b_{n-1}}$ $(n = 1, 2, \dots)$ para calcular o número de gerações que será necessário para a porcentagem dos portadores cair de 25% para 10%. Se o criador implementar, em vez disso, o programa de cruzamentos controlados determinado pela Equação $b_n = \dfrac{1}{2}b_{n-1}$ $(n = 1, 2, \dots)$, qual será a porcentagem de portadores depois do mesmo número de gerações?

Criptografia.

(1) Para encontrar a transposta da matriz decodificadora A^{-1}, devemos encontrar uma sequência de operações elementares com as linhas que reduza a matriz dos vetores cifrados C a matriz identidade I_n e então aplicar essas mesmas operações à matriz dos textos comuns P:

Teorema: *Sejam* $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$ *vetores comuns linearmente independentes e sejam* $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots, \vec{c}_n$ *os correspondentes vetores cifrados de uma cifra de Hill de ordem* n. *Se*

$$P = \begin{bmatrix} \vec{p}_1^T \\ \vec{p}_2^T \\ \vdots \\ \vec{p}_n^T \end{bmatrix} \quad e \ C = \begin{bmatrix} \vec{c}_1^T \\ \vec{c}_2^T \\ \vdots \\ \vec{c}_n^T \end{bmatrix}$$

então a sequência de operações linha-elementares que reduz C *a* I_n *transforma* P *em* $(A^{-1})^T$.

(a) Mostre que $P = C(A^{-1})^T$.

(b) Mostre que se $E_1, \ldots, E_k$ são matrizes elementares tais que $E_k \cdots E_2 E_1 C = I_n$ então $E_k \cdots E_2 E_1 P = (A^{-1})^T$.

(c) Se A for a matriz codificadora de uma cifra de Hill de ordem n, mostre que $A^{-1} = (C^{-1}P)^T$ (mod 26).

Crescimento populacional.

(1) Suponha que uma certa população animal seja dividida em duas faixas etárias e tenha uma matriz de Leslie

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule o autovalor positivo λ_1 de L e o correspondente autovetor $\vec{x}_1$.

(b) Começando com o vetor de distribuição etária inicial $\vec{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix}$ calcule $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \vec{x}^{(3)}, \vec{x}^{(4)}, \vec{x}^{(5)}$, arredondando ao inteiro mais próximo quando necessário.

(c) Calcule $\vec{x}^{(6)}$ usando a fórmula exata $\vec{x}^{(6)} = L\vec{x}^{(5)}$ e a fórmula aproximada $\vec{x}^{(6)} \approx \lambda_1 \vec{x}^{(5)}$.

Um modelo de mínimos quadrados para a audição humana.

(1) Usando o produto interno

$$\langle u(t), v(t) \rangle = \int_0^{2\pi} u(t)v(t)\, dt$$

mostre que

(a) $\|1\| = \sqrt{2\pi}$

(b) $\|\cos(kt)\| = \sqrt{\pi}$ para $k = 1, 2, \ldots$

(c) $\|\sin(kt)\| = \sqrt{\pi}$ para $k = 1, 2, \ldots$

(d) Mostre que as $2n + 1$ funções

$$1, \cos t, \cos 2t, \ldots, \cos nt, \sin t, \sin 2t, \ldots, \sin nt$$

são ortogonais no intervalo $[0, 2\pi]$ em relação ao produto interno acima.

Valores singulares.

(1) Use o teorema espectral para matrizes simétricas para mostrar que se A for uma matriz $m \times n$, então $A^T A$ é ortogonalmente diagonalizável.

(2) Mostre que os valores singulares de $A^T A$ são os quadrados dos valores singulares de A.